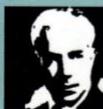


CUADERNO DE ESTUDIO N° 6



ELEMENTOS DE CONTRAPUNTO ATONAL

Pablo Cetta • Oscar Pablo Di Liscia



Instituto de Investigación
Musicológica "Carlos Vega"

PREMIO KONEX 2009



ELEMENTOS DE CONTRAPUNTO ATONAL

**Instituto de Investigación Musicológica
“Carlos Vega”**

Serie Cuadernos de Estudio Nro. 6

Pablo Cetta y Oscar Pablo Di Liscia

**ELEMENTOS DE
CONTRAPUNTO ATONAL**

Elementos de contrapunto atonal
Pablo Cetta y Oscar Pablo Di Liscia
1ª. Edición.
Buenos Aires: EDUCA, 2010
107 p.; 28x20 cm.

ISBN 978-987-620-137-7
1. Música 2. Teorías Musicales

CDD 780

**EDITORIAL
DE LA UNIVERSIDAD
CATÓLICA ARGENTINA**

FUNDACIÓN UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA
A. M. DE JUSTO 1400 (C1107AAZ)
4349-0200 educa@uca.edu.ar
Buenos Aires, junio de 2010

ISBN 978-987-620-137-7

Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723
Printed in Argentina – Impreso en Argentina

Prólogo de los autores	9
Capítulo I - Teoría de los Conjuntos de Grados Cromáticos (PCS)	11
Capítulo II - Matrices Combinatorias	39
Capítulo III - Aplicaciones musicales	61
Capítulo IV - Aplicaciones informáticas para la composición y el análisis de la música atonal: la biblioteca PCSLIB	69
Apéndice I (Tabla de los PCS)	90
Apéndice II (Complejos Kh)	95
Referencias bibliográficas	105

Este libro trata la teoría de la Armonía y del Contrapunto atonal, y las técnicas para su aplicación con el apoyo de programas informáticos. Pero dado que tanto la armonía como el contrapunto son las dos caras de la organización musical basada en notas, con énfasis en la organización simultánea una y en la organización sucesiva el otro, y en honor a la concisión, lo hemos titulado “*Elementos de Contrapunto Atonal*”. Todo lo aquí desarrollado se basa en nuestra experiencia como compositores y docentes universitarios y, específicamente, en lo producido en el marco de los Proyectos de Investigación “*Desarrollo de aplicaciones informáticas para la organización de la altura temperada en la composición y análisis musical*” (Área de Artes Multimediales, I.U.N.A., 2007-2008) y “*Formalización de procesos compositivos y desarrollo de aplicaciones informáticas para análisis y composición musical*” (Facultad de Artes y Ciencias Musicales, U.C.A., 2007-2009).

Gran parte de la producción musical de la música occidental descansa en la organización de la altura en base al sistema temperado. Durante los Siglos XVII, XVIII y XIX, se desarrollaron simultáneamente tanto la música Tonal como su teoría. A partir de la llamada “Música del Siglo XX”, o “Música Contemporánea”, comienza un proceso de disolución gradual del Sistema Tonal en el que se destacan tres tendencias:

La persistencia del sistema tonal de manera “extendida”, o de sistemas análogos en base a otras escalas o modos, o el uso particular de estos –politonalidad, bitonalidad, etc.- Se encuentra en determinadas composiciones de Claude Debussy, Bela Bártok, Sergei Prokofief, Igor Stravinsky, Alexander Scriabin, entre otros.

La organización Serial Dodecafónica de la altura temperada, diseñada por los compositores de la Escuela de Viena (Arnold Schönberg, Anton Webern y Alban Berg), aproximadamente a partir de 1920 y continuada luego por compositores europeos y estadounidenses. La posterior derivación de ésta fue el Serialismo Integral, tendencia encabezada por compositores como Karlheinz Stockhausen, Pierre Boulez, Luigi Nono, Luciano Berio y Milton Babbitt, entre otros.

La organización “no-serial” de la altura temperada que, sin embargo, no es tonal (o tonal-extendida, como el caso de la tendencia que mencionamos en el punto 1) ni serial, y que se suele denominar “atonalismo libre”. Esta se detecta en las primeras composiciones atonales de los compositores de la Escuela de Viena, aunque también en las obras de Edgar Varése, Charles Ives e Igor Stravinsky, entre otros.

Ya que la primera y la segunda de las tendencias mencionadas se basan en conceptos teóricos totalmente –o casi totalmente- desarrollados, surgió la necesidad de diseñar un sistema teórico para la música Atonal no-serial. Si bien no puede negarse que su fuente de inspiración la constituye la música pre y post-serial atonal centroeuropea, fue inicialmente desarrollado por compositores y teóricos americanos (Milton Babbitt y Allen Forte, como compositor y teórico y como teórico respectivamente, entre los más destacados). El sistema, se basa en la noción de *Pitch Class Sets* (Conjuntos de Grados Cromáticos) y utiliza recursos del Álgebra Combinatoria y de la Teoría de Conjuntos para organizar los grados cromáticos (*Pitch Classes*) del sistema temperado en grupos

(*Sets*), y determinar sus propiedades estructurales. En base a las propiedades de los *Pitch Class Sets* surgen sus posibilidades de combinación y su potencial sonoro a explotar en la composición musical. Una posterior proyección es la formalización de las posibilidades de la disposición vertical y horizontal de estos conjuntos en matrices, que explotan sus características estructurales en la generación de diseños compositivos abstractos aplicables a la composición musical, tal como se desarrolla principalmente en los trabajos del compositor estadounidense Robert Morris. La combinatoria aplicada a matrices, sin embargo, no es exclusiva de la música atonal, sino que se desarrolla abundantemente también en la música serial dodecafónica. En este sentido, tanto la teoría de la música serial dodecafónica como la de la música atonal se complementan en una manera orgánica, dado que las formas canónicas de una serie dodecafónica (original, inversión, retrogradación e inversión retrógrada) no alcanzan a dar cuenta de la estructura subyacente de una obra musical y, por otro lado, los conjuntos de grados cromáticos de una obra no-serial deben estar distribuidos organizadamente en el total cromático.

Los capítulos I y II de este libro desarrollan la teoría básica: Conjuntos de Grados Cromáticos y Matrices Combinatorias. En el capítulo III se exponen algunos ejemplos musicales. Ciertas complejidades de la teoría atonal tornan su aplicación práctica casi imposible si no se dispone de programas de computación que asistan al compositor o al teórico. De hecho, la técnica de los *Pitch Class Sets* y sus derivaciones parece haberse desarrollado en sinergia con los sistemas de composición y análisis asistidos por computadoras. Es por eso que, en el capítulo IV de este libro, se presenta una descripción y ejemplos de uso de una de las aplicaciones informáticas desarrolladas específicamente en el marco de los proyectos de investigación que dieron lugar a este libro: la biblioteca de objetos externos *pcslib* (para utilizarse en conjunto con el lenguaje de programación en entorno gráfico *Pure Data*, de Miller Puckette).

La palabra “Elementos”, que encabeza el título, testimonia que hemos tenido que realizar una ardua síntesis de un tema vastísimo y rico en sesgos teóricos y estéticos. Si este trabajo ayuda a los compositores a componer mejor música y a los teóricos a explorar mejor uno de los rasgos fundamentales de la música atonal, habremos cumplido con nuestro objetivo.

Pablo Cetta
Oscar Pablo Di Liscia

Buenos Aires, 30 de Noviembre, 2008

Capítulo I - Teoría de los conjuntos de grados cromáticos (PCS)

Grados Cromáticos o Clases de Alturas (*Pitch Classes*)

La teoría de la organización de la altura en la música atonal descansa en dos rasgos básicos de la música clásica occidental: el temperamento igual y la equivalencia de octava.

Cada una de las doce notas de la escala cromática temperada es considerada un *Pitch Class* (clase de altura¹, abreviada de ahora en adelante como PC) independientemente del registro en el que se manifieste. Así, por ejemplo, existe la PC *Do*, a la que pertenecen todos los *Do* posibles, la PC *La#* a la que pertenecen todos los *La#*, etc. También se asume la equivalencia por enarmonía, lo que significa que *Sib* y *La#* pertenecen a la misma PC, o son PC equivalentes².

Cada PC se representa con un entero, comenzando por el cero para la PC *Do* y terminando con el 11 para la PC *Si*. A los efectos de realizar una escritura de tablas y gráficos más ordenada, mucha de la literatura al respecto asume el uso de la letra “A” para la PC 10 y la letra “B” para la PC 11. De esta manera, se usa siempre un solo carácter para representar a cada PC.

El gráfico siguiente muestra la representación simbólica de la PC, su nombre “musical” y su representación en notación musical (esta última, reducida a la octava central).



Figura 1: las doce PC con su representación simbólica, nombre musical y gráfica musical (en la octava central)

Conjuntos de Grados Cromáticos o Conjuntos de Clases de Notas (*Pitch Class Sets*)

El número total de combinaciones³ posibles de las 12 PC tomadas de una en una, de dos en dos, de tres en tres, etc., es de $2^{12} = 4096$.

¹En idioma castellano no se usa corrientemente “clase de altura” como traducción de *Pitch Class*. Una posible equivalencia de esta expresión sería “grado cromático”.

²Los músicos no somos siempre conscientes de que, al nombrar un determinado grado cromático (por ejemplo, “Re”), estamos aludiendo a una Clase y que en esa alusión subyace el supuesto de la equivalencia de octava.

³Nótese que se trata de “combinaciones” y no de “variaciones”. Es decir, los cambios de orden de los elementos de un conjunto no se consideran relevantes. En este sentido 012, 210, 021, 201, 120 y 102 son equivalentes.

El número de combinaciones posibles para cada número de PC se calcula de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (1)$$

En donde n es el número de elementos del conjunto total (12, en este caso) y m es el número de elementos de la combinación.

Por ejemplo, el número de diferentes combinaciones de 3 elementos que se puede obtener de un conjunto de 12 elementos es:

$$\frac{12!}{3!(12-3)!} = 220 \quad (2)$$

En la literatura especializada (véase Forte, 1974) se denomina al número de elementos de un conjunto de PC como *número cardinal*. Asimismo, se incluye dentro de las combinaciones posibles al conjunto de cardinal 0, llamado *conjunto nulo* y, por supuesto, al conjunto de los doce PC llamado *Agregado*. La siguiente tabla muestra la cantidad de conjuntos posibles para cada número de elementos.

N	Combinaciones diferentes
0	1
1	12
2	66
3	220
4	495
5	792
6	924
7	792
8	495
9	220
10	66
11	12
12	1
TOTAL	4096

La teoría de la música atonal realiza una clasificación de los conjuntos que se listaron en *clases de conjuntos*, que se basa tanto en su número cardinal (cantidad de elementos distintos) como en su estructura. En este último sentido, considera como *equivalentes* (o, dicho de otra manera, pertenecientes a la misma Clase de Conjunto, abreviado de ahora en más como SC) a un grupo de aquellos conjuntos que se pueden reducir a uno solo de ellos por medio de las operaciones de transposición o inversión. Por ejemplo, los conjuntos {0, 1, 6}, {2, 3, 8} y {9, 8, 2} pertenecen todos a la misma Clase (3-5), porque el segundo es una transposición y el tercero es la inversión transpuesta del primero. Mas adelante se verán las operaciones de transposición e inversión de una manera más rigurosa, pero, por ahora, la siguiente figura con la notación musical de los conjuntos mencionados será suficiente para entender el concepto.



Figura 2: representación musical de los conjuntos de grados cromáticos {0, 1, 6}, {2, 3, 8} y {9, 8, 2}

Es así como se obtienen los Conjuntos de Grados Cromáticos (llamados *Pitch Class Sets* en la literatura especializada en idioma inglés, y a los que nos referiremos con la abreviatura PCS)⁴. Tomando el criterio de la equivalencia por transposición o inversión transpuesta, la cantidad total de SC distintas es de 224. Se indica para cada número cardinal en la siguiente tabla.

Cardinal	SC diferentes
0	1
1	1
2	6
3	12
4	29
5	38
6	50
7	38
8	29
9	12
10	6
11	1
12	1
TOTAL	224

Allen Forte (Forte, 1974) sistematiza la nomenclatura que habitualmente se usa en la Teoría Atonal para designar a cada una de las SC⁵. Utiliza dos números para definir una SC: su *número cardinal* (número de PC de una SC) y su *número ordinal* (este es un número de orden que se elige arbitrariamente para diferenciar distintas SC de igual número cardinal). Estos dos números, separados por un guión, designan una SC en particular. Por ejemplo, el PCS {1, 2, 7, 8} pertenece a la SC 4-9.

Las SC que se mencionaron se encuentran en el Apéndice I de este libro. La tabla contiene otros datos sobre las SC que se explicarán más adelante.

Forma Prima de un PCS

En general, los PCS se consideran no-ordenados, en el sentido que el cambio de orden de sus componentes no altera la SC a la que pertenecen. Sin embargo, con el objeto de representar a una SC en la tabla y realizar otras operaciones, se determina una versión especialmente ordenada de un PCS

⁴ Se atribuye a Milton Babbitt (Babbitt, 1961) el uso de esta denominación por primera vez.

⁵ De hecho, mucha de la literatura se refiere a esta denominación como el “*número Forte*”.

de esa clase. A esa versión ordenada se la denomina *forma prima* o *forma normal*⁶. El procedimiento para la obtención de la *forma prima* de un PCS es el siguiente:

1. Se ordena el PCS de mayor a menor.
2. Se realizan todas las permutaciones circulares. La sucesión debe ser siempre ascendente, por lo que se deberá sumar 12 a cada primer elemento que pase a ser el último en cada permutación.
3. Se determina el “orden normal”, de la manera que sigue: se selecciona la permutación circular que contenga el intervalo más pequeño entre su primer y último PC. Si ese intervalo es igual en todas las permutaciones, se escoge aquella que tenga el intervalo más pequeño entre el primero y segundo PC; si fueran iguales, entre el segundo y tercero, y así sucesivamente. Si los intervalos entre PC son iguales para todas las permutaciones circulares, entonces se elige cualquiera de ellas como orden normal.
4. Se traspone la permutación seleccionada de manera tal que su primer PC sea “0”. Si la diferencia entre el primer PC y el segundo PC es mayor que la diferencia entre el anteúltimo y el último se trata de un orden normal invertido, hay que retrogradar, invertir el PCS y volver a trasponerlo al nivel “0”.

Ejemplo con el PCS {8, 2, A, 1}

1 - Orden ascendente:

1 2 8 A

2 - Permutaciones circulares:

1 2 8 A
 2 8 A 13
 8 A 13 14
 A 13 14 20

3 - Determinación del orden normal. Valores absolutos de la resta del primero y último PC de cada permutación:

$|A - 1| = 9$
 $|13 - 2| = 11$
 $|14 - 8| = 6$ (menor diferencia)
 $|20 - A| = 10$

Orden normal:

8 A 13 14

4 - Transposición del orden normal al nivel “0” (restar 8 a cada entero):

0 2 5 6 (la diferencia entre 0 y 2 es mayor que la diferencia entre 5 y 6)

⁶ Esta última denominación se debe a Babbitt (1961).

retrogradar:	6 5 2 0
invertir:	6 7 A 0
transponer a nivel "0":	0 1 4 6 = Forma Prima

Si se busca este PCS en la Tabla del Apéndice I, se comprobará que pertenece a la SC 4-Z15. La "Z" en el nombre será explicada luego.

Como se comprenderá, el procedimiento que determina la forma prima debe ser realizado toda vez que se desee "identificar" (i.e., saber a qué SC pertenece) un PCS. Sobre todo cuando el PCS tiene entre 4 a 8 elementos, el procedimiento se vuelve tedioso y la cantidad de SC a las que un PCS puede pertenecer son más numerosas, por lo que es recomendable usar programas informáticos para tal fin⁷.

Operaciones de Transposición, Inversión y Multiplicación

En la sección anterior aludimos a las operaciones de transposición e inversión en la búsqueda de la forma prima de un PCS. Las trataremos ahora con más detalle.

La transposición de un PC a se define como la suma de un entero n módulo 12⁸.

$$T_n(a) = a + n \pmod{12} \quad (3)$$

Así, por ejemplo, $T_5 \{8, 2, A, 1\} = (13 - 12), 7, (15 - 12), 6 = \{1, 7, 3, 6\}$



Figura 3: Transposición T_5 de $\{8, 2, A, 1\}$

La inversión de un PC a se define como:

$$I(a) = 12 - a \pmod{12} \quad (4)$$

Así, por ejemplo, $I \{8, 2, A, 1\} = \{4, A, 2, B\}$

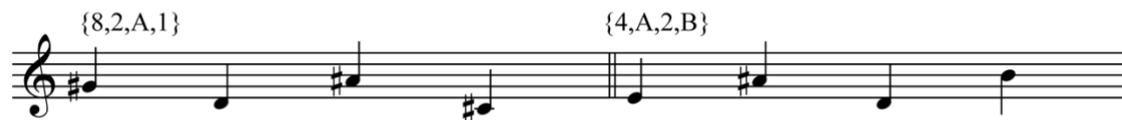


Figura 4: Inversión de $\{8, 2, A, 1\}$

⁷ Como ejemplo, en (Windsor y De Lisa, 1991) se encuentra el código de una función escrita en Lenguaje C que realiza el procedimiento mencionado. Véase también (Cetta y Di Liscia, 1991).

⁸ La equivalencia de octava es la que produce la estructura cíclica de los 12 PC.

Es importante observar que, mientras la transposición no implica necesariamente la inversión, la inversión implica siempre la transposición del PCS involucrado. En efecto, si tomamos los dos ejemplos anteriores:

{8, 2, A, 1}	pertenece a la SC 4-Z15 y es la IT ₂ de la forma prima.
T ₅ {8, 2, A, 1}	da el PCS {1,7,3,6} que es la IT ₇ de la forma prima.
I {8, 2, A, 1}	da el PCS {4,A,2,B} que es la T _A de la forma prima.

Por supuesto, la inversión seguida de transposición es posible, como son posibles varias operaciones sucesivas de transposición e inversión que se pueden reducir a operaciones más simples por medio de simplificaciones algebraicas.

El operador de multiplicación, llamado M, produce, en algunos casos, PCS de SC equivalentes a la original y en otros no.

La operación M se define como:

$$M_n(a) = a.n \pmod{12} \quad (5)$$

De lo expuesto se deduce que hay algunos valores de n que producen resultados triviales. Por ejemplo, $n = 1$ deja al PCS invariante (M_1 es un operador de identidad, tal como lo es T_0) y $n = 0$ ubica a todos los PC en la clase 0.

El siguiente ejemplo muestra que utilizar $n = 11$, es equivalente a invertir el PCS:

$$M_B\{0, A, 7, 6\} = 0, 110, 77, 66 = 4\text{-Z15}\{0, 2, 5, 6\} T_6 I$$

Y cuando $n = 2$, se ubica a los 12 PCS en una escala de tonos enteros.

En general, estas transformaciones no tienen mucho interés, por lo que los teóricos (Morris, 1987, pp 65-66) entienden que los valores “útiles” para n en el caso del operador M son 5 o 7. Estos valores ubican a los 12 PC ordenados en una escala cromática en un círculo de cuartas justas y en un círculo de quintas justas, respectivamente. Como M_7 es equivalente a $M_5 I$, la teoría atonal se refiere al operador M_5 directamente como M (Morris, op. cit.) y se usa únicamente M o MI. Asimismo, se verán en el capítulo II otras aplicaciones de los operadores M para la construcción de Matrices Combinatorias.

Son posibles también combinaciones de las operaciones de transposición, inversión y multiplicación, como $T_n M$ o $T_n M I$ ⁹.

Contenido interválico de los PCS

De lo expuesto en la sección que trata los PCS, se desprende que existen 6 SC de los PCS de cardinal 2. Esto es, por supuesto, porque se asume la equivalencia de transposición e inversión. Las SC de cardinal 2 no son otra cosa que lo que los músicos denominamos corrientemente “intervalos simples”, y son 6. Se detallan en la tabla siguiente con su nombre “musical”:

⁹ Llamados TTOs (*Twelve tone operators*) por Morris (Morris, 1987)

Nombre	Forma Prima	Denominación “musical”
2-1	[0,1]	Segunda menor
2-2	[0,2]	Segunda mayor
2-3	[0,3]	Tercera menor
2-4	[0,4]	Tercera mayor
2-5	[0,5]	Cuarta justa
2-6	[0,6]	Tritono

Dado un PCS de cardinal 2, no hace falta utilizar el complejo procedimiento de la forma prima para encontrar la SC a la que pertenece, basta con tener en cuenta la diferencia absoluta de los dos PC que lo integran. Por ejemplo, el PCS {4, 5} pertenece a la SC 2-1, dado que $4 - 5 = 1$; y el PCS {9, 1} pertenece a la SC 2-4, dado que $9 - 1 = 8$ e $I(8) = 12 - 8 = 4$.

Un indicador significativo de las particularidades de un PCS es la cantidad y clase de los subconjuntos de cardinal 2 que posee. En rigor, son las SC de los PCS de cardinal 2.

Por ejemplo, si tenemos en cuenta las combinaciones posibles de 2 elementos del PCS {4, 5, 8}, que pertenece a la SC 3-3, es posible encontrar tres subconjuntos:

- a) {4,5}
- b) {5,8}
- c) {8,4}

y como:

- a) $4-5 = 1$
- b) $5-8 = 3$
- c) $8-4 = 4$

se puede decir que los PCS de la SC 3-3 tienen un elemento de la SC 2-1, uno de la SC 2-3 y uno de la SC 2-4.

En los PCS de cardinal 3 es fácil derivar su contenido interválico por simple inspección visual, pero en PCS de más elementos, no resulta tan sencillo. Es por ello que Forte (Forte, 1974) diseñó el llamado Vector de Clases Interválicas (*ICV*₁₀). Se trata de un vector con 6 entradas que corresponden cada una de ellas a las 6 clases interválicas (las 6 SC de los PCS de cardinal 2) y en cada entrada se registra la cantidad de intervalos de la clase que corresponda. Por ejemplo, el ICV del PCS 3-3 que se analizó antes es [101100].

Las posiciones con valor cero indican la ausencia de una o más clases interválicas. En este caso, las clases 2, 5 y 6 (segunda mayor, cuarta justa y tritono) se encuentran ausentes en los PCS de la SC 3-3.

El ICV es un identificador muy útil del “potencial sonico” de una determinada SC tanto por las clases interválicas presentes, como por las ausentes y su cantidad. Al analizar los ICV de las diversas SC, se presentan casos de especial interés, que pueden agruparse en cuatro categorías.

¹⁰ Por *Interval Class Vector* (Forte, 1974)

1 - ICV idénticos en SC diferentes. Por ejemplo, las SC 5-Z17 y 5-Z37 no son equivalentes por transposición o inversión transpuesta pero, sin embargo, tienen un ICV idéntico:

5-Z17 [212320]
5-Z37 [212320]

Las SC con esta particularidad se marcan con una “Z” antepuesta a su número de orden. Existen, en el total de las SC posibles, 23 SC que tienen otras 23 SC correspondientes con ICV idéntico agrupada de a pares. Se denominan habitualmente “Pares Z”.

2 - SC de igual número cardinal que poseen ICV con varias entradas iguales. El caso límite y muy singular, lo constituyen las SC 4-Z15 y 4-Z29, cuyo ICV contiene un elemento de cada clase (en adición, son “Pares Z”):

4-Z15 [111111]
4-Z29 [111111]

Aparte de estos, no hay SC de cardinal superior a 3 con 5 entradas iguales, por lo que los SC con cuatro entradas iguales son especialmente relevantes¹¹. En los ejemplos siguientes, las entradas iguales están marcadas en negrita.

4-8 [2**00**121]
4-9 [2**00**022]

4-8 [2**00**121]
4-5 [2**10**111]

3 - La ausencia de una o varias clases interválicas. La relevancia de tal característica es mayor cuando el número cardinal del PCS es mayor que 4. A partir del cardinal 7, ya no hay SC con ausencia de clases interválicas. De las 50 SC de cardinal 6, sólo hay 6 que tienen valor cero en una o más entradas del ICV. Un ejemplo significativo lo constituye la SC 6-35 (la escala de tonos enteros).

6-35 [060603]

4 - La saturación de una o varias clases interválicas. Es la “contracara” de la ausencia de otras y, como tal, resulta más significativa en las SC con cardinal más bajo.

Complemento de los PCS

El complemento de un PCS es el PCS que se forma con los restantes PC no incluidos en él. El número cardinal del complemento es, entonces, igual a $12 - n$, siendo n el número cardinal del PCS. Los números ordinales de dos PCS complementarios son iguales. Por ejemplo, el PCS {1, 2, 7, 8, B} pertenece a la SC 5-19 y su complemento {0, 3, 4, 5, 6, 9, A}, pertenece a la SC 7-19.

La consideración de la relación de complementariedad no se limita a los PCS que no repiten PC, es decir, se extiende a las SC. Por esta razón, dado un PCS denominado A, se suele aludir al PCS \overline{A}

¹¹ Se ampliarán estas particularidades en la sección dedicada a las Relaciones de Similitud.

formado por todos los PC no incluidos en A como el *complemento literal* de A, pero cualquier PCS de la misma SC de \overline{A} también se considera el complemento de A. Veremos más adelante (al tratar los complejos K/Kh) que esta observación es significativa.

La relación de complementariedad es recíproca, esto es, la SC 3-4 es complementaria de la SC 9-4 y la SC 9-4 es complementaria de la SC 3-4.



Figura 5: Relaciones de complementariedad entre dos PCS

En las SC de cardinal 6, se produce una situación especial: el complemento de un PCS de cardinal 6, o bien es un miembro de su misma SC o bien es su “Par Z”.

Existe una clara relación entre los ICV de SC complementarias de número cardinal distinto de 6. Obsérvense los ICV de las parejas de SC complementarias que se listan debajo:

3-3	[101100]
9-3	[767763]
4-9	[200022]
8-9	[644464]
5-5	[321121]
7-5	[543342]

Se puede comprobar que, entre las entradas de los respectivos ICV de SC complementarias, existe una relación de $\pm |n - m|$, excepto para la entrada 6 (última), en donde la diferencia es $\pm \text{int}(|n - m| / 2)$.

Esto indica que una SC puede considerarse, desde el punto de vista de la interválica, como una “ampliación” de su complementaria de cardinal menor o un “resumen” de su complementaria de cardinal mayor.

Subconjuntos de PCS

Todo PCS contiene una cantidad de subconjuntos de PC, que son PCS de número cardinal menor al suyo. Esta situación se formaliza en la teoría de conjuntos con la relación de *inclusión*. Por ejemplo, el PCS [1, 2, 7, 8, B], que pertenece a la SC 5-19, contiene los siguientes subconjuntos de cardinal 4:

{1, 2, 7, 8}	4-9
{1, 2, 8, B}	4-13
{1, 7, 8, B}	4-Z15
{2, 7, 8, B}	4-18
{1, 2, 7, B}	4-Z29



Figura 6: subconjuntos del PCS $\{1, 2, 7, 8, B\}$. Se obtienen, en este caso, suprimiendo uno de los PC por vez.

De la misma manera que el ICV, la cantidad y SC de los subconjuntos de un PCS es una propiedad de la SC a la que pertenece.

En la sección que trata el ICV, se explicó que se puede considerar a éste como la indicación cuantitativa-cualitativa de las SC de los PCS que se forman con las combinaciones de dos en dos de los PC de un PCS.

De manera análoga, se podría calcular la cantidad y SC de los PCS de cardinal 3, 4, etc., que forman los PC que integran un PCS.

La ecuación (1) nos indica, por ejemplo, que un PCS de cardinal 5 tiene:

- 5 PCS de cardinal 1 (los 5 PC que lo integran)
- 10 PCS de cardinal 2 (los “intervalos simples” que contiene, listados en el ICV)
- 10 PCS de cardinal 3
- 5 PCS de cardinal 4

Siguiendo este criterio, también se podría establecer un Vector de SC de cardinal n para una SC dada. Como ejemplo, se listan abajo las SC a las que pertenecen los subconjuntos de cardinal 3 para cada una de las SC de cardinal 4 y el vector de las 12 SC de cardinal 3 asociado.

SC	Subconjuntos de n-1 de cardinal 3				Vector de subconjuntos
4-1	3-1	3-1	3-2	3-2	[220000000000]
4-2	3-1	3-2	3-3	3-6	[111001000000]
4-3	3-2	3-2	3-3	3-3	[022000000000]
4-4	3-1	3-3	3-4	3-7	[101100100000]
4-5	3-1	3-4	3-5	3-8	[100110010000]
4-6	3-1	3-5	3-5	3-9	[100020001000]
4-7	3-3	3-3	3-4	3-4	[002200000000]
4-8	3-4	3-4	3-5	3-5	[000220000000]
4-9	3-5	3-5	3-5	3-5	[000040000000]
4-10	3-2	3-2	3-7	3-7	[020000200000]
4-11	3-2	3-4	3-6	3-7	[010101100000]
4-12	3-2	3-3	3-8	3-10	[011000010100]
4-13	3-2	3-5	3-7	3-10	[010010100100]
4-14	3-2	3-4	3-9	3-11	[010100001010]
4-Z15	3-3	3-5	3-7	3-8	[001010110000]
4-16	3-4	3-5	3-8	3-9	[000110011000]
4-17	3-3	3-3	3-11	3-11	[002000000020]
4-18	3-3	3-5	3-10	3-11	[001010000110]
4-19	3-3	3-4	3-11	3-12	[001100000011]
4-20	3-4	3-4	3-11	3-11	[000200000020]
4-21	3-6	3-6	3-8	3-8	[000002020000]
4-22	3-6	3-7	3-9	3-11	[000001101010]
4-23	3-7	3-7	3-9	3-9	[000000202000]
4-24	3-6	3-8	3-8	3-12	[000001020001]
4-25	3-8	3-8	3-8	3-8	[000000040000]
4-26	3-7	3-7	3-11	3-11	[000000200020]
4-27	3-7	3-8	3-10	3-11	[000000110110]
4-28	3-10	3-10	3-10	3-10	[000000000400]
4-Z29	3-2	3-5	3-8	3-11	[010010010010]

De manera análoga a lo tratado en el ICV, se podrían establecer diversos grupos de las SC de cardinal 4 a partir de la ausencia, variedad o saturación de determinadas SC a las que pertenecen sus PCS de cardinal 3 incluidos. Obsérvese, por ejemplo, que la SC 4-9 sólo contiene PCS de cardinal 3 de la SC 3-5.

Otra observación importante a realizar para los subconjuntos o PCS incluidos en otro involucra la relación de complementación que ya se ha tratado. Se puede demostrar que, excepto en el caso de las SC de cardinal 6 que son pares Z, el complemento de mayor número cardinal de una SC contiene a la SC complementaria al menos una vez¹². Muchos de ellos lo contienen varias veces. Por ejemplo, el PCS {0, 1, 2, 5, 6, 7, 8} que pertenece a la SC 7-7, contiene 5 versiones de su complemento, el 5-7:

$$SC\ 7-7\ \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8\}$$

¹² Salvo en el caso excepcional del PCS 7-Z12, que no contiene ningún subconjunto de la clase 5-Z12.

PCS 5-7 incluidos:

- 5-7 {1, 2, 6, 7, 8}
- 5-7 {0, 1, 6, 7, 8}
- 5-7 {0, 1, 5, 6, 7}
- 5-7 {0, 1, 2, 7, 8}
- 5-7 {0, 1, 2, 6, 7}

Invariancia en los PCS

Se denomina subconjunto invariante al PCS que se integra con los PC en común entre varios PCS de la misma o distinta SC. La invariancia se formaliza en la teoría de conjuntos por medio de la relación de *intersección* y juega un papel crucial en la música no-tonal, ya que permite establecer distintas jerarquías y enfatizar la percepción de relaciones interválicas.

Por ejemplo, los dos PCS que se presentan a continuación pertenecen a la SC 7-19 y mantienen el subconjunto invariante 4-16 (los PC invariantes se destacan en negritas):

- 7-19 {**0,4,6,B**,1,7,A}
- 7-19 T₅{5,9,**B,4,6,0**,3}

Subconjunto invariante: 4-16 {**0,4,6,B**}



Figura 7: PCS invariante entre dos PCS. Los PC invariantes se marcan con blancas.

Existen PCS miembros de una SC que, al ser traspuestos a determinado intervalo o invertidos y traspuestos poseen la característica de *invariancia* total, es decir producen exactamente el mismo PCS ordenado de manera distinta. Esto causa que la cantidad de PCS de esa SC sea menor. El ejemplo más extremo y conocido por los músicos es la SC 4-28¹³, que se produce sólo con 3 PCS:

- 4-28 {0, 3, 6, 9} T₀
- 4-28 {1, 4, 7, A} T₁
- 4-28 {2, 5, 8, B} T₂

Cualquier otra transposición distinta de T₀, T₁, T₂ o inversión seguida de transposición repetirá los PC de alguno de estos tres PCS.

Existen casos, sin embargo, que no son tan obvios. Un ejemplo es la SC 6-7 que se produce con sólo 6 PCS, ya que sus transposiciones a partir de T₆ repiten las seis anteriores, y sus inversiones traspuestas repiten a sus transposiciones.

¹³ El llamado “acorde de séptima disminuida”.

Otro caso “célebre” en la música atonal es la SC 6-20¹⁴, cuyas transposiciones o inversiones transpuestas sólo producen 4 PCS distintos.

En general, la característica de la invariancia total bajo T o IT de una SC puede verse como una medida de sus simetrías internas.

La invariancia que no es total muchas veces tiene una gran importancia en el contexto musical, porque en una obra musical la disposición y el orden de los PC son significativos. Así, muchas veces un PCS invariante de cardinal 2 o aun un solo PC invariante adquieren una relevancia musical que va más allá de su número. El ICV de una SC es un indicador de la cantidad de PC invariantes que pueden obtenerse por transposición. Se presenta un ejemplo a continuación.

SC PCS ICV
5-7 {1, 2, 6, 7, 8} [310132]

PCS	T	ICV
{2,3,7,8,9}	T1	[310132]
{3,4,8,9,A}	T2	[310132]
{4,5,9,A,B}	T3	[310132]
{5,6,A,B,0}	T4	[310132]
{6,7,B,0,1}	T5	[310132]
{7,8,0,1,2}	T6	[310132]
{8,9,1,2,3}	T7	[310132]
{9,A,2,3,4}	T8	[310132]
{A,B,3,4,5}	T9	[310132]
{B,0,4,5,6}	TA	[310132]
{0,1,5,6,7}	TB	[310132]

Figura 8: invariantes que resultan de las 11 transposiciones diferentes de {1, 2, 6, 7, 8}. Los PC invariantes se marcan con blancas.

¹⁴ Entre otros autores, Anton Webern lo usa en los dos hexacordios de la serie de su *Concierto Op.24*.

Se puede observar en la primera columna de la tabla, los PCS resultantes de las transposiciones que se listan en la segunda columna. En negrita están destacados los PC invariantes que resultan de las transposiciones. La tercera columna muestra claramente la relación entre invariancia por transposición e ICV. Obsérvese que, excepto para T6, toda vez que el intervalo de transposición coincide con el orden de la entrada en el ICV (resaltado en negrita), la cantidad de invariantes que resulta de la transposición es igual que el valor de la entrada del ICV. Así las transposiciones T1 y TB dan como resultado tres PC invariantes y la primera entrada del ICV tiene el valor 3, las transposiciones T2 y TA dan como resultado un solo PC invariante y la segunda entrada del ICV tiene el valor 1, las transposiciones T3 y T9 dan como resultado ningún PC invariante y la tercera entrada del ICV tiene el valor 0, etc. El caso de T6 es especial, pero existe igualmente una relación entre cantidad de invariantes y valor de la entrada 6 del ICV. Puede observarse que la cantidad de invariantes es igual al doble de ese valor. En el ejemplo que se ha tratado, es esta transposición la que arroja el mayor número de invariantes (4).

El procedimiento para hallar la cantidad de PC invariantes entre un PCS y su inversión transpuesta es distinto y menos simple que el anterior. Se describe a continuación tal como aparece en (Rahn, 1980, pp 111-112) con algunas simplificaciones en su notación.

Definición 1: Sea $M(n)$ la “multiplicidad de la suma de pares de PC del PCS X ”¹⁵.

Por ejemplo, con el PCS $\{1, 2, 4, 5\}$ como X , $M(n)X$ resulta:

$$\begin{array}{lll} 1 + 2 = 3 & 1 + 4 = 5 & 1 + 5 = 6 \\ 2 + 4 = 6 & 2 + 5 = 7 & \\ 4 + 5 = 9 & & \end{array}$$

Y se muestra en el vector siguiente:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
-	-	-	1	-	1	2	1	-	1	-	-

Definición 2: Sea $Q(n)$ el número (cantidad) de PC en un PCS X , que se suman a sí mismos para hacer el índice n .

Por ejemplo, usando el PCS anterior ($\{1, 2, 4, 5\}$), $Q(n)X$ resulta:

$$1 + 1 = 2 \qquad 2 + 2 = 4 \qquad 4 + 4 = 8 \qquad 5 + 5 = 10$$

Y se muestra en el vector siguiente:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-

Teorema: el número de PC en común entre X y $TnI(X)$ es igual al doble de $M(n)X$ más $Q(n)X$.

Así, usando siempre el PCS del ejemplo anterior:

¹⁵ Al resultado de la suma se le debe aplicar, naturalmente, módulo 12.

$M(n)$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
-	-	-	1	-	1	2	1	-	1	-	-

$M(n) * 2$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
-	-	-	2	-	2	4	2	-	2	-	-

$Q(n)$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-

$M(n) * 2 + Q(n)$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
-	-	1	2	1	2	4	2	1	2	1	-

Lo que permite demostrar que, aplicando al PCS X T_{0I} , T_{1I} y T_{BI} se obtienen PCS sin PC en común con X ; aplicando T_{2I} , T_{4I} , T_{8I} y T_{AI} , se obtienen PCS con un PC en común; aplicando T_{3I} , T_{5I} , T_{7I} , y T_{9I} , se obtienen PCS con dos PC en común y, finalmente, aplicando T_{6I} , se obtienen cuatro PC en común, es decir, el PCS es invariante por T_{6I} . A continuación, una tabla con las doce inversiones transpuestas del PCS del ejemplo, en la que se marcan en negrita los PC invariantes.

{1,2,4,5}	Original
{B,A,8,7}	T_{0I}
{0,B,9,8}	T_{1I}
{1,0,A,9}	T_{2I}
{2,1,B,A}	T_{3I}
{3,2,0,B}	T_{4I}
{4,3,1,0}	T_{5I}
{5,4,2,1}	T_{6I}
{6,5,3,2}	T_{7I}
{7,6,4,3}	T_{8I}
{8,7,5,4}	T_{9I}
{9,8,6,5}	T_{AI}
{A,9,7,6}	T_{BI}

Figura 9: invariantes que resultan de las 11 diferentes inversiones transpuestas de {1, 2, 4, 5}. Los PC invariantes se marcan con blancas.

Con esta información, se pueden construir vectores de doce posiciones en donde se almacene la información de los así llamados por Rahn TICS (*TI common-tone structure*, Rahn, 1980) para cada SC.

Finalmente, debe observarse que la ausencia de PC invariantes como resultado de una operación de transposición, o de inversión transpuesta es también significativa, por cuanto permite la disposición de un PCS en el total cromático. La teoría de los PCS define a esta propiedad como la “ubicación en el complemento”¹⁶ porque, efectivamente, si el PCS que resulta de la operación no tiene invariantes con su origen, debe estar contenido en su complemento.

Tabla de las SC

Ahora que ya se han desarrollado las nociones básicas de la teoría atonal, podemos examinar la tabla de todas las Clases de Conjuntos (SC) de PC (Grados cromáticos), tal como se publica en el trabajo de Robert Morris (Morris, 1987). La tabla inicial que figura en el Apéndice I de (Forte, 1974), fue posteriormente ampliada por John Rahn (Rahn, 1980). Las 224 SC son listadas en cada fila, con 7 tipos de datos para cada una de ellas en las respectivas columnas.

¹⁶ *Complement mapping* en inglés.

Se presentan y explican a continuación los tipos de datos para cada columna.

1	2	3	4	5	6	7
Name	prime form	M/MI	Z	ICV	Invariance Vector	CINT ₁

1. Nombre: el nombre de la SC, con su número cardinal (cantidad de PC distintos) y ordinal separados por un guión.
2. La *forma prima*, o *forma normal* del PCS.
3. El número ordinal de una SC de igual número cardinal que se relaciona con esta SC por T_nM o T_nMI . Por ejemplo, la tercera columna del 3-1 tiene el valor 9, lo que indica de si un PCS A pertenece a la SC 3-1, entonces $T_nMI(A) = B$ y B pertenece a la SC 3-9.
4. Esta entrada indica si la SC tiene otra asociada por la relación Z (ICV idéntico). Si la entrada está vacía, la SC no tiene la propiedad Z, si tiene un número, este corresponde al número ordinal del par Z de la SC.
5. El ICV o Vector de Clases Interválicas. En este caso, el ICV tiene siete entradas (a diferencia del indicado por Forte, 1974). La primera entrada contiene el número de clases interválica de tamaño "0" (y, por consiguiente, reproduce el número cardinal de la SC). Las siguientes seis son las que ya se explicaron.
6. El Vector de Invariancia. Tiene ocho entradas. Las cuatro primeras indican respectivamente la cantidad de invariancias totales que se obtienen cuando un PCS de esa SC es sometido a T_n , IT_n , T_nM o T_nMI , respectivamente. La primera de ellas siempre tiene un "1", que indica la obvia invariancia bajo T_0 . Las cuatro siguientes entradas indican la cantidad de veces que un PCS de esa SC puede ubicarse en su complemento (por consiguiente, "variancia total") cuando es sometido a T_n , IT_n , T_nM o T_nMI , respectivamente. Dividiendo 24 por la suma de las dos primeras entradas, se obtiene la cantidad de PCS distintos de esa SC que se pueden obtener. Por ejemplo, el Vector de Invariancia de la SC 3-12 es <33339999> y la cantidad de PCS distintos de la SC 3-12 posibles es $24 / (3 + 3) = 4$. El grado de simetría de una SC se calcula sumando los valores de las cuatro primeras entradas.
7. CINT₁ es el "vector cíclico de intervalos adyacentes", según se define en (Chrisman, 1977). Este consiste en los enteros resultantes de la diferencia absoluta (módulo 12) entre los PC adyacentes de la forma prima de un PCS. Por ejemplo, la forma prima del PCS 3-1 es {0, 1, 2} y su CINT₁ es: (0-1), (1-2), (2-12) = <1, 1, 10> = <1, 1, A>. La cantidad de posiciones de un CINT₁ es igual al número cardinal del PCS al que pertenece. Como se demuestra en el trabajo citado, los CINT₁ son útiles para determinar ciertas propiedades estructurales de las SC, como ser su invariancia bajo T_n o T_nI .

Relaciones de Similitud entre SC y PCS

Como es lógico suponer, las relaciones de equivalencia por transposición/inversión y las de inclusión no son suficientes para explicar la combinación de PCS en una composición musical, y confinar los recursos de una obra a estas relaciones produce, generalmente, resultados limitados. Por ello, los teóricos dedicados a la música atonal han desarrollado diversas maneras de medir y utilizar las variadas similitudes que pueden existir entre SC y PCS.

En principio, debe trazarse claramente la distinción entre similitudes estructurales, que son propias de las SC y existen en abstracto, y aquellas relaciones propias de los PCS que, si bien posibilitadas por su estructura, son puestas de manifiesto en una versión específica (T_n , IT_n) de los PCS y su distribución. En este último sentido, la similitud “percibida” entre dos PCS que estructuralmente son poco parecidos puede ser tan o más fuerte que la similitud percibida entre otros dos que son muy similares estructuralmente, si se destacan especialmente los escasos rasgos de similitud en los primeros a la vez que se destacan los rasgos estructurales distintivos en estos últimos en un contexto musical determinado. Sin embargo es más lógico, por supuesto, trabajar con los rasgos estructurales para luego ponerlos de manifiesto por medio de otras organizaciones.

Forte (Forte, 1974), establece cuatro tipos de relaciones de similitud entre las SC de igual número cardinal. La primera se refiere a los subconjuntos en común, mientras que las otras tres se relacionan con el ICV:

1 - La relación R_p : es la que se produce cuando las SC comparadas tienen, al menos, un sub-conjunto de cardinal $n-1$ (siendo n el cardinal de las SC comparadas) de la misma SC. La relación puede manifestarse fuertemente (cuando el subconjunto en común mantiene, además, los mismos PC, o sea es la intersección entre los dos PCS) o débilmente (cuando el subconjunto en común no está formado por PC comunes). Por ejemplo:

- a) 4-Z15 {0,1,4,6}
Subconjuntos de $n - 1$ (cardinal 3) de {0, 1, 4, 6}
3-3 {0, 1, 4} 3-5 {0, 1, 6} 3-7 {1, 4, 6} 3-8 {0, 4, 6}
- 4-Z29 {1, 0, A, 6}
Subconjuntos de $n - 1$ (cardinal 3) de {1, 0, A, 6}
3-2 {0, 1, A} 3-5 {0, 1, 6} 3-8 {0, A, 6} 3-11 {1, A, 6}
- Subconjuntos de SC iguales entre {0, 1, 4, 6} y {1, 0, A, 6}:
3-5 {0, 1, 6} 3-8 {0, 4, 6}
3-5 {0, 1, 6} 3-8 {0, A, 6}
- 3-5 {0, 1, 6} subconjunto con PC en común (invariante)
- b) 4-Z15 {0, 1, 4, 6}
Subconjuntos de $n - 1$ (cardinal 3) de {0, 1, 4, 6}
3-3 {0, 1, 4} 3-5 {0, 1, 6} 3-7 {1, 4, 6} 3-8 {0, 4, 6}
- 4-Z29 {A, 9, 7, 3}
Subconjuntos de $n - 1$ (cardinal 3) de {A, 9, 7, 3}
3-2 {A, 9, 7} 3-5 {A, 9, 3} 3-8 {9, 7, 3} 3-11 {A, 7, 3}

Subconjuntos de SC iguales entre {0, 1, 4, 6} y {1, 0, A, 6}:

3-5 {0, 1, 6} 3-8 {0, 4, 6}

3-5 {A, 9, 3} 3-8 {9, 7, 3}

Las SC 4-Z15 y 4-Z29 poseen dos subconjuntos de la misma SC en común: el 3-5 y el 3-8. Están, entonces, en relación R_p . En el ejemplo a) la relación se manifiesta *fuertemente*, porque los dos PCS que se eligen para comparar mantienen un subconjunto en común de cardinal $n - 1$ {0, 1, 6}, perteneciente a la SC 3-5, pero en el ejemplo b) la relación se manifiesta *débilmente*, o de manera abstracta, porque ambos PCS no tienen PC en común.

2 - La relación R_0 : en realidad esta relación designa máximo contraste, dado que se cumple cuando no existe una sola entrada coincidente en los ICV de las SC que se comparan. Cuanto más bajo es el número cardinal, más significativa resulta. Por ejemplo:

SC 4-Z15	ICV [111111]
SC 4-9	ICV [200022]

Los ICV de las SC 4-Z15 y 4-9 no tienen ninguna entrada igual.

3 - La relación R_2 : como ya se mencionó, no existen SC de cardinal mayor que 3 que posean 5 entradas de su ICV idénticas. Por lo tanto, la mayor coincidencia que puede encontrarse, es de cuatro entradas. Por ejemplo (las entradas iguales están subrayadas):

SC 4-8	ICV [<u>200</u> 121]
SC 4-9	ICV [<u>200</u> 022]

4 - La relación R_1 : esta relación es como la anterior, pero agrega que las dos entradas no coincidentes tienen valores que están intercambiados. Por ejemplo (las entradas iguales están subrayadas, las intercambiadas, se destacan con negrita):

SC 4-2	ICV [<u>22</u> 1 100]
SC 4-3	ICV [<u>212100]</u>

Debe mencionarse que las cuatro relaciones ya tratadas requieren especiales refinamientos y consideraciones para su aplicación en el análisis y composición. Entre estos refinamientos se cuentan la combinación de ellas (que aumenta la relación de similitud, cuando ninguna es R_0), la posibilidad de realizar “grupos transitivos”(en los que una relación se mantiene para todas las SC que integran el grupo) y la singularidad de la relación para las SC de un determinado número cardinal.

Como ejemplo de la combinación de relaciones se exponen, en la tabla siguiente, las relaciones combinadas que surgen a partir de comparar la SC 4-20 con todas las demás SC de cardinal 4. Las SC que aparecen en la primera columna están en relación R_p con la SC 4-20, pero si se observan las columnas siguientes, sólo aquellas marcadas con asterisco están, además, en las relaciones que indica el comienzo de cada columna.

Nombre	r _p	r ₀	r ₁	r ₂
4-4	*			
4-5	*	*		
4-7	*		*	
4-8	*			
4-11	*			
4-14	*			*
4-16	*			
4-17	*		*	
4-18	*			
4-19	*			*
4-22	*			
4-26	*			
4-27	*	*		
4-29	*			

Es posible también extender el concepto de la relación R_p a subconjuntos de una cardinalidad distinta de la de las SC que se comparan menos 1, y aun a todas ellas.

Robert Morris (Morris, 1980) propone una medida de la similitud estructural de SC a partir de sus ICV que llama Índice de Similitud¹⁷. El Índice de Similitud (abreviado como SIM en el trabajo de Morris) tiene la ventaja de que, a diferencia de las relaciones propuestas por Forte (Forte, 1974), se puede aplicar a SC de distinta cardinalidad. La formalización es como sigue:

Sean A y B dos SC y a y b sus dos ICV.

$$SIM(A, B) = \sum_{n=1}^6 |a[n] - b[n]| \quad (6)$$

Si $SIM(A, B) = 0$, entonces se trata de la misma SC o de SC en relación Z. El mínimo valor para SIM es equivalente a $|\#V(A) - \#V(B)|$ (máxima similitud) y el máximo $\#V(A) + \#V(B)$ (mínima similitud), en donde $\#V(A)$ es la suma de todas las entradas del ICV de la SC de A¹⁸. Morris, desarrolla ocho propiedades de esta relación que imponen refinamientos y restricciones para su consideración. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} A &= \text{SC 5-Z17} & \text{ICV [212320]} \\ B &= \text{SC 6-20} & \text{ICV [303630]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SIM(A, B) &= |2 - 3| + |1 - 0| + |2 - 3| + |3 - 6| + |2 - 3| + |0 - 0| \\ &= 1 + 1 + 1 + 3 + 1 + 0 \\ &= 7 \end{aligned}$$

¹⁷ *Similarity Index*, véase Morris, 1980

¹⁸ Existe, también, una manera propuesta por Morris para “normalizar” los valores máximos y mínimos de manera tal de que sean independientes de la cardinalidad de las SC que se comparan. Tal función se llama ASIM.

Y los máximos y mínimos valores posibles para $SIM(A, B)$, en este caso son:

$$\begin{aligned} \text{MAX} &= 10 + 15 = 15 && \text{(Mínima similitud)} \\ \text{MIN} &= |10-15| = 5 && \text{(Máxima similitud)} \end{aligned}$$

Eric Isaacson (Isaacson, 1990) realiza un análisis de las diversas funciones de similitud propuestas por Forte y Morris, además de otros autores¹⁹ y afirma que ninguna de ellas satisface completamente las siguientes tres condiciones:

1. Proveer un valor distintivo para cada par de SC a comparar.
2. Ser utilizable para SC de cualquier cardinalidad.
3. Proveer un rango amplio de valores discretos.

En consecuencia, propone la función $IcvSIM$, que satisface las tres condiciones y se define de la manera siguiente:

$$IcvSIM(X, Y) = \sigma(IdV) \quad (7)$$

Donde el IdV (vector de diferencias interválicas) es:

$$IdV = [(y_1 - x_1) (y_2 - x_2) \dots (y_6 - x_6)]$$

X e Y son ICV y σ representa la *función de desviación estándar*, que definida en términos del IdV es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (IdV_i - \overline{IdV})^2}{6}} \quad (8)$$

Donde IdV_i es el *iésimo* término del IdV e \overline{IdV} es el promedio de los términos en el IdV .

Ejemplo, usando las SC 6-35 y 8-28:

$$\begin{aligned} \text{6-35 ICV} &= [0 \ 6 \ 0 \ 6 \ 0 \ 3] \\ \text{8-28 ICV} &= [4 \ 4 \ 8 \ 4 \ 4 \ 4] \\ \text{IdV} &= [-4 \ 2 \ -8 \ 2 \ -4 \ -1] \end{aligned}$$

$$\overline{IdV} = (-4 + 2 - 8 + 2 - 4 - 1) / 6 \approx -2.16666\dots$$

$$\begin{aligned} \sigma \approx & \left(((-4 - 2.167)^2 + (2 - 2.167)^2 + (-8 - 2.167)^2 + (2 - 2.167)^2 + \right. \\ & \left. + (-4 - 2.167)^2 + (-1 - 2.167)^2) / 6 \right)^{0.5} \approx 3.5785 \end{aligned}$$

Al usar esta función, el máximo valor posible para la comparación de cualquier SC es aproximadamente²⁰ de 3.58. Este valor máximo indica mínima similitud posible y surge, en este caso, de la comparación $IcvSIM$ de los ICV de las SC 6-35 y 8-28. Se observa, también, que esta función permite obtener valores cero (máxima similitud) para SC de distinta cardinalidad, como ocurre si se

¹⁹ Teitelbaum, Lewin, Rahn y Lord.

²⁰ El número exacto dependerá, por supuesto, de la cantidad de decimales usados en el cálculo, pero el autor no usa más que tres de ellos.

la aplica a la comparación de los ICV de las SC 3-10 y 6-30. *A posteriori*, Isaacson desarrolló cuatro tipos de similitudes más, que surgen de distintos escalamientos de la misma función propuesta.

Para graficar de manera concisa las similitudes que existen entre un grupo de SC o de PCS a partir de las relaciones de similitud ya explicadas, es usual construir matrices. Por ejemplo, usando las SC 3-12, 4-19, 4-28 y 6-33 y el criterio IcvSIM (Isaacson, 1990).

4-19	0.5		
4-28	2.14	2.00	
6-33	1.83	1.71	2.06
	3-12	4-19	4-28

Para encontrar el IcvSIM entre dos de las 4 SC comparadas, se busca la intersección de la fila de una con la columna de otra o viceversa. Por ejemplo, el IcvSIM entre 4-28 y 4-19 es de 2.00 y se encuentra en la intersección de la fila (2) y la columna (1).

Otro enfoque de interés que involucra las relaciones de similitud entre SC consiste en la ponderación de determinadas cualidades aurales implícitas en la estructura de un PCS, como su tendencia hacia la consonancia o hacia la disonancia. Sería posible establecer, entonces, determinadas sucesiones de PCS desde o hacia regiones más consonantes o disonantes en una composición musical (Cetta, 2003).

Complejos de sets: Relaciones K/Kh.

Allen Forte (Forte, 1974) desarrolla por primera vez el concepto de *Complejos de Sets*. Los Complejos de Sets de Forte agrupan a SC en base a relaciones de inclusión y complementariedad. Forte define dos tipos de relaciones, que se denominan K y Kh.

La relación K se define como sigue:

Definición preliminar: dado un PCS X , su complemento se designa como \overline{X}

Dados dos PCS, S y T , se dice que están en relación K si:

$$S \supseteq T \parallel S \supseteq \overline{T}$$

Que significa: si la SC de S contiene o está contenida (\supseteq) en la SC de T o en la de su complemento (indicado como \overline{T})²¹.

$$S \in K(T)$$

²¹ En realidad, la literatura original al respecto (Forte, 1974) se refiere a PCS y no a sus SC. Aquí se considera que es más apropiado designar la relación abstracta de inclusión de las SC, dado que no es necesario que los PCS en cuestión estén en la relación de inclusión, sino sus SC den lugar a que estén incluidos. Por consiguiente, se trata de relaciones entre SC y no entre PCS. Sin embargo, otros autores (Morris, 1987, pp 98-103) prefieren designar dos tipos de relaciones que denominan *abstractas* (entre SC) y *literales* (entre PCS).

Significa entonces que S es un miembro del complejo acerca de K .

Existen dos condiciones preliminares para que esta relación se considere válida:

1. Los números cardinales de S y T no deben ser menores que 3 ni mayores que 9.
2. El número cardinal de S debe ser diferente del de T y diferente del de \overline{T} . Se excluyen así las relaciones K de PCS de cardinalidad 6 entre ellos.

Ejemplos:

$$7-3 / 5-3 \in K(8-18, 4-18) \text{ si } 7-3 \supseteq 8-18 \parallel 7-3 \supseteq 4-18$$

Significa: 4-8 pertenece al complejo K acerca de 5/8.

Para comprobar si esto es así, primero vemos si se cumple la condición de que 7-3 contenga o esté contenido en 8-18:

$$7-3 \supseteq 8-18 \quad (?)$$

Como puede comprobarse al examinar las SC de los ocho subconjuntos de cardinal 7 que están incluidos en 8-18, la SC 7-3 no está contenida en, ni puede contener a 8-18.

SC de cardinal 7 contenidas en 8-18:

$$7-16 \quad 7-Z18 \quad 7-19 \quad 7-22 \quad 7-31 \quad 7-32 \quad 7-Z36 \quad 7-Z38$$

Se debe intentar comprobar, entonces, si la segunda condición se cumple:

$$7-3 \supseteq 4-18 \quad (?)$$

La lista de SC de cardinal 4 incluidas en 7-3 es la siguiente:

SC de cardinal 4 contenidas en 7-3:

4-1(3)	4-2(4)	4-3(2)	4-4(3)	4-5(2)	4-6(1)	4-7(1)
4-10(1)	4-11(2)	4-12(1)	4-13(1)	4-14(2)	4-17(1)	<u>4-18(1)</u>
4-19(3)	4-20(1)	4-22(1)	4-24(1)	4-26(1)	4-27(1)	4-29(2)

Puede verse en esta lista que es posible encontrar al menos un PCS de la SC 4-18 (subrayado en la fila 2, columna 7 de la tabla) incluido en un PCS de la SC 7-3. De manera similar, puede comprobarse que es posible encontrar al menos un PCS de la SC 5-3 incluido en un PCS de la SC 8-18.

Por lo tanto, $7-3/5-3 \in K(8-18, 4-18)$.

El mismo ejemplo se ilustra ahora con dos PCS pertenecientes a las SC mencionadas.

8-18{0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9} y 7-3 {0, 1, 2, 3, 4, 5, 8}

4-18{1, 2, 5, 8} está incluido en 7-3{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8}

5-3{1, 2, 3, 5, 6} está incluido en 8-18{0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9}

En estos ejemplos se ha tomado la así llamada *inclusión literal*²², pero esto no es rigurosamente necesario para que la relación se cumpla.

Figura 10: ilustración de la relación $7-3/5-3 \in K(8-18, 4-18)$ entre $8-18\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ y $7-3\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8\}$.

En resumen y, como ya se ha demostrado que toda SC de cardinal mayor a su SC complementaria contiene al menos una vez a un PCS que pertenece a la SC de esta última, se cumplen a través de la relación K, cuatro relaciones de inclusión de SC en el ejemplo anterior:

4-18 \subset 8-18
 5-3 \subset 7-3
 4-18 \subset 7-3
 5-3 \subset 8-18

²² Se refiere a la inclusión de los pc, que presupone a la de la SC a la que pertenecen, pero no así al revés. Véase la nota anterior.

Sin embargo, también se demostró que:

$$7-3 \not\subset 8-18$$

Además se observa que, en muchos casos, la relación K produce complejos de un gran tamaño, lo que hace dudar de su significación: Sobre todo en los que involucran a las SC de cardinalidad 3. Por ejemplo K(3-1) incluye a 94 SC. Por ello, Forte diseñó también la llamada relación Kh, que se define como sigue:

$$S / \bar{S} \in Kh(T, \bar{T})$$

Que significa que *S* y su complemento pertenecen al subcomplejo Kh de *T* y su complemento.

Esta relación se cumple si:

$$S \supset \subset T \& \& S \supset \subset \bar{T}$$

La relación Kh se diferencia de la K por el signo && (el “y” lógico) que reemplaza al || (el “o” lógico) en esta última. Esto es lo que se denomina la relación recíproca de complementos. Por ejemplo, para que se cumpla la relación Kh entre 3-1 / 9-1 y 8-1 / 4-1, las siguientes condiciones deben ser verdaderas:

$$\begin{array}{l} 3-1 \subset 8-1 \\ 3-1 \subset 4-1 \\ 8-1 \subset 9-1 \\ 4-1 \subset 9-1 \end{array}$$

Y, como también:

$$\begin{array}{l} 3-1 \subset 9-1 \\ 4-1 \subset 8-1 \end{array}$$

La relación Kh involucra seis relaciones de inclusión.

En el caso del ejemplo anterior se cumple que:

$$3-1/9-1 \in Kh(4-1, 8-1)$$

Al set de la SC 4-1 se lo denomina *Set Nexo*.

Por medio de las relaciones Kh, Forte construye *Complejos de Conjuntos* que son grupos de SC relacionadas por esta relación que se ordena en torno al *set nexa*. Por ejemplo, si se usa como set nexa a la SC 4-7, surge el complejo Kh con los miembros que se listan a continuación.

Set Nexo: 4-7

Miembros del complejo Kh en torno a 4-7:

3-3, 3-4

5-3, 5-6, 5-Z18, 5-21

6-1, 6-5, 6-14, 6-15, 6-16, 6-Z19/6-Z44, 6-20, 6-31

En el Apéndice II de este libro se pueden encontrar los Complejos Kh para cada SC de cardinal 4, 5 y 6. La SC de cada set nexa aparece encabezando la lista y, luego de esta, aparecen las SC que pertenecen al complejo Kh para cada número cardinal. El número entre paréntesis indica la cantidad de SC que integran el Complejo Kh (los miembros del complejo). Por ejemplo, la siguiente lista, extraída del Apéndice II:

6-9 (30)

3. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 11

4. 1 2 4 5 6 10 11 14 15 16 21 22 23 29

5. 2 5 9 14 23 24

Muestra las 30 SC que integran el Complejo Kh en torno a la SC 6-9. De estas, hay 10 de cardinal 3 (3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 3-7, 3-8, 3-9 y 3-11), 14 de cardinal 4 (4-1, 4-2, 4-4, 4-5, 4-6, 4-10, 4-11, 4-14, 4-15, 4-16, 4-21, 4-22, 4-23 y 4-29) y 6 de cardinal 5 (5-2, 5-5, 5-9, 5-14, 5-23 y 5-24).

Particiones de los PCS

Se ha mencionado al comienzo de este capítulo que los PCS se consideran no-ordenados en el sentido en que cualquier permutación de sus PC produce el mismo PCS. Sin embargo, es evidente que en la música se presentan con un orden determinado y que este tiene relevancia estructural para una composición.

Las diferentes posibilidades de distribución de un PCS son propias de la SC a la que pertenece y permiten poner de manifiesto o no determinadas características interválicas y de los subconjuntos que posee.

Una de las formas de tratar el potencial de distribución de los PC de un PCS se denomina Partición Binaria. Esta consiste en obtener todas las posibilidades de ordenamiento de los sub-conjuntos de un PCS de manera complementaria. Es decir, cada partición deberá estar integrada por dos PCS, siendo la suma de sus números cardinales igual al número cardinal del PCS que se desea particionar y sin ningún PC repetido entre cada uno de ellos. Un PCS de cardinal 5 se puede particionar en dos PCS de cardinal 4 y 1 o en dos PCS de cardinal 3 y 2. Un PCS de cardinal 4 se puede particionar en dos PCS de cardinal 3 y 1 o en dos PCS de cardinal 2. Y así sucesivamente. Por ejemplo, los cuatro PC del PCS {0, 1, 4, 6}, de la SC 4-Z15, se pueden particionar de las maneras siguientes:

Particiones binarias del PCS {0, 1, 4, 6}	
SC 3-3{0,1,4}	SC 1-1{6}
SC 3-5{0,1,6}	SC 1-1{4}
SC 3-8{0,4,6}	SC 1-1{1}
SC 3-7{1,4,6}	SC 1-1{0}
SC 2-1{0,1}	SC 2-2{4,6}
SC 2-4{0,4}	SC 2-5{1,6}
SC 2-4{0,4}	SC 2-3{1,4}

Obsérvese que en este caso, mientras el orden de los PC dentro de cada PCS de cada una de las particiones es irrelevante, no lo es a los efectos de realizar la partición y que, además, el orden de los PCS integrantes de cada partición es también indistinto, por lo que en el listado se suprimen las repeticiones. Quiere decir que la partición:

$$SC\ 3-7\ \{1, 4, 6\} \quad SC\ 1-1\ \{0\}$$

Es equivalente, en este nivel de tratamiento, a:

$$SC\ 1-1\ \{0\} \quad SC\ 3-7\ \{1,4,6\}$$

Y también a todas estas:

$$\begin{array}{ll} SC\ 1-1\ \{0\} & SC\ 3-7\ \{1,6,4\} \\ SC\ 1-1\ \{0\} & SC\ 3-7\ \{6,4,1\} \\ SC\ 1-1\ \{0\} & SC\ 3-7\ \{6,1,4\} \\ SC\ 1-1\ \{0\} & SC\ 3-7\ \{4,1,6\} \\ SC\ 1-1\ \{0\} & SC\ 3-7\ \{4,6,1\} \end{array}$$

Las particiones binarias permiten, por ejemplo, distribuir los subconjuntos de un PCS en el total cromático. Esto es especialmente útil en la construcción de series dodecafónicas organizadas en hexacordios. Tómense, por ejemplo, todas las particiones binarias de PCS de cardinal 3 del PCS {0, 1, 4, 5, 8, 9}, perteneciente a la SC 6-20:

$$\begin{array}{llll} SC\ 3 - 3 & \{0,1,4\} & SC\ 3 - 3 & \{5,8,9\} \\ SC\ 3 - 4 & \{0,1,5\} & SC\ 3 - 4 & \{4,8,9\} \\ SC\ 3 - 4 & \{0,1,8\} & SC\ 3 - 4 & \{4,5,9\} \\ SC\ 3 - 3 & \{0,1,9\} & SC\ 3 - 3 & \{4,5,8\} \\ SC\ 3 - 4 & \{0,4,5\} & SC\ 3 - 4 & \{1,8,9\} \\ SC\ 3 - 12 & \{0,4,8\} & SC\ 3 - 12 & \{1,5,9\} \\ SC\ 3 - 11 & \{0,4,9\} & SC\ 3 - 11 & \{1,5,8\} \\ SC\ 3 - 11 & \{0,5,8\} & SC\ 3 - 11 & \{1,4,9\} \\ SC\ 3 - 11 & \{0,5,9\} & SC\ 3 - 11 & \{1,4,8\} \end{array}$$

Como puede observarse, SC 6-20 tiene una propiedad muy especial que consiste en que sus particiones binarias repiten todas la misma SC. De esta manera, es evidente que se pueden distribuir en el total cromático de forma sucesiva PCS de las SC 3-3, 3-4, 3-11 o 3-12. Por ejemplo, tomando la partición que está en primer lugar:

SC 3 - 3 {0, 1, 4} SC 3 - 3 {5, 8, 9}

Y la que surge de su complemento literal:

SC 3 - 3 {2, 3, 6} SC 3 - 3 {7, A, B}

Obtenemos los cuatro tricordios:

{0, 1, 4} {5, 8, 9} {2, 3, 6} {7, A, B}

Que pertenecen a la SC 3-3 y cubren el total cromático. Si los alternamos en sucesión sin repetir ninguno de ellos, logramos tanto la distribución de un PCS en el total cromático o, lo que es lo mismo, una serie dodecafónica con una gran homogeneidad en su contenido interválico.

De manera similar, usando PCS de cardinal 4, tomemos uno perteneciente a la SC 4-9:

SC 4-9{0,1,6,7}

Y su complemento literal:

SC 8-9 {2, 3, 4, 5, 8, 9, A, B}

El problema de distribuir este PCS en el total cromático se reduce a encontrar una partición binaria de su complemento literal, tal que cada uno de los dos PCS integrantes de la partición pertenezcan ambos a la SC 4-9. Y, efectivamente, la partición siguiente:

SC 4-9 {4, 5, A, B} SC 4-9 {2, 3, 8, 9}

Cumple con las condiciones deseadas y genera junto con el PCS 4-9 anterior, los siguientes tres PCS pertenecientes a la SC 4-9 que no tienen PC en común:

{0, 1, 6, 7} {4, 5, A, B} {2, 3, 8, 9}

La distribución interna de los PC de cada PCS sigue, en los dos ejemplos, el mismo esquema y, por lo tanto, no es muy interesante desde un punto de vista musical. Pero como el orden de los PC puede alterarse dentro de cada PCS, se pueden encontrar muchas permutaciones que produzcan resultados útiles.



Figura 11: Notación musical de la distribución de la SC 4-9 en el total cromático.

En el capítulo siguiente se verán otras aplicaciones de las particiones binarias para la construcción de cadenas de PCS.

Capítulo II - Matrices combinatorias

Matrices combinatorias

En la composición de un pasaje monódico, la utilización lineal de una serie garantiza la distribución de los doce grados con igual frecuencia. Decimos, en este caso, que el pasaje melódico así escrito exhibe una saturación cromática total.

Pero qué sucede cuando combinamos dos o más series o formas seriales en una textura contrapuntística. La superposición de los modos lleva, en la mayoría de los casos, a la repetición de grados del mismo nombre, y por lo tanto, a una disminución de la variedad cromática, o a la insistencia sobre una altura que se destaca sobre el resto y conforma un eje de recurrencia.

Analizando este problema, surge casi de inmediato que la superposición de una forma serial y su retrogradación representa una posible solución. La combinación del primer hexacordio de la serie con el primer hexacordio de la retrogradación conforman el total cromático, y lo mismo ocurre al considerar los hexacordios restantes.

01932B	A46587	voz 1: original
78564A	B23910	voz 2: retrogradación

Arnold Schönberg reconoce la dificultad técnica que presenta la escritura basada en la combinación simultánea de formas seriales, y plantea una posible solución al problema, que expresa del siguiente modo:

*“De la serie básica se derivan automáticamente tres series adicionales: 1) la inversión; 2) la retrogradación; 3) la inversión retrógrada... Posteriormente, en especial en obras de mayor amplitud, cambié mi idea original cuando fue necesario, con el fin de observar las siguientes condiciones: la inversión de las primeras seis notas a una quinta inferior, el antecedente, no produciría la repetición de ninguna de ellas, sino que introduciría las otras seis notas de la escala cromática que hasta el momento no se habían incluido. De este modo, el consecuente de la serie básica –sonidos 7 al 12- comprende las notas de esta inversión, pero en distinto orden, claro está.”*²³

En sus *Piezas para Piano op 33a* (1928-29) el material de alturas se limita a una serie dodecafónica original y cinco transformaciones, más las retrogradación de cada uno de esos modos. La relación que se produce entre ellas se resume en el cuadro siguiente (la inversión está calculada tomando a la primera nota de la serie como eje):

A	5	0	B	9	6	1	3	7	8	2	4	T ₀
3	8	1	2	4	7	0	A	6	5	B	9	T _{5I}

²³ Arnold Schönberg. “El estilo y la idea”. Editorial Taurus. 1963. pp 142-188.

Se observa claramente el principio de combinatoriedad. El primer hexacordio de la serie original aparece en el segundo hexacordio de la transformación (en otro orden), y viceversa. La superposición de ambos modos no da lugar a la repetición de grados, hasta que el total cromático se completa.

Lo mismo ocurre con:

5	0	7	6	4	1	8	A	2	3	9	B	T ₇
A	3	8	9	B	2	7	5	1	0	6	4	T _{0I}

0	7	2	1	B	8	3	5	9	A	4	6	T ₂
5	A	3	4	6	9	2	0	8	7	1	B	T _{7I}

Posteriormente, Milton Babbitt explora en profundidad los alcances de la combinatoriedad y la invariancia entre formas seriales. Ya en su obra *Tres Composiciones para Piano* (1947-48), considerada por algunos autores como la primera obra del serialismo integral, recurre a estos principios a partir de la utilización de las siguientes formas:

A	3	5	2	0	1	7	B	6	9	8	4	T ₀
4	9	B	8	6	7	1	5	0	3	2	A	T ₆ (combinatoria)
B	6	4	7	9	8	2	A	3	0	1	5	T _{1I} (combinatoria)
5	0	A	1	3	2	8	4	9	6	7	B	T _{7I} (invariante)

De acuerdo a su propia clasificación se trata de una serie pancombinatoria (presenta tanto combinatoriedad como invariancia) en la cual cada hexacordio está formado por un PCS 6-8. Los conjuntos que producen series con estas propiedades son 6-1, 6-7, 6-8, 6-20, 6-32 y 6 35.

MATRICES COMBINATORIAS SERIALES

Resulta, entonces, útil para la composición la superposición de formas seriales distintas, con el propósito de establecer una polifonía en la cual la variedad cromática sea máxima, no sólo en la linealidad de cada una de las voces que integran el contrapunto, sino también verticalmente. Siguiendo este criterio, podemos disponer formas seriales en cada una de las filas de una matriz cuadrada, de manera fragmentada, de modo tal que en cada una de las columnas aparezca también el total cromático.

	0143	92A8	57B6
A59B	8627		1034
3476		051B	8A29
1802	B95A	4367	

En el ejemplo anterior, la primera fila contiene la serie original, la transformación utilizada en la

segunda fila es T4I de la retrogradación, en la tercera es T3 del original, y en la cuarta es T7I de la retrogradación. Se observa que cada columna de la matriz alberga a los doce sonidos, con lo cual se garantiza una distribución estadísticamente uniforme de cada grado. A esta disposición de transformaciones de la serie en filas, que cumple con la característica antes mencionada en sus columnas, la denominamos matriz combinatoria serial.

A fin de establecer una metodología para la construcción de matrices combinatorias a partir de series dodecafónicas vamos a comenzar con una matriz cuadrada de 2 x 2 (dos filas y dos columnas). Hacemos referencia a una posición cualquiera de la matriz mediante la notación P_{i-j}. El subíndice *i* especifica el número de fila, y *j* la columna.

P ₁₋₁	P ₁₋₂
P ₂₋₁	P ₂₋₂

Si distribuimos la serie original en la primera fila, en dos partes iguales o desiguales en cada posición, obtenemos un conjunto de grados cromáticos en P₁₋₁, y su complemento en P₁₋₂. Para que las columnas completen el total cromático es preciso que el contenido de P₂₋₁ también sea el complemento de P₁₋₁, y que P₂₋₂ tenga los mismos elementos que P₁₋₁, pues P₁₋₂ es también complemento de P₂₋₂. Resulta entonces obvio y necesario recurrir al concepto de invariancia. La serie de la segunda fila es una transformación de la primera, mediante la cual ambas particiones resultan invariantes. En el ejemplo siguiente tal propiedad se obtiene aplicando el operador T2I a la retrogradación de la primera fila. Los grados que resultan son los mismos, pero en distinto orden. Si la transformación se aplicara al original, y no a la retrogradación, obtendríamos simplemente otra serie invariante, y no la combinatoriedad entre ambas. Recordemos que estamos trabajando con sucesiones ordenadas, transformadas a partir de operaciones básicas (transposición, inversión, multiplicación y retrogradación), donde el tipo de conjuntos de grados cromáticos que las componen son de importancia, aún cuando en ellos las permutaciones resultan ser redundantes.

0172	A9B48536
8B96A354	0712

Ciclos de orden *n*

Denominamos ciclo de grados cromáticos de orden *n*, a partir de un grado cualquiera *a*, a la sucesión numérica que surge de aplicar *a + n*, *a + 2n*, *a + 3n*, cíclicamente hasta alcanzar el punto de partida. La escala por tonos, por ejemplo, es un ciclo de orden 2.

$$\{1, 3, 5, 7, 9, B\} \text{ ó } \{0, 2, 4, 6, 8, A\}$$

Del mismo modo, un ciclo de orden 3 da por resultado un acorde de séptima disminuida, un ciclo de orden 4 da un acorde aumentado, uno de orden 6 da un intervalo de cuarta aumentada, y los de orden 1 y 5 dan el total cromático.

En una serie dodecafónica es posible determinar los miembros de un ciclo de orden n aplicando la operación módulo n (el módulo, en este contexto, es el resto de la división de un grado por n). Si $n = 2$, entonces $A : 2 = 5$, y el resto es igual a 0. Veamos esta propiedad aplicada a la escala cromática.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
módulo 2 (el resto de dividir por 2)											
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Aplicando módulo 2 diferenciamos a las dos escalas por tonos del total cromático, una identificada con ceros, y la otra con unos.

Con módulo 3 podemos visualizar rápidamente los tres ciclos (acordes de séptima disminuida) presentes en la escala.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
módulo 3											
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Existen sólo dos ciclos de orden 2, tres de orden 3, cuatros de orden 4, y seis de orden 6.

Todos los ciclos de orden n son invariantes por $T_{k,n}$ (siendo k cualquier número entero) y se verifica, además, que los de orden 2 son invariantes por I, los de orden 3 invariantes por IM, los de orden cuatro invariantes por M, y los de orden 6 invariantes por IM.

Para realizar el siguiente ejemplo partimos de una serie y generamos dos nuevas filas a partir de un ciclo de orden 4.

0	1	7	2	A	9	B	4	8	5	3	6	T_0
4	5	B	6	2	1	3	8	0	9	7	A	T_4
8	9	3	A	6	5	7	0	4	1	B	2	T_8

Posteriormente, obtenemos invariancia en las columnas luego de aplicar una transformación M, ya que según vimos antes, un ciclo de orden 4 es invariante frente a esa operación. Este procedimiento sirve de punto de partida para el diseño de matrices de cierto grado de complejidad.

0	5	B	A	2	9	7	8	4	1	3	6	$M(T_0)$
8	1	7	6	A	5	3	4	0	9	B	2	$M(T_4)$
4	9	3	2	6	1	B	0	8	5	7	A	$M(T_8)$

Ciertos ordenamientos del total cromático admiten un nivel adicional de invariancia en las columnas, relacionado con la retrogradación. Si realizamos una operación módulo 2 a la serie empleada anteriormente observamos lo siguiente:

0	1	7	2	A	9	B	4	8	5	3	6
módulo 2											
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

En esta serie en particular, los ceros y los unos que identifican a cada hexacordio hexatonal están dispuestos de forma simétrica. Las columnas permanecen invariantes al retrogradar las filas.

0	5	B	A	2	9	7	8	4	1	3	6	T ₀
2	7	1	0	4	B	9	A	6	3	5	8	T ₂
4	9	3	2	6	1	B	0	8	5	7	A	T ₄
6	B	5	4	8	3	1	2	A	7	9	0	T ₆
8	1	7	6	A	5	3	4	0	9	B	2	T ₈
A	3	9	8	0	7	5	6	2	B	1	4	T _A

6	3	1	4	8	7	9	2	A	B	5	0	R(T ₀)
8	5	3	6	A	9	B	4	0	1	7	2	R(T ₂)
A	7	5	8	0	B	1	6	2	3	9	4	R(T ₄)
0	9	7	A	2	1	3	8	4	5	B	6	R(T ₆)
2	B	9	0	4	3	5	A	6	7	1	8	R(T ₈)
4	1	B	2	6	5	7	0	8	9	3	A	R(T _A)

Dado que se trata de filas generadas con un ciclo de orden 2, la invariancia se obtiene tanto con T_nR como con T_nIR.

Construcción de matrices combinatorias seriales

Un modo simple de escribir una matriz a partir de un ciclo de orden 2 resulta de la agrupación de dos elementos de la serie por cada posición. Las dimensiones de la matriz así obtenida son seis filas por seis columnas.

Para que el total cromático aparezca tanto en el aspecto horizontal como en el vertical, es preciso que la serie presente un elemento par y otro impar en cada posición.

01	72	A9	B4	85	36	T ₀
23	94	0B	16	A7	58	T ₂
45	B6	21	38	09	7A	T ₄
67	18	43	5A	2B	90	T ₆
89	3A	65	70	41	B2	T ₈
AB	50	87	92	63	14	T _A

Del mismo modo, una matriz de 4 x 4 con ciclo de orden 4, con tres elementos por posición, se obtiene de una serie en la cual cada grupo no contiene clases interválicas de tercera menor ni de cuarta aumentada.

042	513	79B	A86	T ₀
375	846	A02	1B9	T ₃
6A8	B79	135	420	T ₆
91B	2A0	468	753	T ₉

Y una matriz de 3 x 3 con ciclo de orden 4, se construye con tres conjuntos de cuatro notas que no contengan terceras mayores.

065B	7A41	3982	T ₀
4A93	B285	7106	T ₄
8217	3609	B54A	T ₈

Pero ocurre, observando atentamente, que las matrices recién tratadas poseen un escaso valor musical. El contenido de las filas surge de la mera transposición de la serie original. Resulta necesario, entonces, encontrar modos de transformación que permitan obtener una mayor riqueza y complejidad en los resultados.

Podemos generar una matriz de 12 x 12 ubicando una serie en la primera fila y transportando la misma, semitono a semitono, en las once filas restantes. Una matriz de este tipo comprende a todos y a cada uno de los ciclos de orden n . Recordando cuáles son los operadores que mantienen la invariancia en las columnas de la matriz, es posible lograr variaciones que resulten de mayor interés.

En la matriz siguiente reemplazamos las transposiciones de las seis filas que corresponden a uno de los ciclos de orden 2 por su inversión. Se observa que en cada columna el total cromático se mantiene, pues el conjunto formado por un ciclo de orden 2 permanece invariante al aplicar esa transformación.

0	1	7	2	A	9	B	4	8	5	3	6	T ₀
B	A	4	9	1	2	0	7	3	6	8	5	I(T ₁)
2	3	9	4	0	B	1	6	A	7	5	8	T ₂
9	8	2	7	B	0	A	5	1	4	6	3	I(T ₃)
4	5	B	6	2	1	3	8	0	9	7	A	T ₄
7	6	0	5	9	A	8	3	B	2	4	1	I(T ₅)
6	7	1	8	4	3	5	A	2	B	9	0	T ₆
5	4	A	3	7	8	6	1	9	0	2	B	I(T ₇)
8	9	3	A	6	5	7	0	4	1	B	2	T ₈
3	2	8	1	5	6	4	B	7	A	0	9	I(T ₉)
A	B	5	0	8	7	9	2	6	3	1	4	T _A
1	0	6	B	3	4	2	9	5	8	A	7	I(T _B)

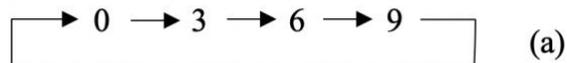
Y una nueva variación puede lograrse afectando a dos ciclos de orden 4 con el operador M. El primero sobre las transposiciones T_2 , T_6 y T_A , y el segundo sobre las inversiones $I(T_3)$, $I(T_7)$ e $I(T_B)$.

0	1	7	2	A	9	B	4	8	5	3	6	T_0
B	A	4	9	1	2	0	7	3	6	8	5	$I(T_1)$
A	3	9	8	0	7	5	6	2	B	1	4	$M(T_2)$
9	4	A	B	7	0	2	1	5	8	6	3	$M(I(T_3))$
4	5	B	6	2	1	3	8	0	9	7	A	T_4
7	6	0	5	9	A	8	3	B	2	4	1	$I(T_5)$
2	7	1	0	4	B	9	A	6	3	5	8	$M(T_6)$
1	8	2	3	B	4	6	5	9	0	A	7	$M(I(T_7))$
8	9	3	A	6	5	7	0	4	1	B	2	T_8
3	2	8	1	5	6	4	B	7	A	0	9	$I(T_9)$
6	B	5	4	8	3	1	2	A	7	9	0	$M(T_A)$
5	0	6	7	3	8	A	9	1	4	2	B	$M(I(T_B))$

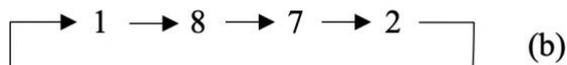
Otro modo de construir matrices resulta de aplicar al total cromático cierto tipo de transformación que produzca ciclos cerrados, y utilizar el material así obtenido en la construcción de la matriz. La siguiente tabla representa a los grados de la escala y la transformación que experimentan al utilizar el operador T_{3M} .

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	
3	8	1	6	B	4	9	2	7	0	5	A	T_{3M}

Partiendo de 0, por ejemplo, obtengo el 3 por T_{3M} , ahora el 3 de la primera fila se convierte a su vez en 6 por T_{3M} , y así siguiendo hasta volver al principio en un ciclo cerrado:



Tomando otro grado no presente en el ciclo anterior realizamos la misma rutina:



Y por último:



Disponemos ahora de los elementos necesarios para construir la matriz. Para ello utilizaremos todas las permutaciones circulares de los ciclos, ubicando una por columna. Como cada ciclo posee 4

grados, obtendremos una matriz de 4 x 4. El resultado es más interesante si la serie a utilizar, ubicada en la primera fila, presenta sonidos pertenecientes a ciclos distintos en cada columna.

a b c	c a b	b c a	c b a
01B	A68	243	579
38A	597	1B6	420
675	402	8A9	B13
924	B31	750	A86

En algunos casos, la cantidad de términos de los ciclos es distinta. Esto sucede, por ejemplo, al utilizar el operador T₂MI.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	9	4	B	6	1	8	3	A	5	0	7

T₂MI

Lo cual produce los ciclos:

$$0 - 2 - 4 - 6 - 8 - A \qquad 1 - 9 - 5 \qquad 3 - B - 7$$

En este caso, separamos el primer ciclo en dos partes, quedando un total de cuatro particiones:

$$a) 0 - 2 - 4 \quad b) 6 - 8 - A \quad c) 1 - 9 - 5 \quad d) 3 - B - 7$$

o bien (siempre a y b obtenidos de forma circular)

$$a) 8 - A - 0 \quad b) 2 - 4 - 6 \quad c) 1 - 9 - 5 \quad d) 3 - B - 7$$

o también

$$a) A - 0 - 2 \quad b) 4 - 6 - 8 \quad c) 1 - 9 - 5 \quad d) 3 - B - 7$$

Una de las matrices posibles es la siguiente:

a c d b	c d b a	d c a b
8172	9B60	35A4
A934	5782	B106
05B6	13A4	7928

Los operadores para la generación de los ciclos que conforman una matriz pueden ser compuestos. Esto significa que es posible crear un valor intermedio entre los términos de un ciclo, como en el siguiente ejemplo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	
2	7	0	5	A	3	8	1	6	B	4	9	T ₂ M
4	5	6	7	8	9	A	B	0	1	2	3	T ₄

Los ciclo así obtenidos son:

- a) 0 – 2 – 4 – A – 8 – 6 b) 1 – 7 – 5 – 3 – 9 – B
 c) 2 – 0 – 6 – 8 – A – 4 d) 3 – 5 – 7 – 1 – B – 9

Que sirven a la generación de una matriz como la del ejemplo siguiente:

a b	d c	c b	d a	a b	d c
01	72	A9	B4	85	36
27	10	4B	9A	63	58
45	B6	21	38	09	7A
A3	98	07	56	2B	14
89	3A	65	70	41	B2
6B	54	83	12	A7	90

Combinación de matrices seriales

Las matrices generadas a partir de la transformación de una misma serie pueden combinarse para formar matrices de mayores dimensiones, particularmente para producir matrices que posean un número impar de filas y columnas. A la matriz del ejemplo siguiente le vamos a agregar una fila y una columna, disponiendo una transformación de la serie en la nueva intersección.

0172	A9B48536	T ₀
8B96A354	0712	T ₂ (I(R))

0172		A9B48536	T ₀
8B96A354		0712	T ₂ (I(R))
	47526B10839A		T _A (I(R))

Consideremos ahora dos matrices producidas a partir de la misma serie.

0172	A9B4	8536	T ₀
45B6	2138	097A	T ₄
893A	6570	41B2	T ₈

27104B	9A6538	T ₂ (M)
8536A9	B40172	T ₂ (M(R))

La combinación entre ambas se realiza también creando nuevas filas y columnas.

0172		A9B4		8536	T ₀
45B6		2138		097A	T ₄
893A		6570		41B2	T ₈
	27104B		9A6538		T ₂ (M)
	8536A9		B40172		T ₂ (M(R))

Es posible ahora modificar la distribución de los componentes de la matriz de modo tal que no pierda sus propiedades. Esta operación la realizamos intercambiando elementos entre columnas adyacentes, cuidando de no alterar el orden dispuesto para las filas, dado que se trata de conjuntos ordenados.

Vemos que los grados 1, 7 y 2 de la primera fila, primera columna (P₁₋₁), se encuentran repetidos en la segunda columna (P₄₋₂), pero con un orden distinto (2, 7, 1). El intercambio de esos conjuntos produce el siguiente resultado:

0	172	A9B4		8536	T ₀
45B6		2138		097A	T ₄
893A		6570		41B2	T ₈
271	04B		9A6538		T ₂ (M)
	8536A9		B40172		T ₂ (M(R))

Siguiendo este criterio, podemos intercambiar el grado 6 en P₃₋₂ con su homónimo en P₅₋₃; el conjunto A9 de P₁₋₂ con su par en P₅₋₃; los elementos comunes B, 4 y 0 de las columnas 3 y 4 entre sí; y los elementos 8 y 5 de las columnas 4 y 5. Queda, entonces:

0	172A9		B485	36	T ₀
45B6		2138		097A	T ₄
893A	6	57	0	41B2	T ₈
271	04B		9A63	58	T ₂ (M)
	853	6A9B40	172		T ₂ (M(R))

MATRICES COMBINATORIAS NO SERIALES

Las matrices no seriales presentan un mismo conjunto de grados cromáticos en todas sus filas y columnas, o bien, uno para sus filas y otro, distinto al anterior, en todas sus columnas. A partir de estas matrices se mantiene la coherencia interválica, tanto en el aspecto horizontal como en el vertical.

Cuadrado Romano

La matriz combinatoria no serial más simple, y a la vez más elemental en términos musicales, es la denominada *cuadrado romano*. Está constituida por un único conjunto que se repite sin transformaciones en sus filas y columnas. Se obtiene realizando permutaciones circulares de los elementos del conjunto dado, ubicando cada permutación en una fila. Si a , b , c y d son los elementos del conjunto, se construye del siguiente modo:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{array}$$

Realicemos ahora, a modo de ejemplo, una matriz con el conjunto 4-18 (0, 1, 4, 7) representándola numéricamente y luego en notación musical. Según se observa, contiene las mismas notas en todas sus filas y columnas.

$$\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \end{array}$$

El *cuadrado romano* puede contener más de un elemento por posición dentro de la matriz, o bien una posición vacía (un silencio). En el ejemplo siguiente partimos del conjunto 79A 03 6, que es un 6-27 dividido en tres partes, e intercalamos un silencio entre la segunda y la tercera partición.

7A9	03		6
03		6	
	6	79A	03
6	79A	03	

En la fila 1, columna 1 del ejemplo anterior, permutamos los elementos de esa posición. Las permutaciones dentro de una misma posición no afectan las propiedades interválicas de la matriz.

Se denomina *norma horizontal* al conjunto comprendido por todos los elementos de cualquier fila, y *norma vertical* a todos los elementos de una columna. En un cuadrado romano, la norma horizontal y la vertical son idénticas.

Matrices Simples Tipo I

Las matrices tipo I poseen también la misma norma, horizontal y verticalmente. La denominación *simple* indica que la construcción de la matriz no depende de las propiedades de la norma elegida, y que cada posición está ocupada por un único elemento. Distinguiamos dos casos.

Matriz tipo IA

La norma generadora se establece a partir de un conjunto cualquiera de n elementos. La cantidad de elementos determina las dimensiones de la matriz, que siempre es *cuadrada* (posee igual número de filas y columnas).

A fin de comprender el principio constructivo, consideremos un conjunto –norma generadora– formado por cuatro notas (a, b, c, d) que sumamos del siguiente modo:

$a + a$	$b + a$	$c + a$	$d + a$
$a + b$	$b + b$	$c + b$	$d + b$
$a + c$	$b + c$	$c + c$	$d + c$
$a + d$	$b + d$	$c + d$	$d + d$

Como el conjunto considerado posee cuatro elementos, la matriz generada es de 4 x 4.

Crearemos ahora una matriz a partir de las notas 2A740. Se trata de un conjunto 5-34, cuya estructura equivale a la de un acorde de dominante con novena mayor.

$2 + 2$	$A + 2$	$7 + 2$	$4 + 2$	$0 + 2$
$2 + A$	$A + A$	$7 + A$	$4 + A$	$0 + A$
$2 + 7$	$A + 7$	$7 + 7$	$4 + 7$	$0 + 7$
$2 + 4$	$A + 4$	$7 + 4$	$4 + 4$	$0 + 4$
$2 + 0$	$A + 0$	$7 + 0$	$4 + 0$	$0 + 0$

Efectuando la suma y ajustando los valores entre 0 y 11 (módulo 12) obtenemos:

4	0	9	6	2
0	8	5	2	A
9	5	2	B	7
6	2	B	8	4
2	A	7	4	0

Las filas y columnas de la matriz 5 x 5 están formadas por transposiciones del conjunto empleado como norma.

Matriz tipo I B

Esta matriz se construye de modo similar a la anterior. El *tipo I A* posee en sus filas y columnas transposiciones del conjunto usado como norma, pero aquí generamos transposiciones en las filas, e inversiones transpuestas en las columnas.

El procedimiento para construir la matriz recurre también a la suma, pero en este caso, el primer término está dado por cada uno de los elementos del conjunto, y el segundo por la inversión de los mismos.

$a + I(a)$	$b + I(a)$	$c + I(a)$	$d + I(a)$
$a + I(b)$	$b + I(b)$	$c + I(b)$	$d + I(b)$
$a + I(c)$	$b + I(c)$	$c + I(c)$	$d + I(c)$
$a + I(d)$	$b + I(d)$	$c + I(d)$	$d + I(d)$

Para ejemplificar esto, utilicemos ahora el conjunto 4-27 como norma (2085).

$2 + I(2)$	$0 + I(2)$	$8 + I(2)$	$5 + I(2)$
$2 + I(0)$	$0 + I(0)$	$8 + I(0)$	$5 + I(0)$
$2 + I(8)$	$0 + I(8)$	$8 + I(8)$	$5 + I(8)$
$2 + I(5)$	$0 + I(5)$	$8 + I(5)$	$5 + I(5)$

Que da por resultado:

0	A	6	3
2	0	8	5
6	4	0	9
9	7	3	0

Cada fila presenta un conjunto 4-27, cuya estructura es la de un acorde de séptima de sensible. Por otra parte, cada columna contiene también un 4-27 pero invertido, que corresponde a la estructura del acorde de séptima de dominante.

Matriz Simple Tipo II

En una matriz simple *tipo II* la norma horizontal es diferente a la norma vertical. Los conjuntos que la generan pueden tener, además, distinta cantidad de elementos, lo que produce una matriz

rectangular. Si los elementos de la norma generadora horizontal son a_h, b_h, c_h, d_h , y los de la vertical a_v, b_v, c_v, d_v, e_v , el principio constructivo es el siguiente:

$a_h + a_v$	$b_h + a_v$	$c_h + a_v$	$d_h + a_v$
$a_h + b_v$	$b_h + b_v$	$c_h + b_v$	$d_h + b_v$
$a_h + c_v$	$b_h + c_v$	$c_h + c_v$	$d_h + c_v$
$a_h + d_v$	$b_h + d_v$	$c_h + d_v$	$d_h + d_v$
$a_h + e_v$	$b_h + e_v$	$c_h + e_v$	$d_h + e_v$

Vemos que resulta una matriz rectangular de 4 x 5.

Matrices generadas a partir de cadenas de conjuntos

Estas matrices se denominan complejas, ya que su construcción depende de las propiedades del conjunto utilizado como norma.

Una cadena se construye a partir de las particiones de un conjunto. Consideremos el PCS 5-15 = {0, 1, 2, 6, 8}, y dos de sus particiones en particular, que contienen un subconjunto en común (3-8):

A) 01|268 PCS : 2-1 | 3-8
 B) 16|028 PCS : 2-5 | 3-8

Partimos de A, y luego aplicamos una transformación al conjunto B con un operador T_n ó T_{nI} que convierta al término 028 en 068 (segundo término de A). Si transformamos la retrogradación de B con T_6 y luego ordenamos, el resultado es el siguiente:

268|07

Obtuvimos así dos eslabones de una cadena, $A = 01|268$ y $T_6R(B) = 268|07$. Ahora haremos lo mismo sobre el original B, con la intención de lograr una nueva transformación que mantenga invariante al subconjunto 07. Aplicando T_{1I} nos queda:

07|15B

Continuando con este procedimiento, en un recorrido de ida y vuelta alrededor del subconjunto común a ambas particiones, arribamos al siguiente resultado:

$$2-1 \quad \xleftrightarrow{A} \quad 3-8 \quad \xleftrightarrow{B} \quad 2-5$$

01	268	A
268	07	T ₆ R(B)
07	15B	T ₁ I(B)
15B	67	T ₇ IR(A)
67	028	T ₆ (A)
028	16	T ₀ R(B)
16	57B	T ₇ I(B)
57B	01	T ₁ I(A)

A partir de estos datos, estamos en condiciones de armar la cadena, la cual es cerrada, pues el primer subconjunto y el último son idénticos.

01|268|07|15B|67|028|16|57B|01

Uniendo dos subconjuntos consecutivos de la cadena obtenemos el PCS utilizado como norma (5-15). Podríamos utilizar esta sucesión para la composición de un fragmento melódico con un alto grado de coherencia interválica, ya que cada enlace de conjuntos se realiza mediante dos o tres grados en común.

La generación de la matriz la realizamos ubicando a cada subconjunto sobre la diagonal, de modo tal que la norma se manifieste en cada una de las filas y de las columnas.

01	268		
	07	15B	
		67	028
57B			16

La construcción de matrices utilizando este método requiere un análisis detallado de los PCS, en particular en relación a sus posibilidades de aplicación en la generación de cadenas de un número considerable de eslabones.

Se denomina partición redundante a aquella que transformada resulta invariante de otra partición del mismo PCS. La partición 04A|123B, por ejemplo, transformada con T₂I produce una invariancia total (24A|103B). A una partición redundante se la identifica con un asterisco, y es de poca utilidad en la producción de matrices combinatorias.

Algo similar ocurre con 012|34AB bajo T₂I (210|BA43), con la diferencia que en este caso la partición sigue siendo la misma. Estas observaciones dan la pauta que no todas las divisiones del conjunto producen la variedad necesaria para la construcción eficaz de una matriz.

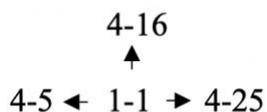
La invariancia parcial es la que resulta efectiva, y se manifiesta a través de las condiciones presentadas en la tabla que sigue (a la derecha, se detalla el modo en que se identifican). Las letras X e Y representan a cada uno de los términos de la partición, y F y G son operaciones de transformación aplicadas a la partición considerada.

Propiedad	Etiqueta
$F(X) = X$	1
$F(X) = X \quad G(Y) = Y$	12
$G(Y) = Y$	2
$F(X) = Y \quad F(Y) \neq X$	3

Un análisis de todas las particiones posibles del PCS 5-15 = {0, 1, 2, 6, 8} aporta la siguiente información:

0 1268	1-1	4-16	1
1 0268	1-1	4-25	2
2 0168	1-1	4-16	*
6 0128	1-1	4-5	1
8 0126	1-1	4-5	*
01 268	2-1	3-8	1
02 168	2-2	3-9	
06 128	2-6	3-5	1
08 126	2-4	3-4	1
12 068	2-1	3-8	*
16 028	2-5	3-8	1
18 026	2-5	3-8	*
26 018	2-4	3-4	*
28 016	2-6	3-5	*
68 012	2-2	3-1	

Las cadenas no sólo pueden generarse en base a dos particiones, sino a tres o más que posean un subconjunto en común. En consecuencia, las posibilidades de construcción son muy variadas. El siguiente gráfico muestra una posible combinación de tres particiones a partir del subconjunto común 1-1.



Matrices a partir de ciclos de un mismo operador

Partiendo de un grado cualquiera, podemos establecer una secuencia en la cual cada término es el resultado de una transformación del término anterior utilizando un operador determinado. La secuencia 0, 2, 4, 6, 8, A, por ejemplo, surge de la aplicación cíclica del operador T_2 .

Con algunos operadores, la secuencia se limita a dos términos, ya que el tercero es idéntico al primero y la secuencia se repite. Esto ocurre con T_6 y $T_n I$ (donde n es un entero entre 0 y 11).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
6	7	8	9	A	B	0	1	2	3	4	5

T₆

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
5	4	3	2	1	0	B	A	9	8	7	6

T_{5 I}

Los operadores T₄ y T₈, por otra parte, generan secuencias de tres términos.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
4	5	6	7	8	9	A	B	0	1	2	3
8	9	A	B	0	1	2	3	4	5	6	7

T₄

T₄ (T₄)

Los operadores T₃ y T₉ generan secuencias de cuatro términos.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
3	4	5	6	7	8	9	A	B	0	1	2
6	7	8	9	A	B	0	1	2	3	4	5
9	A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8

T₃

T₃ (T₃)

T₃ (T₃ (T₃))

Y por último, los operadores T₂ y T_A producen ciclos de seis términos (0, 2, 4, 6, 8, A; 1, 3, 5, 7, 9, B; etc.).

Una matriz, utilizando ciclos de operaciones, se construye ubicando el PCS utilizado como norma en P₁₋₁, y los términos del ciclo en las posiciones de la diagonal de la matriz (P₂₋₂, P₃₋₃). Luego utilizaremos procedimientos de transformación para enriquecer el resultado.

1064			
	3479		
		067A	
			139A

La modificación de 1, 0, 6, 4 por T₃ da por resultado 4, 3, 9, 7. No obstante, vemos en la posición P₂₋₂ de la matriz el conjunto 3, 4, 7, 9, ordenado de menor a mayor por cuestiones de claridad. Ya no estamos trabajando con conjuntos ordenados, como en el caso de las series dodecafónicas, por lo cual la permutación de los elementos de una misma posición de la matriz no afecta a los resultados.

También es posible ubicar el conjunto de partida en posiciones diferentes y desarrollar el ciclo siguiendo recorridos sobre la diagonal y paralelos a ella. Se debe observar aquí como se rebaten los elementos sobre las posiciones. El operador empleado es T₂.

4	B	0	7		
	6	1	2	9	
		8	3	4	B
1			A	5	6
8	3			0	7
9	A	5			2

Las dimensiones de la matriz dependen de la cantidad de términos del ciclo, y por lo tanto, del operador utilizado. La siguiente tabla lo ilustra.

<i>Operador</i>	<i>Dimensiones de la matriz</i>
T ₆ - T _{nI}	2 x 2
T ₄ - T ₈	3 x 3
T ₃ - T ₉	4 x 4
T ₂ - T _A	6 x 6

Operaciones sobre matrices combinatorias no seriales

Intercambio de elementos entre posiciones

Esta operación sobre matrices combinatorias seriales la realizábamos exclusivamente entre columnas adyacentes, debido a la necesidad de mantener el orden de los conjuntos distribuidos en cada posición de las filas. En el caso de las matrices no seriales, por tratarse de conjuntos no ordenados, el intercambio se realiza tanto entre filas como entre columnas, sin que importe si son adyacentes o no, lo cual produce una variedad considerable de versiones. Para ejemplificar esto, vamos a partir de una matriz generada por ciclos y a producir todos los intercambios posibles, a fin de lograr una distribución uniforme de elementos.

Matriz por ciclos

Conjunto de partida: A 32 87 (PCS: 5-20)

Operador: TA

Norma horizontal: 5-20

Norma vertical: 5-7

A	32	87			
	8	01	56		
		6	AB	34	
			4	89	12
0B				2	67
45	9A				0

Vamos a intercambiar el elemento A de P_{1-1} por su par de P_{3-4} . El primero baja dos filas sobre su misma columna (a P_{3-1}), y el segundo asciende dos filas, también conservando su propia columna (a P_{1-4}). El resultado no se altera, ni vertical ni horizontalmente.

	32	87	A		
	8	01	56		
A		6	B	34	
			4	89	12
0B				2	67
45	9A				0

Ahora intercambiamos los elementos 3 y 2 de P_{1-2} por sus pares de las posiciones P_{3-5} y P_{4-6} . El primer 3 desciende a la tercera fila y su par asciende a la primera. El primer 2 baja a la cuarta, y el 2 de la última columna sube a la primera fila.

		87	A	3	2
	8	01	56		
A	3	6	B	4	
	2		4	89	1
0B				2	67
45	9A				0

Continuando con el procedimiento, logramos una distribución uniforme.

	A	7		38	2
5	8	1			06
A	3	6	B	4	
	2	8	4	9	1
B		0	6	2	7
04	9		5A		

En el próximo ejemplo, creamos una matriz a partir de cadenas, y luego efectuamos la redistribución de sus elementos.

Matriz por cadenas

Conjunto de partida: 14376A (PCS: 6-27)

Particiones utilizadas: 14|376A (2-3|4-17) y 1A|4376 (2-3|4-3)

Norma horizontal: 6-27

Norma vertical: 6-27

376A	14						
	679A	03					
		169A	03				
			679A	14			
				27AB	14		
					679A	03	
						2569	03
14							679A

4		1	6	A	7		3
	A	0	3	7	9		6
A		6	9		1	3	0
	4		7	1	6	9	A
7	1	A		B	4	2	
6	7	3			A	0	9
3	6	9	0	2		5	
1	9		A	4		6	7

Transformación por T_n , T_{nI} ó M

La matriz completa puede ser transpuesta, invertida o multiplicada. Veamos la matriz anterior modificada por T_{6I} .

2		5	0	8	B		3
	8	6	3	B	9		0
8		0	9		5	3	6
	2		B	5	0	9	8
B	5	8		7	2	4	
0	B	3			8	6	9
3	0	9	6	4		1	
5	9		8	2		0	B

Intercambio de filas y columnas

Una vez más, por tratarse de conjuntos no ordenados, es posible intercambiar columnas entre sí, o filas. En el ejemplo siguiente generamos una matriz Tipo II e intercambiamos las filas 1 y 3, y luego las columnas 2 y 4.

Matriz Tipo II

Conjuntos de partida: 14376A (PCS: 6-27) y 980 (PCS: 3-3)

Norma horizontal: 6-27

Norma vertical: 3-3

A	1	0	4	3	7
9	0	B	3	2	6
1	4	3	7	6	A

1	7	3	4	6	A
9	3	B	0	2	6
A	4	0	1	3	7

Giro de 90°

A través de un giro de 90° la matriz intercambia filas por columnas. La primera fila se convierte en la primera columna, la segunda fila en la segunda columna y así siguiendo. Para el ejemplo creamos una matriz Tipo I B y la rotamos 90°.

Matriz Tipo I B

Conjunto de partida: 26598 (PCS: 5-16)

Norma horizontal: 5-16

Norma vertical: 5-16

0	4	3	7	6
8	0	B	3	2
9	1	0	4	3
5	9	8	0	B
6	A	9	1	0

6	2	3	B	0
7	3	4	0	1
3	B	0	8	9
4	0	1	9	A
0	8	9	5	6

Invariancia en posiciones, filas o columnas

Es posible aplicar una transformación T_n , T_nI ó M que mantenga invariantes a un elemento en particular, o a un conjunto dispuesto en una fila o columna específica. La siguiente matriz se transforma con T_8I , y mantiene invariantes las filas 1 y 4, y las columnas 1 y 2.

Matriz por cadena

Conjunto de partida: 71084 (PCS: 5-22)

Particiones utilizadas: 71|084 (2-6|3-12) con sí misma

Norma horizontal: 5-22

Norma vertical: 5-22

48	17		0
0	8	5B	4
		26A	5B
17	04		8

40	17		8
8	0	31	4
		26A	39
17	48		0

Combinación de matrices no seriales

Al igual que las seriales, estas matrices pueden combinarse con el propósito de generar otras de mayores dimensiones. La condición necesaria para que la combinación resulte es que las normas de ambas sean idénticas. Vemos, en el próximo ejemplo, el modo en que se disponen las matrices, y a continuación el resultado que se obtiene luego de la aplicación de operaciones de intercambio de elementos.

1	367	42			
03	4	1AB			
456	89	3			
			7	46	125
			58	79A	4
			234	5	0B

6	3		7	12	4
3		1B	4	0	A
4	68	3	5		9
1	7	4	2	5	6
5	9	A	8	4	7
0	4	2	3	B	5

Capítulo III - Aplicaciones musicales

Aplicaciones musicales

A fin de ejemplificar la utilización de matrices combinatorias no seriales en la composición musical, veremos algunos ejercicios, escritos de acuerdo a las técnicas de generación y transformación anteriormente analizadas.

Para comenzar, construiremos una matriz a partir del método denominado *cuadrado romano*, partiendo del conjunto {8, 9, 4, 0, 6} que conforma un PCS 5-26. Obtenemos la siguiente matriz que, según sabemos, posee en sus filas permutaciones circulares del conjunto dado.

8	9	4	0	6
9	4	0	6	8
4	0	6	8	9
0	6	8	9	4
6	8	9	4	0

A partir de estos datos, disponemos la primera, segunda y quinta columnas de la matriz en forma de acordes, y la tercera y cuarta en forma de arpeggios. Se observa en el ejemplo el desarrollo del contenido de las filas, particularmente en el movimiento de los bajos (quinta fila de la matriz).



Figura 12: fragmento musical que emplea el cuadrado romano

Continuando con la misma técnica, construiremos una nueva matriz, pero que en este caso contenga distinta cantidad de elementos por posición. Utilizaremos el conjunto {B, 9, 1, 5, 2, 8} (PCS 6-Z28).

Distribuimos el conjunto de partida en tres grupos de dos, tres y un elemento respectivamente: B9, 152 y 8. Obtenemos así una matriz de 3 x 3.

B9	152	8
152	8	B9
8	B9	152

La primera columna ocupa los dos primeros tiempos del ejemplo. Vemos dos notas en el agudo (*si* y *la*), tres en el registro intermedio (*do#* como apoyatura, *re* y *fa*), y una sola nota en el grave (*sol#*). Esta última nota ocupa la diagonal de la matriz, y es el único elemento en la posición. Aparece en los tres registros, y siempre es acompañada por dos y tres sonidos en las otras voces.



Figura 13: fragmento musical que emplea el cuadrado romano con más de un elemento por posición

Para la realización del ejemplo que sigue nos interesa particularmente comenzar con los sonidos {0, 8, 2, 7, B}, dispuestos del grave al agudo en forma de acorde, y aplicar luego la técnica de generación *tipo I A*. Analizamos el conjunto y vemos que se trata de un PCS 5-Z18.

Construimos la matriz según el método estudiado, partiendo del conjunto elegido. Nos queda:

0	8	2	7	B
8	4	A	3	7
2	A	4	9	1
7	3	9	2	6
B	7	1	6	A

Pero observamos que la primera columna no contiene el acorde de partida en el orden deseado, sino una retrogradación del mismo, por lo cual vamos a permutar las filas 1 y 5, y luego la 2 y con la 4.

B	7	1	6	A
7	3	9	2	6
2	A	4	9	1
8	4	A	3	7
0	8	2	7	B

Si la realización musical consiste en lograr una sucesión de acordes con matices contrastantes podemos escribir:

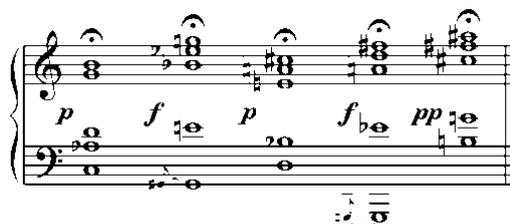


Figura 14: fragmento musical que emplea una matriz tipo I A

En el ejemplo siguiente vamos a alternar las columnas de dos matrices distintas. La idea es alcanzar el total cromático a partir de la alternancia de dos hexacordios 6-35. El primero contiene a los grados 0, 2, 4, 6, 8, A, y el segundo a los grados 1, 3, 5, 7, 9, B.

Para comenzar, generamos una matriz *tipo IA* a partir del conjunto {0, 2, 4, 6, 8, A}.

0	2	4	6	8	A
2	4	6	8	A	0
4	6	8	A	0	2
6	8	A	0	2	4
8	A	0	2	4	6
A	0	2	4	6	8

Vemos que el resultado es el mismo que si la hubiéramos construido siguiendo la técnica del *cuadrado romano*.

Ahora construimos otra a partir del conjunto {1, 5, 3, B, 7, 9}

2	6	4	0	8	A
6	A	8	4	0	2
4	8	6	2	A	0
0	4	2	A	6	8
8	0	A	6	2	4
A	2	0	8	4	6

Y observamos que a pesar de haber usado los grados impares (1, 3, 5, etc.) el método constructivo nos lleva a una matriz de grados pares, dado que la suma de dos números impares es un número par. Para revertir esta situación vamos a transportar la matriz en un semitono.

3	7	5	1	9	B
7	B	9	5	1	3
5	9	7	3	B	1
1	5	3	B	7	9
9	1	B	7	3	5
B	3	1	9	5	7

Generadas ambas matrices alternamos sus columnas a fin de obtener el total cromático a partir de esa combinación. Esta alternancia nos lleva a pensar distintas realizaciones compositivas. Podría ocurrir, por ejemplo, que los grados pares se diferenciaron de los impares a partir de la utilización de distintos matices, articulaciones, timbres, ubicación en el registro, o tipo de textura. Esto generaría dos discursos paralelos, ambos con sentido propio, pero que conforman una totalidad.

0	3	2	7	4	5	6	1	8	9	A	B
2	7	4	B	6	9	8	5	A	1	0	3
4	5	6	9	8	7	A	3	0	B	2	1
6	1	8	5	A	3	0	B	2	7	4	9
8	9	A	1	0	B	2	7	4	3	6	5
A	B	0	3	2	1	4	9	6	5	8	7

Esta matriz, producto de la combinación de las anteriores, sirve a la composición del ejemplo siguiente:



Figura 15: fragmento musical que emplea dos matrices tipo I A alternadas

Según vimos, la matriz *tipo I B* posee transposiciones de un conjunto en sus filas, y transposiciones de la inversión del mismo conjunto en sus columnas. El ejercicio siguiente persigue la composición de un breve proceso gradual, utilizando este tipo de estructuras.

Fijamos como punto de partida el conjunto {4, 0, 3, 8, 6} (PCS 5-26) y construimos la matriz siguiendo el principio antes visto. Se observa que, debido al método, la primera posición de las matrices *tipo I B* arroja un 0, debido a que la suma de un grado cualquiera y su inversión módulo 12 es siempre 0.

0	8	B	4	2
4	0	3	8	6
1	9	0	5	3
8	4	7	0	A
A	6	9	2	0

Para evitar esa situación transportaremos la matriz utilizando un operador arbitrario, por ejemplo, T_4 .

4	0	3	8	6
8	4	7	0	A
5	1	4	9	7
0	8	B	4	2
2	A	1	6	4

Las otras cuatro matrices a emplear las obtenemos transportando de a un semitono la matriz anterior.

5	1	4	9	7
9	5	8	1	B
6	2	5	A	8
1	9	0	5	3
3	B	2	7	5

6	2	5	A	8
A	6	9	2	0
7	3	6	B	9
2	A	1	6	4
4	0	3	8	6

7	3	6	B	9
B	7	A	3	1
8	4	7	0	A
3	B	2	7	5
5	1	4	9	7

8	4	7	0	A
0	8	B	4	2
9	5	8	1	B
4	0	3	8	6
6	2	5	A	8

El material así obtenido se aplica en la producción del siguiente fragmento musical.

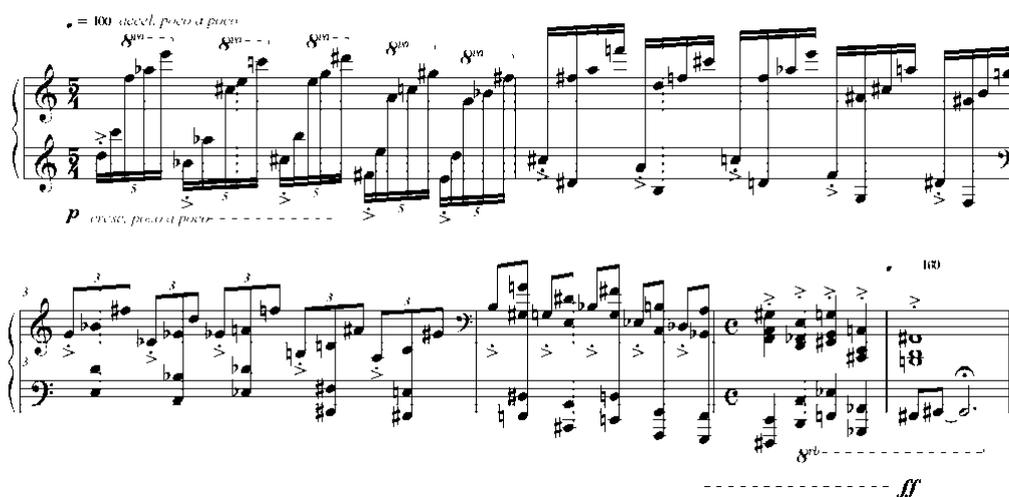


Figura 16: fragmento musical que emplea matrices tipo I B

El próximo ejemplo se basa en una matriz *tipo II*, que según vimos puede armarse sobre dos conjuntos de distinta cantidad de elementos. En este caso, utilizamos como norma horizontal al conjunto {9, 1, 0, 4, 3, 7, 6} (PCS 7-31), y como norma vertical al conjunto {8, 6, 0, 9} (PCS 4-12).

5	9	8	0	B	3	2
3	7	6	A	9	1	0
9	1	0	4	3	7	6
6	A	9	1	0	4	3

Procedemos luego a rotar 90° la matriz anterior para combinarla con una versión de mayor densidad polifónica.

2	0	6	3
3	1	7	4
B	9	3	0
0	A	4	1
8	6	0	9
9	7	1	A
5	3	9	6

Por último, intercambiamos columnas entre sí, en favor de la sonoridad buscada.

0	3	2	6
1	4	3	7
9	0	B	3
A	1	0	4
6	9	8	0
7	A	9	1
3	6	5	9

Y una aplicación posible es



Figura 17: fragmento musical que emplea una matriz tipo II

Para la construcción del siguiente ejemplo utilizamos la técnica de matrices por *ciclos de un operador*. El conjunto elegido es $\{2, 1, 5, 4\}$ (PCS 4-3), y el operador es T_3 .

2154			
	4578		
		78AB	
			12AB

Paso seguido, realizamos intercambios entre elementos de la matriz, de forma gradual

154			2
	4578		
		78AB	
2			1AB

15 4 2
 4 578
 78AB
 2 1AB

1 45 2
 45 78
 78AB
 2 1AB

1 45 2
 45 8 7
 7 8AB
 2 1AB

1 45 2
 45 8 7
 7 8B A
 2 A 1B

1 45 2
 45 8 7
 7 8 AB
 2 AB 1

La aplicación en orden sucesivo de las matrices anteriores da por resultado:



Figura 18: fragmento musical que emplea una matriz generada por ciclos de un operador

Como último ejemplo, partiremos de una matriz generada con *cadena de PCS*, empleando {0, 3, 6, A, 2} (PCS 5-26).

36A2	0		
	379B	6	
		0489	6
0			379B

La idea es contraponer la matriz anterior con otra versión cuyos elementos estén distribuidos de manera más uniforme, aplicando operaciones de intercambio de elementos.

2A	3	0	6
3	9	6	7B
6	0	48	9
0	7B	9	3

Y una realización posible es la que sigue.



Figura 19: fragmento musical que emplea una matriz generada a partir de cadenas

Capítulo IV - Aplicaciones Informáticas para la composición y análisis de la música atonal: la biblioteca pcslib

Introducción

Ciertas complejidades de la teoría atonal tornan su aplicación práctica casi imposible, si no se dispone de programas de computación. De hecho, la técnica de los *Pitch Class Sets* y sus derivaciones parecen haberse desarrollado en sinergia con los sistemas informáticos de composición y análisis asistidos. Es por eso que en este capítulo se presenta una descripción y ejemplos de uso de una de las aplicaciones informáticas producidas específicamente en el marco del proyecto de investigación que dio lugar a este libro: la biblioteca de objetos externos *pcslib* (para utilizarse en conjunto con el programa *Pure Data*, de Miller Puckette).

Qué es *pcslib*

pcslib es un conjunto de objetos externos (*externals objects*) para el programa *pd* (*Pure Data*, Miller Puckette) que permite la aplicación de *Conjuntos de Grados Comáticos* (*Pitch Class Sets*, abreviado PCS en adelante, véase Forte, 1974) y *Matrices Combinatorias* (*Combinatorial Matrices*, abreviado CM en adelante, véase Morris, 1987) en el análisis y la composición musical.

pcslib fue desarrollada por O. P. Di Liscia y Pablo Cetta como parte de los Proyectos de Investigación titulados "*Desarrollo de aplicaciones informáticas para la organización de la altura temperada en la composición y el análisis musical*" (Artes Multimediales - I.U.N.A.) y "*Formalización de procesos compositivos y desarrollo de aplicaciones informáticas para análisis y composición musical*" (Facultad de Artes y Ciencias Musicales - U.C.A.). A pesar de que *pcslib* todavía está en desarrollo, al presente, ya ha sido producido un significativo número de objetos que permiten realizar operaciones de cierta complejidad. Se recomienda al usuario contar con la versión actualizada de *pcslib* (que contiene, al presente, muchos otros objetos y ejemplos que los que se presentarán aquí) y consultar su documentación y ejemplos.

pcslib es de uso, copia y distribución gratuitos con fines no comerciales. El usuario puede acceder tanto a las versiones actualizadas de *pcslib* como a su documentación en la siguiente URL:

<http://puredata.info/Members/pdiliscia/pcslib>

pd (*Pure Data*, Miller Puckette, vease <http://puredata.info/>) es un entorno de programación de alto nivel para sonido y música (y, recientemente, también para gráfica digital) que utiliza el paradigma de *objetos*. Dichos objetos constituyen las unidades básicas de *pd* y, a través de su interconexión, el usuario realiza programas específicos (denominados *patches*) para las tareas de audio y música que se proponga. *Pure Data* es de uso, copia y distribución gratuitos con fines no comerciales y corre prácticamente en todas las plataformas y sistemas operativos habituales.

La siguiente discusión asume el conocimiento por parte del usuario de la programación usando *Pure Data*. Asimismo, también se asume que el lector debe tener instalado el programa *pd* en su sistema.

Ya que el código fuente de *pcslib* está disponible, un usuario experto puede compilarla para otros sistemas operativos (Linux, Mac OS, etc.) y usarla en estos con relativa facilidad. Para instalarla y usarla, se deben seguir las directivas habituales de *Pure Data*.

Representación numérica de los PCS y las CM

Debido tanto a requerimientos de computación como a convenciones teóricas, *pcslib* usa una representación numérica de los atributos de los PCS y las CM que será descrita brevemente en esta sección. Un usuario experto en la programación en lenguaje “C” puede encontrar en el código de *pcslib* mayores detalles, si los necesita.

1 - PCS: *pcslib* usa la correspondencia entre PC (grados cromáticos) y enteros habitual, ya explicada en el Capítulo I de este libro. Para comodidad del lector, se expone nuevamente a continuación:

Entero	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
PC	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si

Usualmente, un PCS es considerado *no-ordenado*, lo que significa que 0, 1, 2, 3; 0, 2, 1, 3 y 0, 1, 3, 2 son equivalentes, y así sucesivamente. Sin embargo, para trabajar correctamente con *Cadenas* y *Matrices Combinatorias* es necesario considerar a los PCS como *ordenados parcialmente*, en el sentido que un PCS puede tener diferentes agrupamientos de PC a los que se llama *posiciones*. Tal PCS parcialmente ordenado se denomina *cadena*.

Por ejemplo, el mismo PCS {0, 2, 4, 5} puede ser distribuido para formar diferentes cadenas con diferente número de posiciones (separadas por espacios en el ejemplo) así:

- 0245 (solo una posición con los cuatro PC)
- 02 45 (dos posiciones de dos PC cada una)
- 024 5 (dos posiciones con tres y un PC cada una, respectivamente)
- 0 245 (dos posiciones con uno y tres PC cada una, respectivamente)
- 0 24 5 (tres posiciones con uno, dos, y un PC cada una, respectivamente)

Para representar numéricamente este ordenamiento, *pcslib* representa un *fin de posición* con un -1 y un *fin de cadena* con un -2. Entonces, los ejemplos de cadenas anteriores serán representados internamente por *pcslib* como:

```

0245 -2
02 -1 45 -2
024 -1 5 -2
0 -1 245 -2
0 -1 24 -1 5 -2

```

2 - CM: Una CM es representada por *pcslib* con tantos vectores de 9 posiciones cada uno como posiciones tenga la CM (recordar que el número de posiciones de una CM es igual al número de sus filas por el número de sus columnas). Cualquier posición de uno de los vectores que esté

vacía (i.e., que no contenga PC) será llenada con un -4. Por ejemplo, el siguiente CM de tipo *cuadrado romano*:

0	1	3	4
1	3	4	0
3	4	0	1
4	0	1	3

Será representada internamente por *pcslib* como:

```
[0 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 1 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 3 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 4 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4]
[1 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 3 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 4 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 0 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4]
[3 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 4 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 0 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 1 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4]
[4 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 0 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 1 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4] [ 3 -4 -4 -4 -4 -4 -4 -4]
```

Los PC se marcan con negritas, y cada [...] encierra los datos de una posición de la CM.

La CM de 6x6 que sigue, combina posiciones de 3 y 2 PC cada una. También varias posiciones vacías (por ejemplo, las posiciones [1][0], y [0][2]). Nótese además que, para usar sólo un caracter para cada entero se reemplaza el entero 10 por “A” y el 11 por “B”, pero esto es solo para una mayor prolijidad en la impresión y no para la representación interna de los datos.

01	376	-	-	-	-
-	23	589	-	-	-
-	-	45	7AB	-	-
-	-	-	67	019	-
-	-	-	-	89	23B
145	-	-	-	-	AB

Una posición vacía es representada por *pcslib* con un -3 seguido de ocho -4. Por ejemplo, la CM de arriba será internamente representada por *pcslib* como:

```
[01 -4-4-4-4-4-4-4] [376 -4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4]
[-3-4-4-4-4-4-4-4][23 -4-4-4-4-4-4] [589 -4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4]
[-3-4-4-4-4-4-4-4][45 -4-4-4-4-4-4] [71011-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4]
[-3-4-4-4-4-4-4-4][67 -4-4-4-4-4-4] [019 -4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4]
[-3-4-4-4-4-4-4-4][89 -4-4-4-4-4-4] [2311 -4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4]
[145 -4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4] [-3-4-4-4-4-4-4-4]
[1011 -4-4-4-4-4-4]
```

Véanse los objetos *cm_read* y *cm_2txt* para obtener una representación “cruda” o “limpia” de la CM, respectivamente.

Tipos de datos especiales usados por *pcslib* en *pd*

Para transferir eficientemente datos entre sus objetos, además de los tipos de datos usuales de *pd* (*floats*, listas, símbolos, etc.), *pcslib* usa dos tipos de datos especiales.

Punteros a estructuras de datos de tipo PCS.

Punteros a estructuras de datos de tipo CM.

Los detalles de cada una de estas estructuras pueden encontrarse en el código de *pcslib* (ver especialmente *pcslib.h*)

Naturalmente, los datos de estas estructuras no pueden ser accedidos en forma directa, sino que existen objetos especialmente dedicados a crearlos, interpretarlos y modificarlos. Por ello, se debe tener especial cuidado en ingresar en cada objeto el tipo de dato necesario que se detalla en la sección que sigue.

Objetos que integran *pcslib*

A - Objetos para Pitch Class Sets (PCS)

Nombre	pcs_write
Descripción	El objeto <i>pcs_write</i> genera un PCS a partir de datos entregados por el usuario. El PCS es buscado en la tabla de PCS y transpuesto o invertido, si se requiere.
Entradas	<i>Inlet</i> : lista con tres o cuatro argumentos: número cardinal (<i>float</i>), número ordinal (<i>float</i>) y factor de transposición (<i>float</i>). Si se entrega un cuarto argumento, este debe ser un símbolo "I", que significa inversión.
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a una estructura PCS. Para acceder a los datos, debe usarse otro objeto <i>pcs</i> (usualmente, un objeto <i>pcs_read</i>).

Nombre	pcs_read
Descripción	El objeto <i>pcs_read</i> lee y clasifica los diferentes datos de un PCS.
Entradas	<i>Inlet</i> : un puntero a una estructura PCS. El puntero debe generarse usando otros objetos (usualmente, un objeto <i>pcs_write</i>).
Salidas	<i>Outlet1</i> : PC originales del PCS (lista de <i>floats</i>) <i>Outlet2</i> : número cardinal (<i>float</i>) <i>Outlet3</i> : número ordinal (<i>float</i>) <i>Outlet4</i> : status (T/I) (<i>symbol</i>) <i>Outlet5</i> : forma prima (lista de <i>floats</i>) <i>Outlet6</i> : vector de clases interválicas (lista de 6 <i>floats</i>) <i>Outlet7</i> : complemento literal del PCS, es decir, los PC que no están incluidos en él (lista de <i>floats</i>).

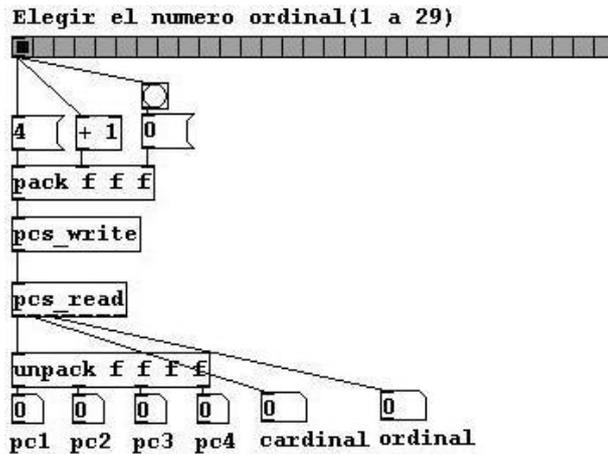


Figura 21: imagen de un *Patch* de *pd* como ejemplo de uso de los objetos *pcs_write* y *pcs_read* en combinación

Nombre	pcs_pf
Descripción	El objeto <i>pcs_pf</i> obtiene la forma prima de un PCS y guarda todos los datos asociados en una estructura PCS.
Entradas	<i>Inlet</i> : lista de <i>floats</i> que representan <i>Pitch Classes</i> : 0 - 11 (<i>do a si</i>). -1 significa <i>fin de posición</i> , y -2 significa <i>fin de cadena</i> .
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a la estructura PCS resultante. Si el <i>fin de cadena</i> (-2) no es incluido al final de la lista, será agregado automáticamente. Ni las repeticiones de PC, ni las diferentes posiciones –si las hubiera- se toman en cuenta para identificar la SC, pero son guardadas como fueron entregadas originalmente. Para acceder a los datos, debe usarse otro objeto <i>pcs</i> (usualmente, un objeto <i>pcs_read</i>).

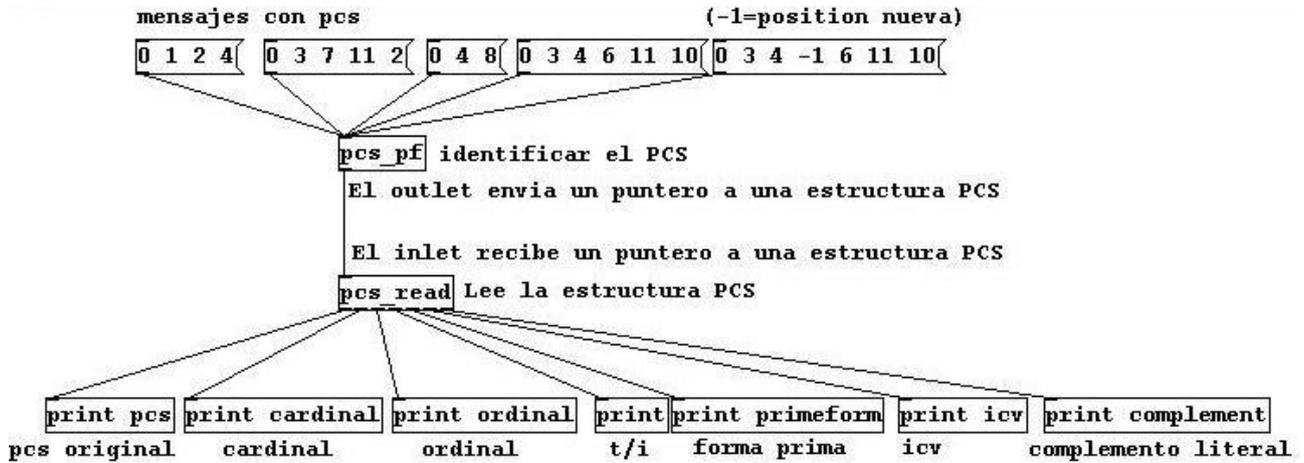


Figura 22: *patch* de *pd* como ejemplo de uso de los objetos *pcs_pf* y *pcs_read* en combinación

Nombre	pcs_ttos
Descripción	El objeto <i>pcs_ttos</i> (<i>twelve-tone operator</i>) realiza operaciones de transposición, inversión transpuesta o multiplicación en un PCS.
Entradas	<i>Inlet 1</i> (izquierdo): Si recibe un símbolo "I", "T" o "M", efectúa las operaciones IT(n), T(n) o M(n) respectivamente en el PCS entregado. <i>Inlet 2</i> : un puntero a una estructura PCS. <i>Inlet 3</i> : un <i>float</i> (<i>n</i>) en sus inlets pasivos.
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a la estructura PCS resultante. Para acceder a los datos, debe usarse otro objeto <i>pcs</i> (usualmente, un objeto <i>pcs_read</i>).

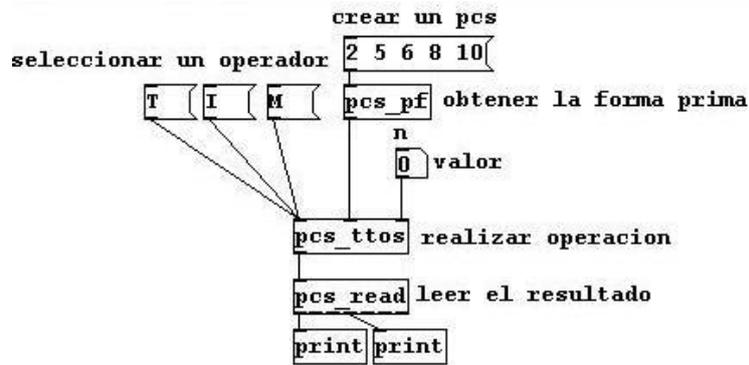


Figura 23: patch de *pd* como ejemplo de uso del objeto *pcs_ttos*

Nombre	pcs_subs
Descripción	El objeto <i>pcs_subs</i> obtiene los subconjuntos (<i>subsets</i>) de cardinal <i>n</i> de un PCS.
Entradas	<i>Inlet 1</i> : un puntero a una estructura PCS. <i>Inlet 2</i> : un <i>flota</i> (<i>n</i>) en su inlet derecho. <i>n</i> debe estar en el rango de 3 a 8.
Salidas	<i>Outlet</i> : una sucesión de punteros a las estructuras de los PCS. Para acceder a los datos, debe usarse otro objeto <i>pcs</i> (usualmente, un objeto <i>pcs_read</i>).

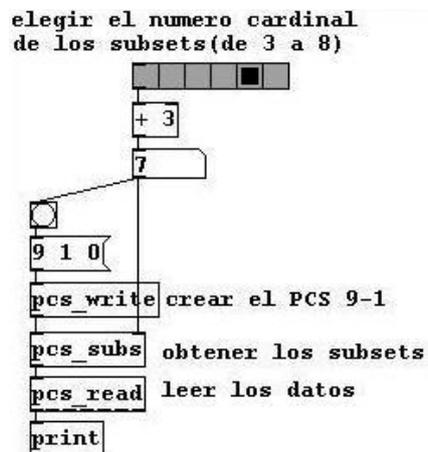
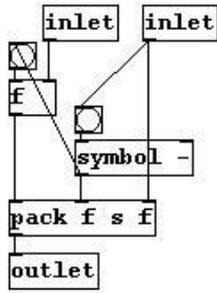


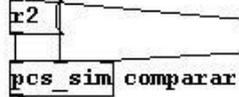
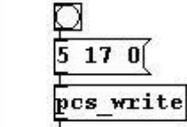
Figura 24: *patch* de *pd* como ejemplo de uso del objeto *pcs_subs*

Nombre	pcs_sim
Descripción	El objeto <i>pcs_sim</i> evalúa el grado de similitud de dos SC de acuerdo con los criterios de Forte, Morris o Isaacson (Véase la bibliografía citada para más detalles). En adición, también evalúa su pertenencia a los complejos Kh (véase Forte, 1978).
Entradas	<p><i>Inlet 1</i>: "icvsim" (símbolo) para seleccionar la similitud de Isaacson; "r0" "r1" "r2" ó "rp" (símbolos) para seleccionar las similitudes de Forte; "SIM" o "ASIM" (símbolos) para seleccionar las similitudes de Morris; "Kh" (símbolo) para comprobar si los dos PCS pertenecen al mismo complejo Kh; "Khall" (símbolo) para obtener las SCs de todos los miembros del complejo Kh al que pertenecen los dos PCS.</p> <p><i>Inlets 2 y 3</i>: los dos punteros a las estructuras de los PCS a ser comparados. Estos deben ser generados usando un objeto que produzca un puntero a una estructura PCS (habitualmente, un objeto <i>pcs_pf</i>)</p>
Salidas	<p><i>Outlet</i>: un <i>float</i> con el valor correspondiente, en el caso de las similitudes de Morris o Isaacson.</p> <p>En el caso de las similitudes de Forte, si la relación solicitada es <i>r0</i>, <i>r1</i> o <i>r2</i> y se cumple, la salida es un <i>bang</i>, en caso contrario no se genera salida. Si la relación solicitada es <i>rp</i> y se cumple, la salida es una lista con los números ordinales de las SC en común entre las dos SC comparadas. En caso contrario, no se genera salida. El número cardinal de las SC compartidas es igual al de las SC comparadas menos uno.</p> <p>En el caso de <i>Kh</i>, si los dos PCS pertenecen al mismo complejo Kh, se envía un <i>bang</i>, en caso contrario no se genera salida.. En el caso de <i>Khall</i>, si los dos PCS pertenecen al mismo complejo Kh, la salida es una sucesión de listas de dos <i>floats</i> cada una, siendo el primero de cada pareja el número cardinal de la SC-miembro y el segundo su número ordinal. Si los dos PCS no pertenecen al mismo complejo Kh, no se realiza ninguna acción.</p>

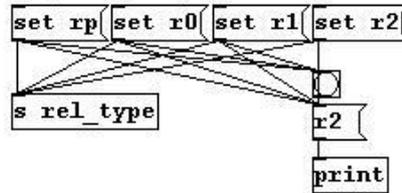
la abstracción "pcs-name"



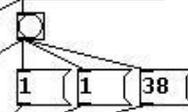
crear un PCS



elegir el tipo de relacion



r rel_type



todas las SC de cardinal 5

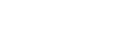
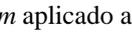
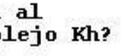
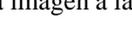
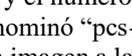
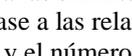
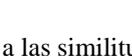
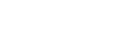
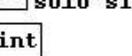
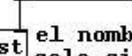
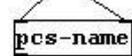
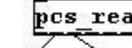
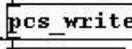
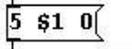
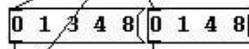


Figura 25: *patch* de *pd* como ejemplo del uso del objeto *pcs_sim* aplicado a las similitudes de Forte. Aquí se crea un PCS de cardinal 5 y se lo compara con todas las otras SC de cardinal 5 en base a las relaciones de similitud de Forte. Se usa una “abstracción” (un *sub-patch* de *pd*) para extraer el número cardinal y el número ordinal de un PCS en incluirlo en una lista con un guión intercalado. Como esta abstracción (que se denominó “*pcs-name*”) aparece también en muchos de los ejemplos subsiguientes, se muestra en la imagen a la izquierda.

crear dos PCS



Muestra todas las SC miembro del complejo Kh



pertenecen al mismo complejo Kh?

Figura 26: *patch* de *pd* como ejemplo de uso del objeto *pcs_sim* aplicado a los complejos Kh

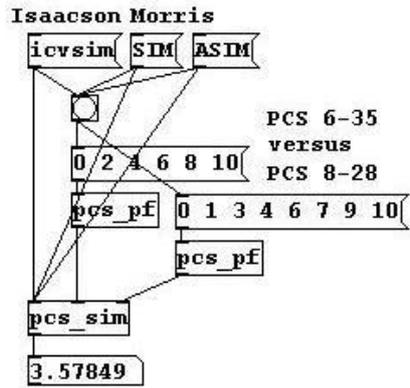


Figura 27: *patch* de *pd* como ejemplo de uso del objeto *pcs_sim* aplicado a las similitudes de Morris (SIM y ASIM) e Isaacson (icvsim)

Nombre	pcs_invar
Descripción	El objeto <i>pcs_invar</i> obtiene los PCs invariantes de dos PCS.
Entradas	<i>Inlets 1</i> y <i>2</i> : los dos punteros a las estructuras de los PCS a ser comparados. Estos deben ser generados usando un objeto que produzca un puntero a una estructura PCS (habitualmente, un objeto <i>pcs_pf</i>)
Salidas	<i>Outlet 1</i> : PC invariantes (i.e., comunes a ambos PCSs) -si hay- (lista de <i>floats</i>). <i>Outlet 2</i> : cantidad de invariantes (<i>float</i>), o sea, número cardinal del conjunto invariante.

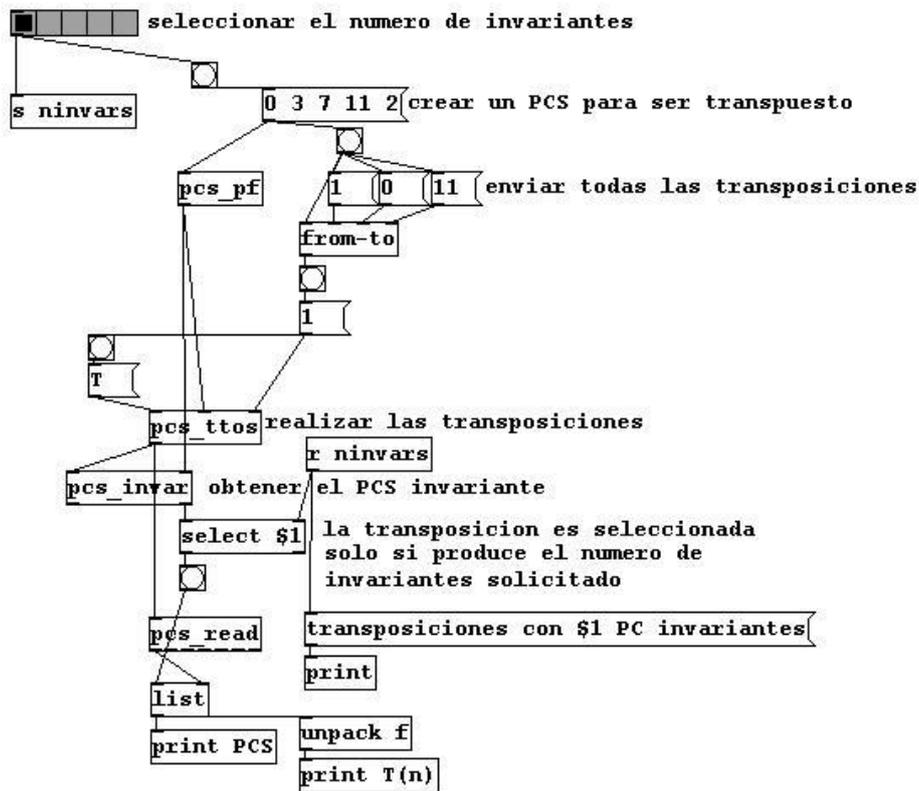


Figura 28: *patch* de *pd* como ejemplo de uso del objeto *pcs_invar*. Aquí se crea un PCS y luego se obtienen sus once trasposiciones, estas son comparadas con el original y se seleccionan aquellas que contengan el número de invariantes que se desea

Nombre	pcs_parts
Descripción	El objeto <i>pcs_invar</i> obtiene todas las particiones binarias posibles de un PCS.
Entradas	<i>Inlet</i> : un puntero a una estructura PCS. El número cardinal del PCS debe ser 5 o 6.
Salidas	<i>outlet1</i> : PC de la parte izquierda de la partición (lista de <i>floats</i>) <i>outlet2</i> : PC de la parte derecha de la partición (lista de <i>floats</i>) <i>outlet3</i> : un <i>float</i> que indica el tipo de partición (0, 1, 2, 3, 4, ó 12).

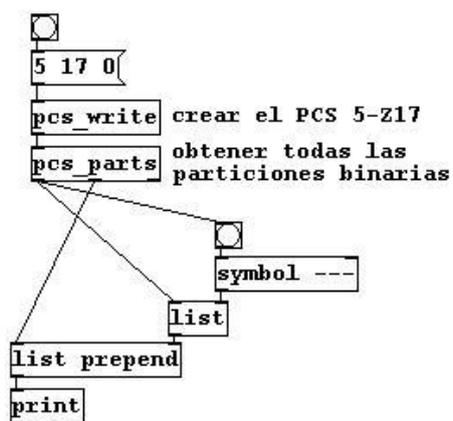


Figura 29: patch de pd como ejemplo de uso del objeto *pcs_parts*

B - Objetos para Matrices Combinatorias (CM)

B.1 –Generadores de CM

Nombre	cm_roman
Descripción	El objeto <i>cm_roman</i> crea una matriz del tipo cuadrado romano (véase Morris, 1984, 1987).
Entradas	<i>Inlet</i> : un puntero a una estructura PCS.
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a una estructura CM. Para acceder a los datos, debe usarse alguno de los objetos lectores de CM.

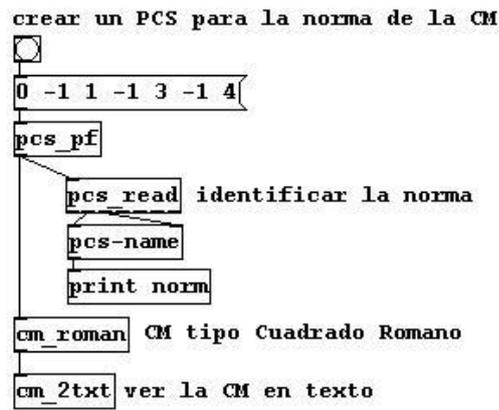


Figura 30: patch de *pd* como ejemplo de uso del objeto *cm_roman*

Nombre	cm_t1a
Descripción	El objeto <i>cm_t1a</i> crea una matriz del tipo I A (véase Morris, 1984, 1987).
Entradas	<i>Inlet</i> : un puntero a una estructura PCS.
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a una estructura CM. Para acceder a los datos, debe usarse alguno de los objetos lectores de CM.

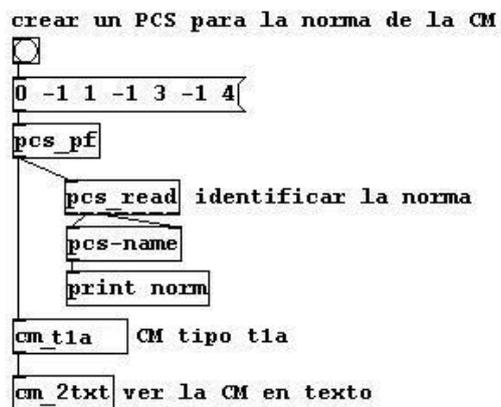


Figura 31: patch de *pd* como ejemplo de uso del objeto *cm_t1a*

Nombre	cm_t1b
Descripción	El objeto <i>cm_t1b</i> crea una matriz del tipo I B (véase Morris, 1984, 1987).
Entradas	<i>Inlet</i> : un puntero a una estructura PCS.
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a una estructura CM. Para acceder a los datos, debe usarse alguno de los objetos lectores de CM.

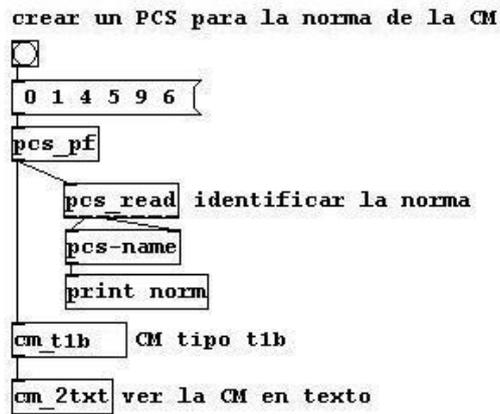


Figura 32: *patch* de *pd* como ejemplo de uso del objeto *cm_t1b*

Nombre	cm_t2
Descripción	El objeto <i>cm_t2</i> crea una matriz del tipo II (véase Morris, 1984, 1987).
Entradas	<i>Inlets 1 y 2</i> : punteros a dos estructuras PCS para las normas vertical y horizontal respectivamente.
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a una estructura CM. Para acceder a los datos, debe usarse alguno de los objetos lectores de CM.

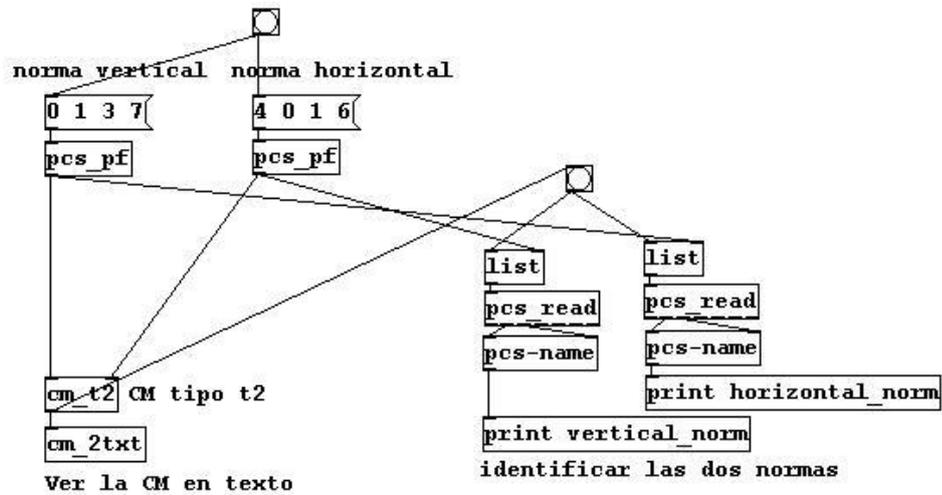


Figura 33: *patch* de *pd* como ejemplo de uso del objeto *cm_t2*

Nombre	cm_opcy
Descripción	El objeto <i>cm_opcy</i> crea una matriz con el método de ciclos de operadores (véase Morris, 1984, 1987).
Entradas	<i>Inlet 1</i> : un símbolo que indica el operador de ciclos a utilizar. Debe ser uno de los siguientes: T2/A, T6TI, T3/9 o T4/8. <i>Inlet 2</i> : un puntero a una estructura PCS.
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a una estructura CM. Para acceder a los datos, debe usarse alguno de los objetos lectores de CM.

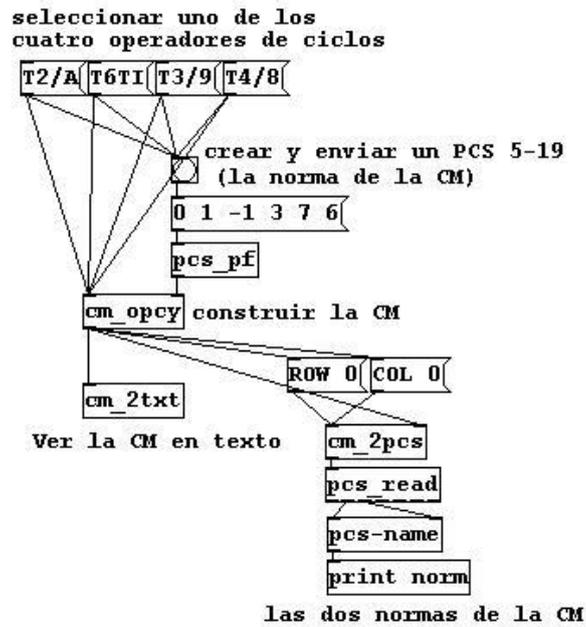


Figura 34: patch de pd como ejemplo de uso del objeto *cm_opcy*

B.2 –Lectores de CM

Nombre	cm_2txt
Descripción	El objeto <i>cm_2txt</i> imprime en la pantalla de <i>pd</i> una versión “limpia” (i.e., no “cruda”) de una estructura CM. Los enteros 10 y 11 son reemplazados por <i>A</i> y <i>B</i> , respectivamente.
Entradas	<i>Inlet</i> : un puntero a una estructura CM que puede ser creada con los objetos generadores de CM precedentes. Ver los ejemplos en las imágenes 11, 12, 13, 14 y 15, que usan a los objetos creadores de CM en conjunto con el objeto <i>cm_2txt</i> .
Salidas	No posee.

Nombre	cm_read
Descripción	El objeto <i>cm_read</i> obtiene los datos “crudos” de una estructura CM. Un valor de -3 o de -4 indican espacios o posiciones vacías, respectivamente. Si se desea sólo ver una versión “limpia” de la CM, usar el objeto <i>cm_2txt</i> .
Entradas	<i>Inlet</i> : un puntero a una estructura CM que puede ser creada con los objetos generadores de CM precedentes.
Salidas	<i>Outlet 1</i> : una sucesión de listas de <i>floats</i> siendo cada una de ellas una fila de la CM. <i>Outlet 2</i> : número de filas de la CM (<i>float</i>). <i>Outlet 3</i> : número de columnas de la CM (<i>float</i>). <i>Outlet 4</i> : número máximo de PC para cada posición de la CM (<i>float</i>).

Nombre	cm_2pcs
Descripción	El objeto <i>cm_2pcs</i> extrae un PCS de una CM.
Entradas	<i>Inlet 1</i> : una de las siguientes posibilidades: POS (<i>symbol</i>) <i>r</i> (<i>float</i>) <i>c</i> (<i>float</i>): Obtiene el PCS en la posición <i>r</i> (fila) <i>c</i> (columna). ROW (<i>symbol</i>) <i>r</i> (<i>float</i>): Obtiene el PCS integrado por todos los PC en las posiciones de <i>r</i> (fila). COL (<i>symbol</i>) <i>c</i> (<i>float</i>): Obtiene el PCS integrado por todos los PC en las posiciones de <i>c</i> (columna). ALL (<i>symbol</i>): Obtiene el PCS integrado por todos los PC en todas las posiciones de la CM. <i>Inlet 2</i> : un puntero a una estructura CM, que puede ser creada con los objetos generadores de CM precedentes.
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a la estructura PCS resultante. Para acceder a los datos, debe usarse otro objeto <i>pcs</i> (usualmente, un objeto <i>pcs_read</i>).

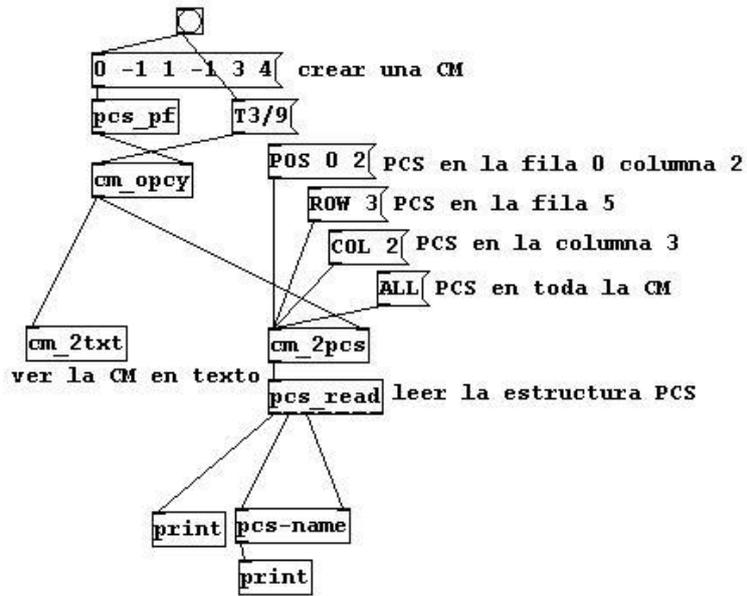


Figura 35: *patch* de *pd* como ejemplo de uso del objeto *cm_2pcs*

B.3 –Modificadores de CM

Nombre	cm_trans
Descripción	El objeto <i>cm_trans</i> realiza varias transformaciones de una CM.
Entradas	<p><i>Inlet 1</i>: una de las siguientes posibilidades: T (<i>symbol</i>) n (<i>float</i>): transposición por n. I (<i>symbol</i>) n (<i>float</i>): inversión seguida de transposición por n (n = 0 es obligatorio en este caso si solo se requiere inversión). RD (<i>symbol</i>) n (<i>float</i>): rotación por la diagonal, n = 0 significa izquierda superior, n = 1 significa derecha inferior. R90 (<i>symbol</i>): rotación de 90 grados. ER (<i>symbol</i>) r1 (<i>float</i>) r2 (<i>float</i>): intercambiar el contenido de las filas r1 y r2. EC (<i>symbol</i>) c1 (<i>float</i>) c2 (<i>float</i>): intercambiar el contenido de las columnas c1 y c2. SWAP: intentar disminuir la densidad de las posiciones de la CM intercambiando PC en sus filas y/o columnas. Esta transformación puede fallar si la densidad no puede ser reducida por intercambio. En este caso no se generará salida y se enviará un mensaje de advertencia a la pantalla de <i>pd</i>. <i>Inlet 2</i>: un puntero a una estructura CM que puede ser creada con los objetos generadores de CM precedentes.</p>
Salidas	<i>Outlet</i> : un puntero a una estructura CM. Para acceder a los datos, debe usarse alguno de los objetos lectores de CM.

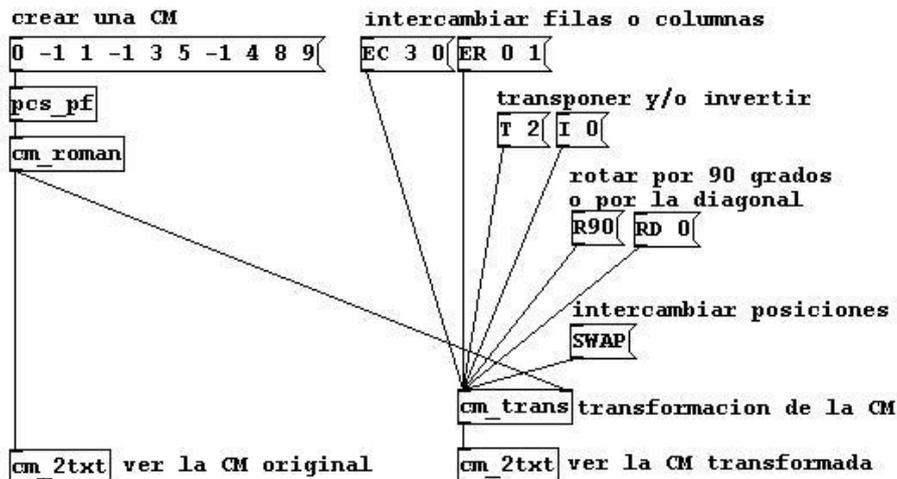


Figura 36: *patch* de *pd* como ejemplo de uso del objeto *cm_trans*

Conclusiones

Los ejemplos que se expusieron son sencillos, pero suficientes para mostrar las potencialidades de la programación estructurada usando las técnicas que se trataron en este libro dentro del entorno *pd*. Asimismo, solo tienen una salida numérica, y no de Gráfica Musical o Audio. Se han realizado así para evitar la inclusión de *patches* de *pd* que poseerían una representación gráfica sumamente intrincada.

Sin embargo, no se le escapará al lector instruido en la Computación Aplicada a la Música y, específicamente, en la programación dentro del entorno *pd* que, dado que *pd* es un poderosísimo entorno, la misma salida numérica de los ejemplos puede combinarse fácilmente con otros objetos dedicados a Audio Digital y MIDI, como así también pueden realizarse combinaciones sucesivas y/o simultáneas de las estructuras que se obtengan (de hecho, una CM es una combinación de PCS sucesivos y simultáneos). Asimismo, los objetos dedicados a PCS y CM pueden entrelazarse de maneras sumamente complejas.

Puede así trabajarse luego sobre el registro, timbre, organización temporal, etc. derivando propiedades de las CM o de los PCS o bien a la inversa, derivando de la organización temporal y/o espectral (por mencionar solo a dos de ellas) propiedades a ser trasladadas a la organización de la altura temperada. De esta manera se pueden realizar diversos entornos que permitan una “respuesta programada” a secuencias de notas musicales ingresadas “en tiempo real” con el objeto de producir música o recursos didácticos.

El límite sigue siendo, siempre, nuestra capacidad de imaginación y creación.

Tabla de las Clases de Conjuntos

N	FP	M/MI	ICV	IV	CINT₁
(1-1)	[0]	1	[1000000]	<1111BBBB>	<0>

N	FP	M/MI	ICV	IV	CINT₁
(2-1)	[01]	5	[2100000]	<11009988>	<1B>
(2-2)	[02]	2	[2010000]	<11119999>	<2A>
(2-3)	[03]	3	[2001000]	<11119999>	<39>
(2-4)	[04]	4	[2000100]	<11119999>	<48>
(2-5)	[05]	1	[2000010]	<11009988>	<57>
(2-6)	[06]	6	[2000001]	<2222AAAA>	<66>

N	FP	M/MI	ICV	IV	CINT₁
(3-1)	[012]	9	[3210000]	<11007744>	<11A>
(3-2)	[013]	7	[3111000]	<10005655>	<129>
(3-3)	[014]	11	[3101100]	<10005655>	<138>
(3-4)	[015]	4	[3100110]	<10105656>	<147>
(3-5)	[016]	5	[3100011]	<10016776>	<156>
(3-6)	[024]	6	[3020100]	<11117777>	<228>
(3-7)	[025]	2	[3011010]	<10005655>	<237>
(3-8)	[026]	8	[3010101]	<10016776>	<246>
(3-9)	[027]	1	[3010020]	<11007744>	<255>
(3-10)	[036]	10	[3002001]	<11118888>	<336>
(3-11)	[037]	3	[3001110]	<10005655>	<345>
(3-12)	[048]	12	[3000300]	<33339999>	<444>

N	FP	M/MI	Z	ICV	IV	CINT₁
(4-1)	[0123]	23		[4321000]	<11005511>	<1119>
(4-2)	[0124]	22		[4221100]	<10003411>	<1128>
(4-3)	[0134]	26		[4212100]	<11003322>	<1218>
(4-4)	[0125]	14		[4211110]	<10001323>	<1137>
(4-5)	[0126]	16		[4210111]	<10002432>	<1146>
(4-6)	[0127]	6		[4210021]	<11114444>	<1155>
(4-7)	[0145]	20		[4201210]	<11003333>	<1317>
(4-8)	[0156]	8		[4200121]	<11114444>	<1416>
(4-9)	[0167]	9		[4200022]	<22226666>	<1515>
(4-10)	[0235]	10		[4122010]	<11113333>	<2127>
(4-11)	[0135]	11		[4121110]	<10101313>	<1227>
(4-12)	[0236]	27		[4112101]	<10002432>	<2136>
(4-13)	[0136]	13		[4112011]	<10012442>	<1236>
(4-14)	[0237]	4		[4111120]	<10001323>	<2145>

(4-15)	[0146]	29	(29)	[4111111]	<10000331>	<1326>
(4-16)	[0157]	5		[4110121]	<10002432>	<1425>
(4-17)	[0347]	17		[4102210]	<11113333>	<3135>
(4-18)	[0147]	18		[4102111]	<10012442>	<1335>
(4-19)	[0148]	19		[4101310]	<10103535>	<1344>
(4-20)	[0158]	7		[4101220]	<11003333>	<1434>
(4-21)	[0246]	21		[4030201]	<11116666>	<2226>
(4-22)	[0247]	2		[4021120]	<10003411>	<2235>
(4-23)	[0257]	1		[4021030]	<11005511>	<2325>
(4-24)	[0248]	24		[4020301]	<11116666>	<2244>
(4-25)	[0268]	25		[4020202]	<22226666>	<2424>
(4-26)	[0358]	3		[4012120]	<11003322>	<3234>
(4-27)	[0258]	12		[4012111]	<10002432>	<2334>
(4-28)	[0369]	28		[4004002]	<44448888>	<3333>
(4-29)	[0137]	15	(15)	[4111111]	<10000331>	<1245>

N	FP	M/MI	Z	ICV	IV	CINT₁
(5-1)	[01234]	35		[5432100]	<11003300>	<11118>
(5-2)	[01235]	23		[5332110]	<10001211>	<11127>
(5-3)	[01245]	27		[5322210]	<10001110>	<11217>
(5-4)	[01236]	29		[5322111]	<10000200>	<11136>
(5-5)	[01237]	14		[5321121]	<10000111>	<11145>
(5-6)	[01256]	20		[5311221]	<10000111>	<11316>
(5-7)	[01267]	7		[5310132]	<10012332>	<11415>
(5-8)	[02346]	34		[5232201]	<11002200>	<21126>
(5-9)	[01246]	24		[5231211]	<10000201>	<11226>
(5-10)	[01346]	25		[5223111]	<10000110>	<12126>
(5-11)	[02347]	11		[5222220]	<10101111>	<21135>
(5-12)	[01356]	12	(36)	[5222121]	<11110000>	<12216>
(5-13)	[01248]	30		[5221311]	<10000201>	<11244>
(5-14)	[01257]	5		[5221131]	<10000111>	<11325>
(5-15)	[01268]	15		[5220222]	<11112222>	<11424>
(5-16)	[01347]	32		[5213211]	<10000110>	<12135>
(5-17)	[01348]	37	(37)	[5212320]	<11001122>	<12144>
(5-18)	[01457]	38	(38)	[5212221]	<10000110>	<13125>
(5-19)	[01367]	19		[5212122]	<10010220>	<12315>
(5-20)	[01568]	6		[5211231]	<10000111>	<14124>
(5-21)	[01458]	21		[5202420]	<10103333>	<13134>
(5-22)	[01478]	22		[5202321]	<11112222>	<13314>
(5-23)	[02357]	2		[5132130]	<10001211>	<21225>
(5-24)	[01357]	9		[5131221]	<10000201>	< 12225>
(5-25)	[02358]	10		[5123121]	<10000110>	<21234>
(5-26)	[02458]	26		[5122311]	<10100202>	<22134>
(5-27)	[01358]	3		[5122230]	<10001110>	<12234>
(5-28)	[02368]	28		[5122212]	<10010220>	<21324>
(5-29)	[01368]	4		[5122131]	<10000200>	<12324>
(5-30)	[01468]	13		[5121321]	<10000201>	<13224>
(5-31)	[01369]	31		[5114112]	<10010330>	<12333>
(5-32)	[01469]	16		[5113221]	<10000110>	<13233>
(5-33)	[02468]	33		[5040402]	<11116666>	<22224>
(5-34)	[02469]	8		[5032221]	<11002200>	<22233>
(5-35)	[02479]	1		[5032140]	<11003300>	<22323>
(5-36)	[01247]	36	(12)	[5222121]	<10010110>	<11235>
(5-37)	[03458]	17	(17)	[5212320]	<11001122>	<31134>
(5-38)	[01258]	18	(18)	[5212221]	<10000110>	<11334>

N	FP	M/MI	Z	ICV	IV	CINT₁
(6-1)	[012345]	32		[6543210]	<11001100>	<111117>
(6-2)	[012346]	33		[6443211]	<10000100>	<111126>
(6-3)	[012356]	25	(36)	[6433221]	<10000000>	<111216>
(6-4)	[012456]	26	(37)	[6432321]	<11000000>	<112116>
(6-5)	[012367]	18		[6422232]	<10000100>	<111315>
(6-6)	[012567]	38	(38)	[6421242]	<11000011>	<113115>
(6-7)	[012678]	7		[6420243]	<22222222>	<114114>
(6-8)	[023457]	8		[6343230]	<11111111>	<211125>
(6-9)	[012357]	9		[6342231]	<10100101>	<111225>
(6-10)	[013457]	46	(39)	[6333321]	<10000000>	<121125>
(6-11)	[012457]	40	(40)	[6333231]	<10000010>	<112125>
(6-12)	[012467]	12	(41)	[6332232]	<10010000>	<112215>
(6-13)	[013467]	50	(42)	[6324222]	<11000000>	<121215>
(6-14)	[013458]	14		[6323430]	<10101010>	<121134>
(6-15)	[012458]	31		[6323421]	<10000100>	<112134>
(6-16)	[014568]	16		[6322431]	<10100101>	<131124>
(6-17)	[012478]	17	(43)	[6322332]	<10010000>	<112314>
(6-18)	[012578]	5		[6322242]	<10000100>	<113214>
(6-19)	[013478]	44	(44)	[6313431]	<10000010>	<121314>
(6-20)	[014589]	20		[6303630]	<33333333>	<131313>
(6-21)	[023468]	34		[6242412]	<10000100>	<211224>
(6-22)	[012468]	22		[6241422]	<10100101>	<112224>
(6-23)	[023568]	23	(45)	[6234222]	<11110000>	<212124>
(6-24)	[013468]	39	(46)	[6233331]	<10000000>	<121224>
(6-25)	[013568]	3	(47)	[6233241]	<10000000>	<122124>
(6-26)	[013578]	4	(48)	[6232341]	<11000000>	<122214>
(6-27)	[013469]	27		[6225222]	<10010110>	<121233>
(6-28)	[013569]	28	(49)	[6224322]	<11110000>	<122133>
(6-29)	[023679]	42	(50)	[6224232]	<11000000>	<213123>
(6-30)	[013679]	30		[6224223]	<20020220>	<123123>
(6-26)	[013578]	4	(48)	[6232341]	<11000000>	<122214>
(6-27)	[013469]	27		[6225222]	<10010110>	<121233>
(6-28)	[013569]	28	(49)	[6224322]	<11110000>	<122133>
(6-29)	[023679]	42	(50)	[6224232]	<11000000>	<213123>
(6-30)	[013679]	30		[6224223]	<20020220>	<123123>
(6-31)	[014579]	15		[6223431]	<10000100>	<131223>
(6-32)	[024579]	1		[6143250]	<11001100>	<221223>
(6-33)	[023579]	2		[6143241]	<10000100>	<212223>
(6-34)	[013579]	21		[6142422]	<10000100>	<122223>
(6-35)	[02468A]	35		[6060603]	<66666666>	<222222>
(6-36)	[012347]	47	(3)	[6433221]	<10000000>	<111135>
(6-37)	[012348]	48	(4)	[6432321]	<11000000>	<111144>
(6-38)	[012378]	6	(6)	[6421242]	<11000011>	<111414>
(6-39)	[023458]	24	(10)	[6333321]	<10000000>	<211134>
(6-40)	[012358]	11	(11)	[6333231]	<10000010>	<111234>
(6-41)	[012368]	41	(12)	[6332232]	<10010000>	<111324>
(6-42)	[012369]	29	(13)	[6324222]	<11000000>	<111333>
(6-43)	[012568]	43	(17)	[6322332]	<10010000>	<113124>
(6-44)	[012569]	19	(19)	[6313431]	<10000010>	<113133>
(6-45)	[023469]	45	(23)	[6234222]	<11110000>	<211233>
(6-46)	[012469]	10	(24)	[6233331]	<10000000>	<112233>
(6-47)	[012479]	36	(25)	[6233241]	<10000000>	<112323>
(6-48)	[012579]	37	(26)	[6232341]	<11000000>	<113223>

(6-49)	[013479]	49	(28)	[6224322]	<11110000>	<121323>
(6-50)	[014679]	13	(29)	[6224232]	<11000000>	<132123>

N	FP	M/MI	Z	ICV	IV	CINT₁
(7-1)	[0123456]	35		[7654321]	<11000000>	<1111116>
(7-2)	[0123457]	23		[7554331]	<10000000>	<1111125>
(7-3)	[0123458]	27		[7544431]	<10000000>	<1111134>
(7-4)	[0123467]	29		[7544332]	<10000000>	<1111215>
(7-5)	[0123567]	14		[7543342]	<10000000>	<1112115>
(7-6)	[0123478]	20		[7533442]	<10000000>	<1111314>
(7-7)	[0123678]	7		[7532353]	<10010000>	<1113114>
(7-8)	[0234568]	34		[7454422]	<11000000>	<2111124>
(7-9)	[0123468]	24		[7453432]	<10000000>	<1111224>
(7-10)	[0123469]	25		[7445332]	<10000000>	<1111233>
(7-11)	[0134568]	11		[7444441]	<10100000>	<1211124>
(7-12)	[0123479]	12	(36)	[7444342]	<11110000>	<1111323>
(7-13)	[0124568]	30		[7443532]	<10000000>	<1121124>
(7-14)	[0123578]	5		[7443352]	<10000000>	<1112214>
(7-15)	[0124678]	15		[7442443]	<11110000>	<1122114>
(7-16)	[0123569]	32		[7435432]	<10000000>	<1112133>
(7-17)	[0124569]	37	(37)	[7434541]	<11000000>	<1121133>
(7-18)	[0123589]	38	(38)	[7434442]	<10000000>	<1311123>
(7-19)	[0123679]	19		[7434343]	<10010000>	<1113123>
(7-20)	[0125679]	6		[7433452]	<10000000>	<1131123>
(7-21)	[0124589]	21		[7424641]	<10100000>	<1121313>
(7-22)	[0125689]	22		[7424542]	<11110000>	<1131213>
(7-23)	[0234579]	2		[7354351]	<10000000>	<2111223>
(7-24)	[0123579]	9		[7353442]	<10000000>	<1112223>
(7-25)	[0234679]	10		[7345342]	<10000000>	<2112123>
(7-26)	[0134579]	26		[7344532]	<10100000>	<1211223>
(7-27)	[0124579]	3		[7344451]	<10000000>	<1121223>
(7-28)	[0135679]	28		[7344433]	<10010000>	<1221123>
(7-29)	[0124679]	4		[7344352]	<10000000>	<1122123>
(7-30)	[0124689]	13		[7343542]	<10000000>	<1122213>
(7-31)	[0134679]	31		[7336333]	<10010000>	<1212123>
(7-32)	[0134689]	16		[7335442]	<10000000>	<1212213>
(7-33)	[012468A]	33		[7262623]	<11110000>	<1122222>
(7-34)	[013468A]	8		[7254442]	<11000000>	<1212222>
(7-35)	[013568A]	1		[7254361]	<11000000>	<1221222>
(7-36)	[0123568]	36	(12)	[7444342]	<10010000>	<1112124>
(7-37)	[0134578]	17	(17)	[7434541]	<11000000>	<1211214>
(7-38)	[0124578]	18	(18)	[7434442]	<10000000>	<1121214>

N	FP	M/MI	Z	ICV	IV	CINT₁
(8-1)	[01234567]	23		[8765442]	<11000000>	<11111115>
(8-2)	[01234568]	22		[8665542]	<10000000>	<11111124>
(8-3)	[01234569]	26		[8656542]	<11000000>	<11111133>
(8-4)	[01234578]	14		[8655552]	<10000000>	<11111214>
(8-5)	[01234678]	16		[8654553]	<10000000>	<11112114>
(8-6)	[01235678]	6		[8654463]	<11110000>	<11121114>
(8-7)	[01234589]	20		[8645652]	<11000000>	<11111313>
(8-8)	[01234789]	8		[8644563]	<11110000>	<11113113>
(8-9)	[01236789]	9		[8644464]	<22220000>	<11131113>
(8-10)	[02345679]	10		[8566452]	<11110000>	<21111123>
(8-11)	[01234579]	11		[8565552]	<10100000>	<11111223>

(8-12)	[01345679]	27		[8556543]	<1000000>	<12111123>
(8-13)	[01234679]	13		[8556453]	<10010000>	<11112123>
(8-14)	[01245679]	4		[8555562]	<10000000>	<11211123>
(8-15)	[01234689]	29	(29)	[8555553]	<10000000>	<11112213>
(8-16)	[01235789]	5		[8554563]	<10000000>	<11122113>
(8-17)	[01345689]	17		[8546652]	<11110000>	<12111213>
(8-18)	[01235689]	18		[8546553]	<10010000>	<11121213>
(8-19)	[01245689]	19		[8545752]	<10100000>	<11211213>
(8-20)	[01245789]	7		[8545662]	<11000000>	<11212113>
(8-21)	[0123468A]	21		[8474643]	<11110000>	<11112222>
(8-22))[0123568A]	2		[8465562]	<10000000>	<11121222>
(8-23)	[0123578A]	1		[8465472]	<11000000>	<11122122>
(8-24)	[0124568A]	24		[8464743]	<11110000>	<11211222>
(8-25)	[0124678A]	25		[8464644]	<22220000>	<11221122>
(8-26)	[0134578A]	3		[8456562]	<11000000>	<12112122>
(8-27)	[0124578A]	12		[8456553]	<10000000>	<11212122>
(8-28)	[0134679A]	28		[8448444]	<44440000>	<12121212>
(8-29)	[01235679]	15	(15)	[8555553]	<10000000>	<11121123>

N	FP	M/MI	ICV	IV	CINT₁
(9-1)	[012345678]	9	[9876663]	<11000000>	<111111114>
(9-2)	[012345679]	7	[9777663]	<10000000>	<111111123>
(9-3)	[012345689]	11	[9767763]	<10000000>	<111111213>
(9-4)	[012345789]	4	[9766773]	<10100000>	<111112113>
(9-5)	[012346789]	5	[9766674]	<10010000>	<111121113>
(9-6)	[01234568A]	6	[9686763]	<11110000>	<111111222>
(9-7)	[01234578A]	2	[9677673]	<10000000>	<111112122>
(9-8)	[01234678A]	8	[9676764]	<10010000>	<111121122>
(9-9)	[01235678A]	1	[9676683]	<11000000>	<111211122>
(9-10)	[01234679A]	10	[9668664]	<11110000>	<111121212>
(9-11)	[01235679A]	3	[9667773]	<10000000>	<111211212>
(9-12)	[01245689A]	12	[9666963]	<33330000>	<112112112>

N	FP	M/MI	ICV	IV	CINT₁
(10-1)	[0123456789]	5	[A988884]	<11000000>	<111111113>
(10-2)	[012345678A]	2	[A898884]	<11110000>	<111111122>
(10-3)	[012345679A]	3	[A889884]	<11110000>	<111111212>
(10-4)	[012345689A]	4	[A888984]	<11110000>	<1111112112>
(10-5)	[012345789A]	1	[A888894]	<11000000>	<1111121112>
(10-6)	[012346789A]	6	[A888885]	<22220000>	<1111211112>

N	FP	M/MI	ICV	IV	CINT₁
(11-1)	[0123456789A]	1	[BAAAAA5]	<11110000>	<1111111112>

N	FP	M/MI	ICV	IV	CINT₁
(12-1)	[0123456789AB]	1	[CCCCCC6]	<CCCC0000>	<1111111111>

Complejos Kh_{24}

Conjuntos de cardinal 4

4-1(12)

3. 1 2

5. 1 2 4 5

6. 1 2 3/36 5 8 9

4-2(25)

3. 1 2 3 6

5. 1 2 3 8 9 11 13 36

6. 1 2 3/36 4/37 8 9 10/39 11/40 14 15 16 21 22

4-3(14)

3. 2 3

5. 1 3 10 16 17

6. 1 2 3/36 4/37 14 15 27

4-4(24)

3. 1 3 4 7

5. 2 3 4 6 11 14 37 38

6. 1 2 3/36 5 8 9 10/39 11/40 14 15 16 18

4-5(26)

3. 1 4 5 8

5. 4 5 6 7 9 13 15 38

6. 2 3/36 4/37 5 6/38 7 9 12/41 15 16 17/43 18 21 22

4-6(14)

3. 1 5 9

5. 5 7 14 36

6. 5 6/38 7 9 11/40 12/41 18

4-7(14)

3. 3 4

5. 3 6 18 21

6. 1 5 14 15 16 19/44 20 31

4-8(13)

3. 4 5

5. 6 7 20 22

6. 5 6/38 7 16 17/43 18 19/44

²⁴ Los datos sobre los complejos Kh que se muestran en este Apéndice fueron obtenidos por medio de un programa informático especialmente escrito a tal efecto por los autores de este libro.

4-9(8)

- 3. 5
- 5. 7 19
- 6. 5 6/38 7 18 30

4-10(14)

- 3. 2 7
- 5. 2 10 23 25
- 6. 1 2 8 9 11/40 27 32 33

4-11(26)

- 3. 2 4 6 7
- 5. 2 3 9 23 24 26 27
- 6. 1 2 8 9 10/39 11/40 14 15 21 22 24/46 31 32 33 34

4-12(25)

- 3. 2 3 8 10
- 5. 4 8 10 16 18 26 28 31
- 6. 2 3/36 5 10/39 13/42 15 21 23/45 27 28/49 30 31 34

4-13(25)

- 3. 2 5 7 10
- 5. 4 10 12 19 25 29 31 36
- 6. 2 3/36 5 11/40 12/41 13/42 18 23/45 25/47 27 29/50 30 33

4-14(24)

- 3. 2 4 9 11
- 5. 5 11 17 18 20 23 27 29
- 6. 5 8 9 11/40 14 16 18 24/46 25/47 31 32 33

4-15(26)

- 3. 3 5 7 8
- 5. 6 9 10 14 19 28 30 32
- 6. 2 5 9 12/41 16 17/43 18 21 22 24/46 27 30 31 34

4-16(26)

- 3. 4 5 8 9
- 5. 7 14 15 18 20 24 29 30
- 6. 5 6/38 7 9 12/41 16 17/43 18 22 25/47 26/48 31 33 34

4-17(14)

- 3. 3 11
- 5. 11 16 21 32
- 6. 8 14 15 16 19/44 20 27 31

4-18(24)

- 3. 3 5 10 11
- 5. 16 18 19 22 31 32 36 38
- 6. 5 11/40 13/42 15 17/43 18 19/44 27 28/49 29/50 30 31

4-19(20)

- 3. 3 4 11 12
- 5. 13 17 21 22 26 30 37
- 6. 14 15 16 19/44 20 21 22 31 34

4-20(14)

- 3. 4 11
- 5. 20 21 27 38
- 6. 14 15 16 18 19/44 20 31 32

4-21(14)

- 3. 6 8
- 5. 8 9 24 33 34
- 6. 2 9 21 22 33 34 35

4-22(25)

- 3. 6 7 9 11
- 5. 11 23 24 27 30 34 35 36
- 6. 8 9 11/40 14 16 22 24/46 25/47 26/48 31 32 33 34

4-23(12)

- 3. 7 9
- 5. 14 23 29 35
- 6. 8 9 18 25/47 32 33

4-24(14)

- 3. 6 8 12
- 5. 13 26 30 33
- 6. 15 16 21 22 31 34 35

4-25(10)

- 3. 8
- 5. 15 28 33
- 6. 7 21 22 30 34 35

4-26(14)

- 3. 7 11
- 5. 25 27 32 35 37
- 6. 14 25/47 26/48 27 31 32 33

4-27(25)

- 3. 7 8 10 11
- 5. 25 26 28 29 31 32 34 38
- 6. 15 18 21 23/45 24/46 25/47 27 28/49 29/50 30 31 33 34

4-28(4)

- 3. 10
- 5. 31
- 6. 27 30

4-29(26)

- 3. 2 5 8 11
- 5. 5 13 16 19 20 24 25 28
- 6. 5 9 10/39 12/41 15 16 17/43 18 21 22 27 30 33 34

Conjuntos de cardinal 5

5-1(9)

3. 1 2 3 6

4. 1 2 3

6. 1 2

5-2(15)

3. 1 2 3 4 6 7

4. 1 2 4 10 11

6. 1 2 8 9

5-3(14)

3. 1 2 3 4 6 7

4. 2 3 4 7 11

6. 1 14 15

5-4(16)

3. 1 2 3 4 5 7 8 10

4. 1 4 5 12 13

6. 2 3/36 5

5-5(14)

3. 1 2 4 5 8 9 11

4. 1 5 6 14 29

6. 5 9

5-6(13)

3. 1 3 4 5 7 8

4. 4 5 7 8 15

6. 5 16

5-7(14)

3. 1 4 5 8 9

4. 5 6 8 9 16

6. 5 6/38 7 18

5-8(11)

3. 1 2 3 6 8 10

4. 2 12 21

6. 2 21

5-9(17)

3. 1 2 3 4 5 6 7 8

4. 2 5 11 15 21

6. 2 9 21 22

5-10(13)

3. 2 3 5 7 8 10

4. 3 10 12 13 15

6. 2 27

5-11(16)

- 3. 1 2 3 4 6 7 9 11
- 4. 2 4 14 17 22
- 6. 8 14 16

5-12(7)

- 3. 2 4 5 6 7 10
- 4. 13

5-13(18)

- 3. 1 2 3 4 5 6 8 11 12
- 4. 2 5 19 24 29
- 6. 15 16 21 22

5-14(14)

- 3. 1 3 4 5 7 8 9
- 4. 4 6 15 16 23
- 6. 9 18

5-15(10)

- 3. 1 4 5 8 9
- 4. 5 16 25
- 6. 7 22

5-16(13)

- 3. 2 3 5 8 10 11
- 4. 3 12 17 18 29
- 6. 15 27

5-17(10)

- 3. 2 3 4 9 11 12
- 4. 3 14 19
- 6. 14

5-18(15)

- 3. 2 3 4 5 8 9 10 11
- 4. 7 12 14 16 18
- 6. 5 31

5-19(15)

- 3. 2 3 5 7 8 10 11
- 4. 9 13 15 18 29
- 6. 5 18 30

5-20(13)

- 3. 2 4 5 8 9 11
- 4. 8 14 16 20 29
- 6. 16 18

5-21(14)

- 3. 3 4 11 12
- 4. 7 17 19 20
- 6. 14 15 16 19/44 20 31

5-22(10)

- 3. 3 4 5 10 11 12
- 4. 8 18 19
- 6. 19/44

5-23(15)

- 3. 2 4 6 7 9 11
- 4. 10 11 14 22 23
- 6. 8 9 32 33

5-24(17)

- 3. 2 4 5 6 7 8 9 11
- 4. 11 16 21 22 29
- 6. 9 22 33 34

5-25(13)

- 3. 2 5 7 8 10 11
- 4. 10 13 26 27 29
- 6. 27 33

5-26(18)

- 3. 2 3 4 6 7 8 10 11 12
- 4. 11 12 19 24 27
- 6. 15 21 31 34

5-27(14)

- 3. 2 4 6 7 9 11
- 4. 11 14 20 22 26
- 6. 14 31 32

5-28(15)

- 3. 2 3 5 7 8 10 11
- 4. 12 15 25 27 29
- 6. 21 30 34

5-29(16)

- 3. 2 4 5 7 8 9 10 11
- 4. 13 14 16 23 27
- 6. 18 25/47 33

5-30(18)

- 3. 3 4 5 6 7 8 9 11 12
- 4. 15 16 19 22 24
- 6. 16 22 31 34

5-31(14)

- 3. 2 3 5 7 8 10 11
- 4. 12 13 18 27 28
- 6. 27 30

5-32(13)

- 3. 3 5 7 8 10 11
- 4. 15 17 18 26 27
- 6. 27 31

5-33(10)

- 3. 6 8 12
- 4. 21 24 25
- 6. 21 22 34 35

5-34(11)

- 3. 6 7 8 9 10 11
- 4. 21 22 27
- 6. 33 34

5-35(9)

- 3. 6 7 9 11
- 4. 22 23 26
- 6. 32 33

5-36(15)

- 3. 1 2 3 5 6 7 9 10 11
- 4. 2 6 13 18 22
- 6. 11/40

5-37(10)

- 3. 1 3 4 7 11 12
- 4. 4 19 26
- 6. 14

5-38(15)

- 3. 1 3 4 5 7 8 10 11
- 4. 4 5 18 20 27
- 6. 15 18

Conjuntos de cardinal 6

6-1(16)

- 3. 1 2 3 4 6 7
- 4. 1 2 3 4 7 10 11
- 5. 1 2 3

6-2(26)

- 3. 1 2 3 4 5 6 7 8 10
- 4. 1 2 3 4 5 10 11 12 13 15 21
- 5. 1 2 4 8 9 10

6-3/6-36 (17)

- 3. 1 2 3 4 5 6 7 8 10
- 4. 1 2 3 4 5 12 13
- 5. 4

6-4/6-37 (10)

- 3. 1 2 3 4 5 6 8
- 4. 2 3 5

6-5(30)

- 3. 1 2 3 4 5 7 8 9 10 11
- 4. 1 4 5 6 7 8 9 12 13 14 15 16 18 29
- 5. 4 5 6 7 18 19

6-6/6-38(11)

- 3. 1 4 5 8 9
- 4. 5 6 8 9 16
- 5. 7

6-7(13)

- 3. 1 4 5 8 9
- 4. 5 6 8 9 16 25
- 5. 7 15

6-8(20)

- 3. 1 2 3 4 6 7 9 11
- 4. 1 2 4 10 11 14 17 22 23
- 5. 2 11 23

6-9(30)

- 3. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 11
- 4. 1 2 4 5 6 10 11 14 15 16 21 22 23 29
- 5. 2 5 9 14 23 24

6-10/6-39 (15)

- 3. 1 2 3 4 5 6 7 8 10 11
- 4. 2 4 11 12 29

6-11/6-40 (21)

- 3. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
- 4. 2 4 6 10 11 13 14 18 22
- 5. 36

6-12/6-41 (16)

- 3. 1 2 3 4 5 7 8 9 10 11
- 4. 5 6 13 15 16 29

6-13/6-42 (10)

- 3. 2 3 5 7 8 10 11
- 4. 12 13 18

6-14(26)

- 3. 1 2 3 4 6 7 9 11 12
- 4. 2 3 4 7 11 14 17 19 20 22 26
- 5. 3 11 17 21 27 37

6-15(31)

- 3. 1 2 3 4 5 6 7 8 10 11 12
- 4. 2 3 4 5 7 11 12 17 18 19 20 24 27 29
- 5. 3 13 16 21 26 38

6-16(31)

- 3. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 11 12
- 4. 2 4 5 7 8 14 15 16 17 19 20 22 24 29
- 5. 6 11 13 20 21 30

6-17/6-43 (16)

- 3. 1 2 3 4 5 7 8 9 10 11
- 4. 5 8 15 16 18 29

6-18(30)

- 3. 1 2 3 4 5 7 8 9 10 11
- 4. 4 5 6 8 9 13 14 15 16 18 20 23 27 29
- 5. 7 14 19 20 29 38

6-19/6-44 (15)

- 3. 3 4 5 8 10 11 12
- 4. 7 8 17 18 19 20
- 5. 21 22

6-20(9)

- 3. 3 4 11 12
- 4. 7 17 19 20
- 5. 21

6-21(28)

- 3. 1 2 3 4 5 6 7 8 10 11 12
- 4. 2 5 11 12 15 19 21 24 25 27 29
- 5. 8 9 13 26 28 33

6-22(28)

- 3. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 11 12
- 4. 2 5 11 15 16 19 21 22 24 25 29
- 5. 9 13 15 24 30 33

6-23/6-45(10)

- 3. 2 3 5 7 8 10 11
- 4. 12 13 27

6-24/6-46 (15)

- 3. 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
- 4. 11 14 15 22 27

6-25/6-47 (17)

- 3. 2 4 5 6 7 8 9 10 11
- 4. 13 14 16 22 23 26 27
- 5. 29

6-26/6-48 (10)

- 3. 4 5 6 7 8 9 11
- 4. 16 22 26

6-27(23)

- 3. 2 3 5 7 8 10 11
- 4. 3 10 12 13 15 17 18 26 27 28 29
- 5. 10 16 25 31 32

6-28/6-49 (10)

- 3. 2 3 5 7 8 10 11
- 4. 12 18 27

6-29/6-50 (10)

- 3. 2 3 5 7 8 10 11
- 4. 13 18 27

6-30(19)

- 3. 2 3 5 7 8 10 11
- 4. 9 12 13 15 18 25 27 28 29
- 5. 19 28 31

6-31(31)

- 3. 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
- 4. 7 11 12 14 15 16 17 18 19 20 22 24 26 27
- 5. 18 21 26 27 30 32

6-32(16)

- 3. 2 4 6 7 9 11
- 4. 10 11 14 20 22 23 26
- 5. 23 27 35

6-33(26)

- 3. 2 4 5 6 7 8 9 10 11
- 4. 10 11 13 14 16 21 22 23 26 27 29
- 5. 23 24 25 29 34 35

6-34(28)

- 3. 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
- 4. 11 12 15 16 19 21 22 24 25 27 29
- 5. 24 26 28 30 33 34

6-35(7)

- 3. 6 8 12
- 4. 21 24 25
- 5. 33

Referencias Bibliográficas

- Babbit, Milton (1961): *Set Structure as Compositional Determinant*, Journal of Music Theory 5, no.1
- Cetta, Pablo (2003): *Principios de estructuración de la altura empleando conjuntos de grados cromáticos*. Capítulo del Libro: *Altura-Timbre-Espacio*, Facultad de Ciencias y Artes Musicales de la UCA, pp 9-35.
- Chrisman, Richard (1977): *Describing Structural Aspects of Pitch Sets Using Successive-interval Arrays*, Journal of Music Theory, Vol. 21 N° 1, pp. 1-28.
- Di Liscia O. P. y Cetta P. (1991): *El programa PCSOS*, revista de Teorías y Técnicas Musicales LULU, Vol.2, 1991, Buenos Aires.
- Forte, Allen (1974): *The Structure of Atonal Music*, Yale University Press, Londres.
- Isaacson, Eric (1990): *Similarity of Interval-Class Content between Pitch-Class Sets: The IcVSIM Relation*, Journal of Music Theory, Vol. 34 N° 1, pp 1-28.
- Morris, Robert (1980): *A similarity Index for Pitch-Class Sets*, Perspectives of New Music, Vol. 18 N°s 1/2, pags. 445-460
- Morris, Robert (1982): *Combinatoriality without the Aggregate*, Perspectives of New Music, Vol. 21, No. 1/2, pp. 432- 486.
- Morris, Robert (1987): *Composition with Pitch-Classes: A Theory of Compositional Design*. Yale University Press.
- Rahn, John (1980): *Basic Atonal Theory*, Schirmer Books, New York.
- Starr, Daniel & Morris, Robert (1977): *A General Theory of Combinatoriality and the Aggregate (Part 1)*, Perspectives of New Music, Vol. 16, No. 1, pp. 3-35.
- Starr, Daniel & Morris, Robert (1978): *A General Theory of Combinatoriality and the Aggregate (Part 2)*, Perspectives of New Music, Vol. 16, No. 2, pp. 50-84.
- Winsor, Phil y De Lisa, Gene(1991): *Computer Music in C*, Windcrest TAB Books, Blue Ridge Summit, PA.

