La Filosofía de la matemática en la ingeniería. Tres preguntas orientadoras

Juan Pablo Muszkats[1]

1. INTRODUCCIÓN

Quienes nos dedicamos a la formación matemática en carreras de ingeniería convivimos con la pregunta

> ¿Por qué me hacen estudiar esto?

que eventualmente adopta formas amistosas, entusiastas, resignadas o francamente hostiles. Por lo general apelo a dos respuestas rápidas con las que hasta ahora he salido ileso, aunque dudo de haber sido convincente:

> Porque sirve para "x" (donde x puede ser "calcular cómo será la trayectoria", "comprimir información", etc., en el venturoso caso de que el tema estudiado admita una aplicación inmediata y que yo la conozca).

> Porque aunque este tema en particular no sirva a tu especialidad, te enseña a pensar lógicamente.

[1] Profesor de matemática y astronomía (Instituto Superior del Profesorado Joaquín V. González), Licenciado en matemáticas (Universidad CAECE), Magíster en ingeniería matemática (Universidad de Buenos Aires), Profesor Adjunto (Universidad Nacional del Noroeste de la Provincia de Buenos), Jefe de Trabajos Prácticos (Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires). juanpablomus@gmail.com

Como cualquier respuesta corta para una pregunta amplia, son incompletas. Lo que me propongo en este artículo es plantear algunas preguntas que ordenen la discusión y sugerir algunas posibles respuestas que no pretenden ser concluyentes. Más bien espero clarificar que, según sean las respuestas que tácita o explícitamente demos, habremos tomado decisiones relevantes para la formación de ingenieros y que, por lo tanto, es mejor hacerlo de manera consciente y meditada.

2. ¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA?

Lo que sigue es una breve descripción, que no pretende ser exhaustiva, de las respuestas clásicas que se han ensayado y de algunas tendencias más actuales. Aunque el debate sobre lo que es la matemática puede rastrearse hasta la Grecia clásica, elijo adelantarme hasta las escuelas que surgieron a fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX[2]. Para aquel entonces, los desarrollos del análisis y la consiguiente reflexión sobre los números reales por parte de precursores como Richard Dedekind y Georg Cantor habían sido ciertamente fecundos; pero habían a la vez conducido a un uso demasiado permisivo de la teoría de conjuntos, abriendo la puerta a varias paradojas. Acaso la más conocida sea la de Russell, porque, aunque el enunciado original es en términos de la teoría de conjuntos, admite una traducción coloquial:

> En un pueblo hay un solo barbero que tiene la consigna de afeitar solamente a aquellos que no se afeitan por sí mismos. Ahora bien, ¿quién afeita al barbero?

Un poco de reflexión permite ver que cualquiera de las dos opciones, que el barbero se afeite a sí mismo o que pida a otra persona que lo haga por él, contradicen las reglas establecidas. La paradoja surge porque existe una autorreferencia en el enunciado de las reglas. Fueron estos problemas los que reavivaron la discusión sobre lo que es la matemática y en qué sentido es verdadera (contrariamente al sentido común que parece otorgarle el don de una verdad cristalina y atemporal, acaso como una rémora de la tradición previa a estos debates).

---

[2] Puede encontrarse una amplia exposición histórica en el libro de Klimovsky y Boido (2005).

Siguiendo un orden aproximadamente histórico, surge el *logicismo* como un primer intento de establecer fundamentos sólidos para el edificio matemático. Dado que la lógica parece dar cuenta de los modos más básicos e incuestionables del pensamiento, el programa logicista se propuso reducir la matemática a una consecuencia de la lógica. En sus inicios estuvo a cargo de Gottlob Frege. Sin embargo, su exponente más conspicuo es Bertrand Russell, quien junto con Alfred Whitehead publicó el célebre trabajo *Principia Mathematica*. Allí se encargaron de depurar cualquier inconsistencia (como la ya mencionada) que pudiera haber en la exposición lógica de la matemática. Para ello se valieron de una construcción monumental: es fama que el trabajo requiere más de trescientas páginas para probar que 1+1=2. Sin embargo, para dar cuenta sin fisuras de la teoría de conjuntos y por ende de la matemática, los recursos lógicos que debieron admitir fueron enormes y resultaron muy apartados de lo que se podía aceptar como algo "evidente a la razón", por lo que la obra no resultó tan concluyente como se esperaba. En palabras del propio Russell (1956: 54-55):

> […] a medida que el trabajo avanzaba, recordaba continuamente la fábula del elefante y la tortuga. Habiendo construido un elefante sobre el que la matemática podía apoyarse, me encontré con que el elefante se tambaleaba y procedí a construir una tortuga para evitar que el elefante cayera. Pero la tortuga no estaba más segura que el elefante, y luego de veinte años de arduo trabajo llegué a la conclusión de que no había nada más que yo pudiera hacer para lograr que el conocimiento matemático sea indudable[3].

El *formalismo* surge como una alternativa a las dificultades que evidenciaba el logicismo. Con David Hilbert a la cabeza, la propuesta consistía en cambiar el enfoque en cuanto a lo que se consideraba conocimiento matemático indudable. Desde esta nueva perspectiva, los teoremas matemáticos son válidos en la medida en que se hayan deducido siguiendo las reglas de deducción permitidas en un cierto sistema axiomático. Hasta aquí, podría decirse, nada que sorprenda: el método axiomático era conocido desde la geometría de Euclides. La novedad estribaba en el abandono de cualquier pretensión de verdad en torno a los axiomas y su correlato con algún tipo de realidad empírica. La matemática quedaba reducida a un mero juego formal en el que hay que respetar estrictamente ciertas reglas para producir enunciados válidos en el contexto de ese mismo juego. Esta postura por supuesto implicaba enormes dificultades para

---

[3] Esta traducción al español y las que siguen estuvieron a mi cargo. Me hago responsable de cualquier infidelidad para con los textos originales.

explicar la relación entre una matemática reducida a una manipulación sintáctica y sus variadas aplicaciones prácticas. Más aún, también aparecieron limitaciones insalvables dentro del mismo programa formalista al tratar de probar la consistencia de los sistemas axiomáticos (es decir, que no produjeran enunciados contradictorios).

Acaso la propuesta más radical surgida contemporáneamente a las anteriores sea el *intuicionismo* o *constructivismo*. Esta escuela impulsada por Luitzen Brouwer no presuponía la existencia de los entes matemáticos, sino que solo admitía aquellos que pudieran construirse de manera efectiva. Esto conllevaba también el repudio de recursos lógicos tan asentados como la reducción al absurdo y el tercero excluido. Para ello establecía reglas precisas y se basaba en la intuición inmediata de los números naturales, cuya justificación puede apoyarse en la filosofía de Immanuel Kant y en el pensamiento de matemáticos de la talla de Henri Poincaré. De acuerdo con sus reglas, esta corriente de pensamiento debía podar muchas ramas del árbol matemático que, aun en medio de la tormenta, eran tácitamente aceptadas por la mayoría. Debido a las restricciones que se imponía para considerar algo como realmente existente, el programa intuicionista rechazaba muchos resultados que el consenso matemático de su época consideraba satisfactoriamente probados con enunciados de existencia. Acerca de los entes matemáticos que debían descartarse según esta perspectiva, dijo Hilbert célebremente:

> Nadie nos expulsará del Paraíso que Cantor ha creado para nosotros.

Las tres propuestas resumidas hasta aquí son los exponentes más conocidos por haberse desarrollado al calor de la discusión acerca de los fundamentos de la matemática. De hecho son escuelas que mantienen en la actualidad seguidores y continuadores.

Más cerca en el tiempo, durante la década de 1970, Paul Benacerraf organiza la discusión en torno a dos desafíos que debe encarar cualquier postura filosófica acerca de la matemática (Colyvan, 2012):

I. *Alcanzar una semántica uniforme tanto en el discurso matemático como en el no-matemático.* Por ejemplo, el enunciado “esta mesa sobre la que escribo tiene cuatro patas” es cierto porque efectivamente la mesa existe y tiene la propiedad de poseer cuatro patas. De manera análoga, el enunciado “pi es un número irracional” es cierto porque dicho número existe y tiene la propiedad de no ser expresable como cociente de números enteros. Ahora bien, esto no es problemático *dada* la existencia de los entes matemáticos. O sea que, para una posición realista, la interpretación de los enunciados matemáticos resulta clara. Las posiciones formalistas o nominalistas tienen más dificultades en este aspecto.

II. *Proveer a la matemática de una epistemología plausibl*e. Es decir, dar cuenta de cómo se alcanza el conocimiento matemático. En este caso, son las posiciones realistas las que se encuentran en más dificultades para explicar cómo adquirimos conocimiento válido de ciertos entes que, por una parte, no serían construcciones humanas sino que existen por derecho propio y, a la vez, no se los percibe con los sentidos.

El debate en torno a estas cuestiones, como podrá imaginarse, es rico y ramificado. Lo que sigue es un recorte muy parcial y personal, que elijo por creer que nos acerca a una comprensión de la matemática más afín a sus aplicaciones en la ingeniería. No pretendo de ningún modo agotar la discusión en torno a lo que es la matemática.

El filósofo de la ciencia Imre Lakatos dedica su famoso libro *Pruebas y refutaciones* (Lakatos, 1976) a indagar el proceso creativo de la matemática. Valiéndose del teorema de Euler sobre poliedros como ejemplo, Lakatos elige la forma literaria del diálogo entre un profesor y sus alumnos para exhibir cómo, a partir de una conjetura, un teorema va adquiriendo entidad. El punto es que no se trata de un proceso lineal

axiomas y definiciones - hipótesis - demostración - tesis – teorema

como pretende el formalismo. Muy por el contrario, es un proceso en el que una conjetura inicial es explorada en sus alcances, se comprueba en qué casos es válida y en cuáles no. Esto obliga a acotar el universo al que se aplica, lo cual hace repensar también las definiciones (tarea ciertamente ardua en el caso de los poliedros); esto a su vez produce una conjetura que, si bien está refinada, es susceptible de una nueva refutación, etc. Lo que Lakatos explora es aquello que él llama *metodología de la matemática*, en un sentido similar al que tienen la *heurística* en George Pólya o la *lógica del descubrimiento* en Karl Popper. En palabras de Lakatos (1976: 4)

> […] una matemática informal, cuasiempírica, no crece por una incorporación monótona de teoremas establecidos indubitablemente sino por la mejora incesante de las conjeturas especulativas y la crítica, por la lógica de las pruebas y las refutaciones.

Por supuesto, no es evidente que cualquier desarrollo matemático encaje en los esquemas propuestos por Lakatos. En otro de sus ejemplos, este filósofo explora históricamente la génesis del concepto de continuidad uniforme y se arriesga incluso a formular sus ideas en un esquema hegeliano. Allí la prueba y la refutación se realimentan dinámicamente para llegar a un concepto que es producto de la actividad humana y está situado históricamente. Una vez más en palabras de Lakatos (1976: 127):

> La matemática, este producto de la actividad humana, "se aliena" de la actividad humana que la estuvo produciendo. Se vuelve un organismo vivo y creciente que adquiere cierta autonomía de la actividad que la produjo; desarrolla sus propias leyes autónomas de crecimiento, su propia dialéctica. El matemático creativo genuino es tan solo una personificación, una encarnación de estas leyes que solo pueden realizarse en la acción humana. [...] Cualquier matemático, si tiene talento, chispa, genio, se comunica, siente el alcance y obedece a esta dialéctica de ideas.

Es ineludible el carácter controversial de esta postura. En principio, por ser tan disonante con los más arraigados y poco explicitados sentidos comunes que recorren la práctica y el uso de la matemática. Esta postura, novedosa y audaz en su momento, abrió el camino para otras aproximaciones que podríamos encuadrar como un *humanismo matemático*. En esta tendencia se ubican los matemáticos Philip Davis y Reuben Hersh, quienes exploran el conocimiento matemático en su contexto histórico y cultural:

> Entender la matemática de un período anterior requiere que podamos penetrar la conciencia individual y colectiva. Esta es una tarea particularmente difícil porque los escritos matemáticos formales e informales que nos llegan no describen la red de conciencia en ningún detalle (Davis, Hersh y Marchisotto, 2012).

Lejos de todo platonismo y de verdades eternas, los autores sitúan la matemática en su devenir histórico. Lo que una generación creyó satisfactoriamente demostrado, otra generación lo refutó cuestionando las definiciones, la noción de rigor, etc. Por supuesto, esta postura no está exenta de dificultades y, llevada a sus últimas consecuencias, podría conducir a un relativismo cultural en el que "vale todo". Sin embargo, es la propia historia de la matemática la que invita a creer que las sucesivas generaciones de matemáticos no deliran. Si pensamos, por caso, en el teorema de Pitágoras, podemos apreciar cómo lo que alguna vez fue una regla práctica devino en enunciado general y luego fue demostrado de acuerdo con lo que una generación consideraba riguroso. Por siglos la rigurosidad que estandarizó Euclides se mantuvo incólume, hasta la crisis moderna de los fundamentos. Fue David Hilbert quien pulió el trabajo de Euclides y lo adecuó a lo que se consideraba bien demostrado en su época (Hilbert, 1950). Paralelamente, la misma noción de triángulo fue mutando y ganando generalidad desde una marca sobre la arena hasta un objeto sin representación visual alguna en un espacio abstracto. Puesto en esta perspectiva, el teorema de Pitágoras no ha sido una "verdad inmutable" sino que se fue resignificando en su devenir histórico (sin por eso convertirse en un mero capricho sujeto a una moda pasajera).

En cuanto a la entidad de la matemática, Davis y Hersh (Davis, Hersh y Marchisotto, 2012) señalan dos hechos a primera vista contradictorios:

I. La matemática es nuestra creación. Se trata de ideas en nuestras mentes.
II. La matemática es una realidad objetiva, en el sentido de que los objetos matemáticos tienen propiedades definidas que eventualmente se pueden descubrir.

Para que estos dos hechos puedan convivir, hay que dejar de pensar el mundo como constituido únicamente por mente y materia. La propuesta de los autores involucra las ideas de Karl Popper en cuanto a la existencia de los mundos 1, 2 y 3. Es decir, la admisión de que existen efectivamente el mundo físico de la masa, la energía, etc., el mundo de la conciencia en su sentido más biológico y finalmente el mundo de la conciencia social: allí es donde existen las complejas interacciones humanas, los lenguajes, las ideologías, las religiones y ciertamente la matemática. Una objeción que surge casi espontáneamente es que esto podría rebajar la matemática a una mera cuestión de opiniones. Sin embargo, los autores responden que la matemática es una disciplina humana capaz de establecer resultados *reproducibles* e *incontrovertibles una vez que se los ha entendido* (lo cual, por supuesto, implica ser parte de un grupo entrenado para ello).

En trabajos posteriores, Hersh reforzó y amplió su postura abrevando en la antropología (White, 2006) y el desarrollo de la neurociencia (Hersh, 2017). Ciertamente se trata de una respuesta posible a las dos exigencias planteadas por Benacerraf: hay una postura ontológica acerca de dónde ubicar a la matemática (en el mundo de la conciencia social) y por ende una semántica posible; en cuanto a su epistemología, debe rastrearse en una concepción más ligada a la lógica de las pruebas y las refutaciones. Para concluir esta parte, una cita más de Davis y Hersh (2012):

> […] no hay que truncar la matemática para que calce en una filosofía incapaz de albergarla; se trata más bien de exigirles a las categorías filosóficas que se ensanchen para aceptar la realidad de nuestra experiencia matemática.

3. ¿PARA QUÉ SIRVE LA MATEMÁTICA?

La pregunta está formulada de una manera deliberadamente ambigua. Dos respuestas posibles se dieron al comienzo de este ensayo: es aplicable a la realidad empírica y enseña modos de pensamiento. Aunque podrían explorarse otras respuestas de orden estético, intramatemático o filosófico, voy a limitar la exposición a las dos ya mencionadas por ser las que se vinculan directamente con la ingeniería.

Puesto a reflexionar sobre la relación entre las teorías matemáticas abstractas y los hechos empíricos, el físico Eugene Wigner no dudó en manifestar crudamente su estupor:

> […] la enorme utilidad de la matemática en las ciencias naturales es algo que bordea lo misterioso, para lo cual no hay explicación racional posible.
>
> El milagro de la adecuación del lenguaje de la matemática para la formulación de las leyes de la física es un maravilloso don que no entendemos ni merecemos (Wigner, 1960).

No menos perplejo se muestra Bertrand Russell, aunque despoja al problema de su halo místico:

> Si se elige un conjunto arbitrario de puntos del espacio, existe una función del tiempo [...] que expresa el movimiento de una partícula que los atraviesa: esta función puede considerarse como una ley general a la que la conducta de esta partícula está sujeta. Si se toman todas estas funciones para todas las partículas del universo, teóricamente existirá una fórmula que las abarque a todas y esta fórmula podrá considerarse como la única y suprema ley del mundo espaciotemporal. Luego, lo que es sorprendente en la física no es la existencia de leyes generales, sino su extremada simplicidad. […] Lo que debería sorprendernos es el hecho de que la uniformidad sea lo suficientemente simple como para que podamos descubrirla (Russell, 1917).

El vínculo entre la matemática y la realidad física ha sido motivo de meditación desde tiempos inmemoriales. La multiplicidad de respuestas que se han ensayado podría clasificarse, en una primera aproximación, según el tipo de implicación que se establezca. Clásicamente, lo usual era pensar que el mundo tenía una estructura matemática preexistente a la actividad humana, y que por ende la matemática se imponía sobre la humanidad. Dos exponentes ilustres son Pitágoras y Galileo Galilei. Con matices y diversos grados de sofisticación, esta postura mantiene sus adeptos en científicos de fuste. Si se revierte el orden de implicación, resulta entonces que son los humanos quienes con sus creaciones matemáticas imponen un orden al mundo. Por supuesto, este orden no es arbitrario: el lenguaje de la matemática produce modelos (potencialmente infinitos) y es su contrastación empírica la que permite descartarlos, elegirlos y/o perfeccionarlos. Es claro que el humanismo matemático se encuadra en esta última postura.

No es indispensable responder este dilema para poder pensar el rol de la matemática en la ingeniería. Si la tecnología es un "saber cómo" mientras la ciencia un "saber qué", se puede adoptar la segunda postura como la hipótesis de trabajo más adecuada para pensar la actividad ingenieril. Esto no pretende resolver en profundidad qué papel desempeña la matemática en el universo. Más bien se trata de dar un giro pragmático (Pitt, 2001) que delimita las pretensiones del conocimiento tecnológico: la tecnología busca crear dispositivos eficaces para cierto propósito, y es finalmente la eficacia del dispositivo la que validará o no dicho conocimiento.

Es importante destacar que no hay consenso en torno a esta distinción, por lo que conviene ser claro en cuanto a la posición que se tome al respecto. Hay autores como Mario Bunge que consideran a la tecnología como ciencia aplicada (Gutting, 1984). Por supuesto, adoptar esta posición tiene consecuencias educativas, como pueden encontrarse en Cederbaum (2018). Otros autores (Laudan, 1984) defienden la distinción entre el conocimiento científico y el tecnológico.

Si se acepta esta distinción, la matemática en la ingeniería tiene un rol instrumental: forma parte de las herramientas (creaciones humanas) de las que el ingeniero dispone y eventualmente usa. Serán su experiencia y saberes previos los que le indicarán qué recursos y en qué contexto resultan pertinentes. Enfatizo la palabra "pertinente" porque no se trata de dar una descripción cabal de lo que el mundo es, sino de encontrar aquello que mejor se ajusta a un cierto diseño y propósitos. Cuando, por ejemplo, se ajustan linealmente ciertos datos, no es indispensable que exista un modelo teórico que prediga una relación lineal: en ocasiones alcanza con que la recta de ajuste resulte eficaz en el contexto en que se aplica.

En cuanto a que la matemática enseña modos de pensamiento, esta respuesta se remonta hasta los tiempos de Platón. Este filósofo ya señalaba la importancia de la matemática en la educación como vía de acceso a los modos más sofisticados del pensamiento (ciertamente no estaba pensando en la matemática aplicada). Tal vez pueda rastrearse hasta aquella época esa idea de que la matemática enseña a pensar "lógicamente". Es claro que el estudio de la matemática puede abrir las puertas a valiosos recursos como son el buen uso de la argumentación lógica, una correcta cuantificación, cuidado del alcance de los enunciados, etc. Sin embargo, los modos clásicos de pensamiento matemático giran en torno a la idea de certeza, mientras que las aplicaciones de la ingeniería apuntan a la confiabilidad y la robustez. Hay entonces una diferencia de propósito entre las dos especialidades, lo cual complejiza aún más el rol de la matemática en la ingeniería.

4. ¿QUÉ MATEMÁTICA DEBEMOS ENSEÑAR?

Antes que nada, quiero dejar en claro que esta pregunta es acerca del "qué" y no del "cómo". No es el propósito de este artículo aventurarse en cuestiones didácticas, sino que pretende indagar cuáles son los aspectos de la matemática más relevantes para la ingeniería.

Llegados a este punto, parece claro que adoptar una posición en torno a lo que la matemática es, conlleva implicaciones decisivas en cuanto a lo que debe ser la educación matemática. En línea con lo expuesto sobre el humanismo matemático, me permito aventurar que la matemática es una actividad humana demasiado amplia y diversa como para que admita una definición unívoca.

Así, por ejemplo, falla el formalismo en sus versiones más extremas: la matemática no es meramente el estudio de sistemas axiomáticos despojados de cualquier interpretación. Nobleza obliga: existen matemáticos de primer nivel dispuestos a defenderlo; un exponente nítido es Jean Dieudonné, quien sostiene en el prólogo de su tratado de análisis

> […] la necesidad de suscribir estrictamente a los métodos axiomáticos, sin alusión alguna a la "intuición geométrica", al menos en las pruebas formales: una necesidad que hemos enfatizado al abstenernos deliberadamente de exhibir cualquier diagrama en el libro. Mi opinión es que el estudiante graduado de hoy debe, tan pronto como sea posible, alcanzar un entrenamiento sólido en este modo abstracto y axiomático de pensamiento, si es

> que alguna vez va a entender lo que ocurre actualmente en la investigación matemática. Este texto se propone ayudar al estudiante a construir esta "intuición de lo abstracto" tan esencial para la mente de un matemático moderno (Dieudonné, 1975).

Aunque esta es una postura que puede defenderse en el campo de la matemática "pura", parece insostenible en la formación de quienes la aplicarán a tareas más mundanas. Vale la pena mencionar que, como suele decirse, los matemáticos son platónicos en su trabajo habitual y formalistas los fines de semana: la sugestiva frase acerca de la "intuición de lo abstracto" revela una creencia en algo más que una mera manipulación de símbolos vacíos de significado.

Por siglos, el análisis se construyó sobre fundamentos precarios y toleró inconsistencias evidentes: quienes lo practicaban estaban al tanto de ello pero confiaban no obstante en sus intuiciones (Colyvan, 2009). La formalización se alcanzó al cabo de varias generaciones de matemáticos dedicados a reflexionar sobre el alcance de las definiciones y lo que se consideraba rigurosamente demostrado, a reformular las definiciones una y otra vez; en fin: dedicados a las pruebas y refutaciones. Aún hoy la exposición de los argumentos físicos en los textos estándar suele contener una mezcla de formalismo matemático, intuición geométrica e intuición física: qué tanto de cada ingrediente se elija depende del autor y del contexto. No es razonable (ni viable) exigirles a quienes aplican la matemática que descarten este fecundo crisol de recursos e ideas tan solo para salvar una rigurosidad intramatemática. Máxime teniendo en cuenta que han sido estas investigaciones las que produjeron infinidad de novedades matemáticas cuya formalización llegó mucho más tarde.

Más aún, existen posturas que reivindican para la ingeniería ciertas destrezas de pensamiento no verbal. En el trabajo de Ferguson (1977) puede leerse al respecto:

> Gran parte del pensamiento creativo de quienes diseñan nuestro mundo tecnológico es no verbal, no se reduce fácilmente a palabras; su lenguaje es el de los objetos, las ilustraciones y las imágenes mentales. [...] Esta componente intelectual de la tecnología, que es no literaria y no científica, ha pasado generalmente inadvertida porque sus orígenes están en el arte y no en la ciencia.

Parece claro que este aspecto de la ingeniería es diametralmente opuesto al que puede iluminar el formalismo, con su reducción a un lenguaje meramente sintáctico y alejado de cualquier interpretación. Una pregunta que no es fácil de responder es qué aspectos y actividades de la matemática podrían contribuir al desarrollo del pensamiento no verbal al que se refiere Ferguson[4].

Ahora bien, esto no significa que deba descartarse de plano toda formalización y rigurosidad. El estudio de los lenguajes formales, que en sus inicios parecía apartado en su torre de marfil, ha sentado las bases de la computación moderna. Y aquí surge una conexión ineludible con la actividad ingenieril. Entonces, ¿se debe fomentar más la familiaridad con una matemática creativa y modelizadora o, por el contrario, con el manejo de lenguajes formalizados? ¿Con qué nivel de formalización? Con respecto a esta última pregunta, cabe señalar que aun la matemática profesional nunca se realiza con una formalización total. Se asume que los enunciados y argumentos usados podrían reducirse a un cálculo simbólico, por ejemplo, en la teoría de conjuntos. Pero esta reducción nunca es completa porque haría ilegibles los textos: en última instancia hay una comunidad matemática que revisa y valida, en el marco de un paradigma que establece unas prácticas y una rigurosidad "aceptables".

De esta forma, las famosas demostraciones que se hacen en las clases teóricas deberían surgir después de haber considerado qué se espera de ellas, sobre todo en la formación de no-matemáticos. Al fin y al cabo, nadie duda seriamente de la validez del teorema del valor medio de Lagrange. Si estamos dispuestos a "demostrar" un teorema que cuenta siglos, es porque creemos que tiene un valor formativo. Ahora bien, no todas las demostraciones son iguales: algunas enfatizan los pasos meramente formales y el rigor en el uso de las reglas de deducción, otras privilegian la intuición geométrica y eluden los aspectos más técnicos, otras van refinando una intuición original por medio de pruebas y refutaciones, reflexionando sobre los roles que cumplen las definiciones, hipótesis y tesis. Cada uno de estos aspectos es relevante y a su modo formativo. Está en nosotros decidir qué énfasis adoptaremos: conviene saber a dónde queremos ir antes de empezar a caminar.

La discusión entonces no tiene por qué girar en torno a si se debe enseñar una matemática formalista u otra guiada por la lógica del descubrimiento.

[4] En el campo de la neurociencia, los avances aportan evidencia sólida en cuanto a la separación entre pensamiento y lenguaje (Passingham, 2016), dos actividades que tendemos a identificar, al parecer, erróneamente.

Más bien se trata de discutir a conciencia qué aspecto de cada una de ellas se tomará, clarificando los objetivos que se persiguen. Periódicamente nos topamos con modas que pregonan una solución definitiva a las dificultades de la educación. Hubo momentos en que todo debía enseñarse desde la teoría de conjuntos, en otros momentos fueron la resolución de problemas y la heurística… Si en los párrafos anteriores logré convencer a alguien de que ni la teoría de conjuntos ni la resolución de problemas son toda la matemática, tal vez sea más clara mi postura de por qué no hay que tomar la parte por el todo reduciendo la riqueza matemática a uno solo de sus aspectos.

5. REFERENCIAS

Cederbaum, S. (2018): "Aportes para el ejercicio de la docencia en ingeniería" ,*Tecnología y Sociedad*, (7), pp. 49–62.

Colyvan, M. (2009): "Applying inconsistent mathematics", en Bueno, O. y L. Øystein (eds.), *New Waves in Philosophy of Mathematics*, Reino Unido, Palgrave Macmillan, pp. 160–172.

— (2012): *An introduction to the philosophy of mathematics*. Reino Unido, Cambridge University Press.

Davis, P. J., R. Hersh y E.A. Marchisotto (2012): *The mathematical experience - study edition*. Nueva York, Springer.

Dieudonné, J. (1975): *Fundamentos de análisis moderno*. Barcelona, Reverté.

Ferguson, E. S. (1977): "The mind's eye: nonverbal thought in technology", *Science*, 197(4306), pp. 827–836.

Gutting, G. (1984): "Paradigms, revolutions, and technology", en Laudan, R. (ed.), *The nature of technological knowledge. Are models of scientific change relevant?,* Dordrecht, Springer, pp. 47–65.

Hersh, R. (2017): "On the nature of mathematical entities", en Sriraman, B. (ed.), *Humanizing mathematics and its philosophy*. Cham, Springer International Publishing, pp. 361–363.

Hilbert, D. (1950): *The foundations of geometry*. Illinois, The Open Court Publishing Company.

Klimovsky, G. y G. Boido (2005): *Las desventuras del conocimiento matemático*. Buenos Aires, AZ editora.

Lakatos, I. (1976): *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Reino Unido, Cambridge University Press.

Laudan, R. (1984) "Introduction", en Laudan, R. (ed.), *The nature of technological knowledge: are models of scientific change relevant?,* Dordrecht, Springer, pp. 1–27.

Passingham, R. (2016): *Cognitive neuroscience: a very short introduction*. Reino Unido, Oxford University Press.

Pitt, J. (2001): "What engineers know", *Techné: research in philosophy and technology*, 5(3).

Russell, B. (1917): "On scientific method in philosophy", en *Mysticism and logic and other essays*. Londres, George Allen and Unwin Ltd., pp. 58–73.

— (1956): "Reflections on my eightieth birthday", en *Portraits from memory and other essays*. Nueva York, Simon & Schuster, pp. 54-59.

White, L. A. (2006): "The locus of mathematical reality: an anthropological footnote", en Hersh, R. (ed.), *18 unconventional essays on the nature of mathematics*. Nueva York, Springer-Verlag, pp. 304–319.

Wigner, E. (1960): "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", en *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13(1), pp. 1–14.