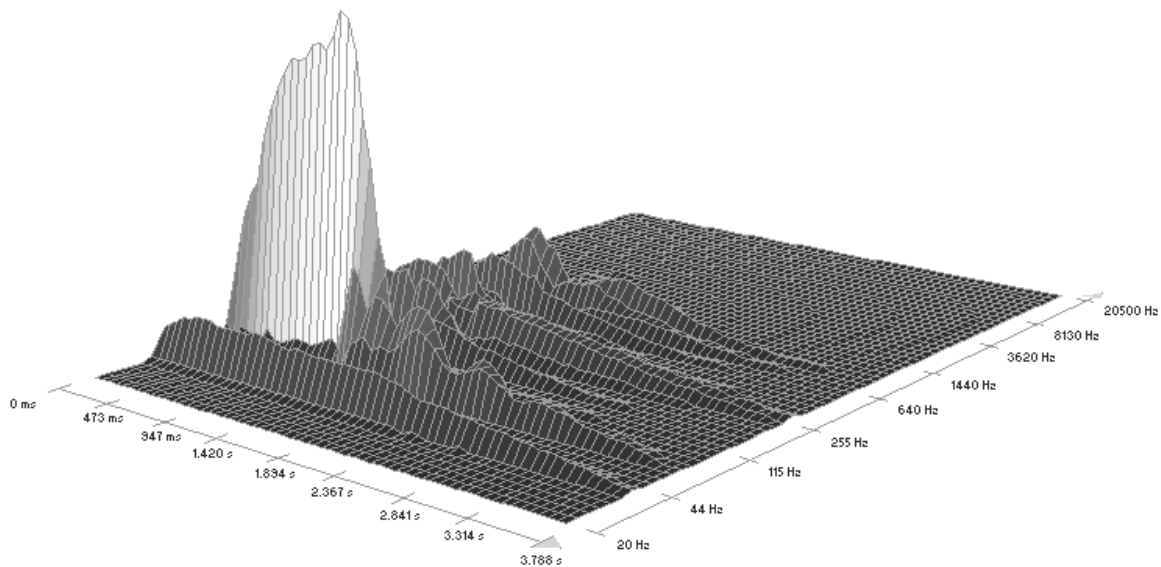


UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA
“Santa María de los Buenos Aires”

Facultad de Artes y Ciencias Musicales

PABLO CETTA

PRINCIPIOS TEÓRICOS DE LOS FILTROS DIGITALES



FILTROS DIGITALES

Principios de los filtros digitales

Los filtros digitales operan sobre las señales que representan al sonido, transformando sus muestras a través de un algoritmo, y convirtiéndolas en nuevas secuencias numéricas cuyas características son distintas a las originales (señal filtrada).

Existen diversas clasificaciones de los filtros. Básicamente, podemos distinguir cuatro tipos: pasa bajos, pasa altos, pasa banda y rechazo de banda.

El filtro pasa bajos, como su nombre lo indica, deja pasar las componentes más graves del sonido, y retiene a las componentes agudas cuya frecuencia es superior a la *frecuencia de corte* del filtro. Su versión más elemental se obtiene sumando a una señal digital una copia de sí misma, retrasada en una muestra. Este proceso se representa a través del siguiente diagrama.

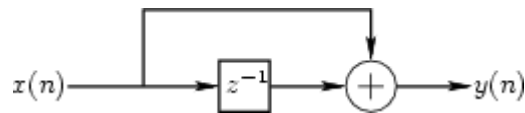


Figura 1

La señal de entrada se representa como $x(n)$ –se lee x de n – que es el modo de referirnos a una forma de onda cualquiera, cuyos valores de amplitud para cada muestra dependen del número de muestra considerado (n). Este tipo de notación no dice nada sobre el contenido de la señal, pero nos permite nombrarla y diferenciar, por ejemplo, una señal de otra. Siguiendo este criterio, denominamos $y(n)$ a la señal de salida filtrada, que es distinta a $x(n)$.

La caja con la inscripción z^{-1} se denomina *línea de retardo* y representa a un dispositivo capaz de retrasar en una muestra a la señal de entrada. Cuando ingresa a la línea la primera muestra no sale nada (en realidad, sale un cero), cuando ingresa la segunda sale la primera, y así sucesivamente. La cantidad de muestras que se retrasa la señal se indica con el exponente negativo (-1 en el ejemplo), el cual puede asumir cualquier valor (z^{-24} significa un retraso de 24 muestras).

Siguiendo el diagrama y resumiendo, ingresa al filtro una señal $x(n)$ que se suma a una versión retrasada en una muestra de sí misma, y da como resultado otra señal filtrada $y(n)$.

Lo mismo puede representarse en notación simbólica, de este modo:

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$

al valor de la muestra n de la función x se le suma el valor de la muestra $n - 1$ (la anterior) de la misma función. Este sería el procedimiento a aplicar en un programa de computación para lograr el filtro en cuestión.

Resulta difícil imaginar cómo es posible que el resultado obtenido a través de esta operación sea el de un filtro pasa bajos. Para tratar de comprenderlo vamos a hacer pasar señales sinusoidales de distintas frecuencias por nuestro filtro básico y observar qué sucede. En los gráficos que siguen,

vemos la señal original ($x(n)$, roja) y la retrasada ($x(n - 1)$, negra), que sumadas dan la resultante ($y(n)$, verde).

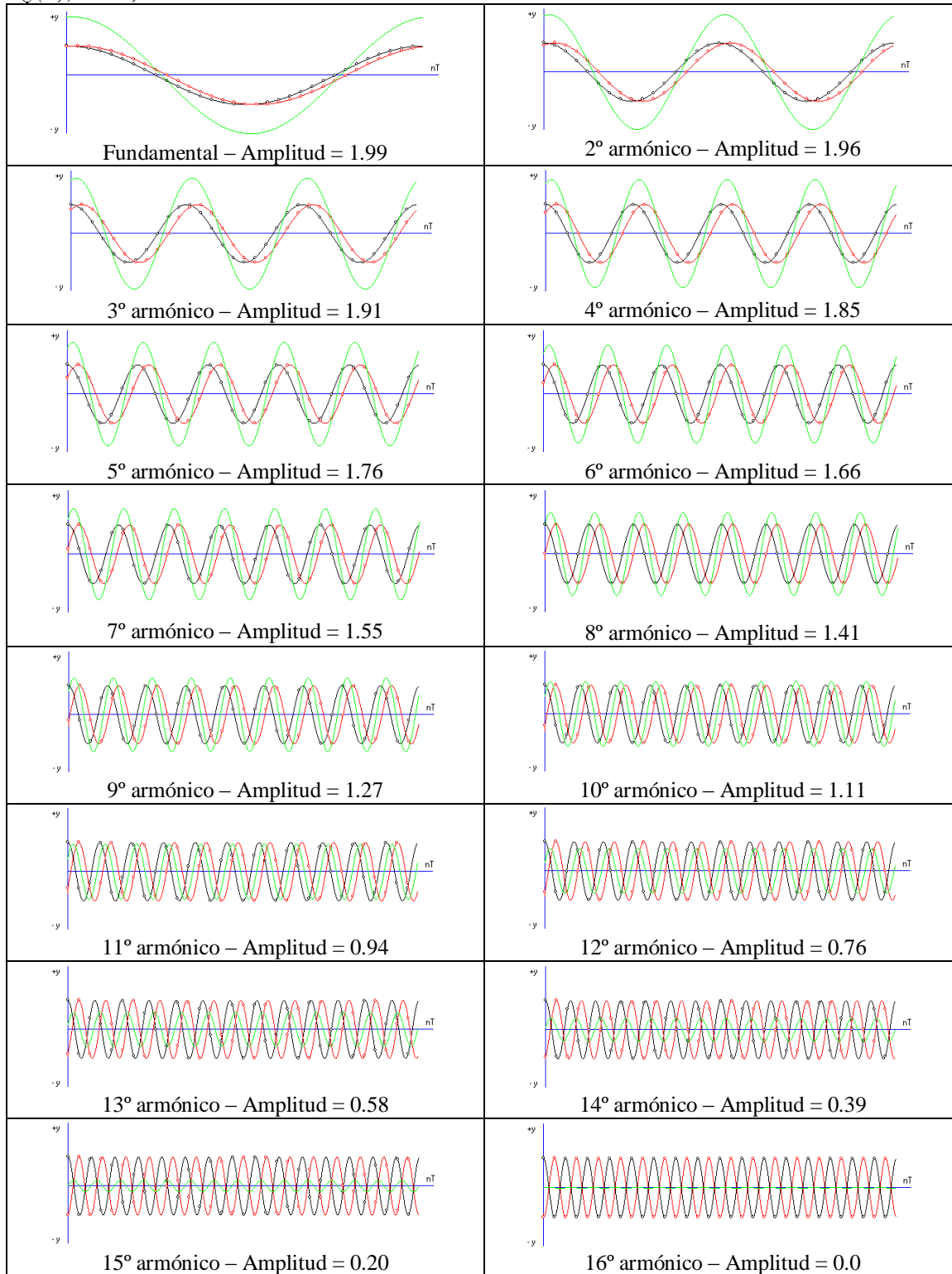


Figura 2

El primer cuadro de la Figura 2 muestra una fundamental que posee 32 muestras por ciclo. Los siguientes a sus armónicos; el segundo representado con 16 muestras por ciclo, etc., hasta llegar al armónico 16, con sólo dos muestras por ciclo (críticamente muestreado). En este último caso, un retraso de una muestra significa un cambio de fase de 180° respecto al original, por lo cual, la suma de ambas señales da cero. Observando detenidamente los gráficos, notamos que a medida que la frecuencia es mayor, se produce una mayor diferencia de fase entre la señal original y la retardada, debido a la diferencia entre ambas, de una muestra. Este desfase origina una disminución gradual de la amplitud a medida que aumenta la frecuencia, que se vuelve cada vez más notable.

Si trazamos una curva que muestre los valores de amplitud de la resultante en función de la frecuencia de cada señal sinusoidal que ingresa al filtro, obtenemos la *respuesta en amplitud* (a). Del mismo modo, podemos graficar cómo se modifica la fase en función de la frecuencia, o sea su *respuesta en fase* (b). Tanto la respuesta en amplitud, como la respuesta en fase, conforman la denominada *respuesta en frecuencia* del filtro.

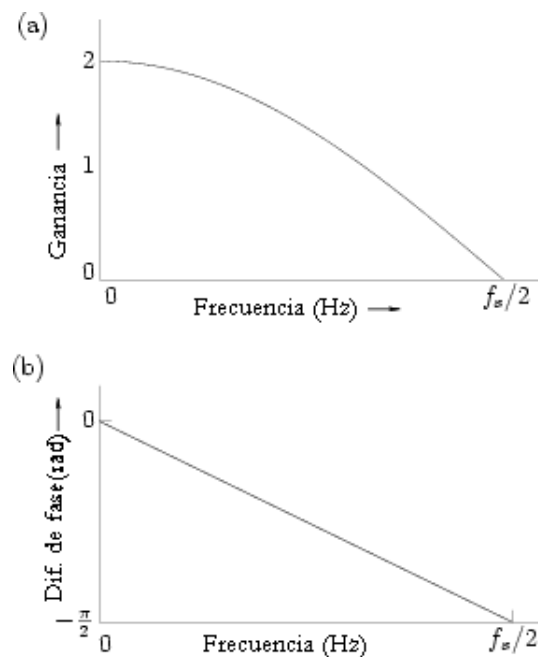


Figura 3

Según se observa en la Figura 3, la ganancia crece al doble para 0 Hz y cae gradualmente hasta hacerse nula para un valor igual a la mitad de la frecuencia de muestreo. La fase, por otra parte, cambia linealmente de 0 a $-\pi/2$ radianes.

Vamos ahora escribir la ecuación del filtro básico de forma más general:

$$y(n) = x(n) + g \cdot x(n - r)$$

En el caso anterior, filtro pasa bajos, el coeficiente g es igual a 1, y la cantidad de muestras de retardo (r) también es 1. Si ahora asignamos a g el valor -1 (lo cual equivale a restar los términos de la ecuación) obtenemos un filtro pasa altos, también muy básico, cuya respuesta en amplitud es:

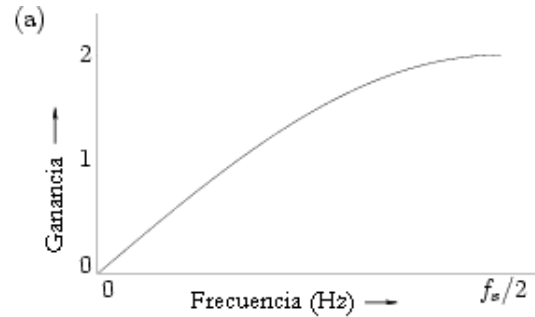


Figura 4

Extendiendo este principio, con $r = 2$ (dos muestras de retardo) y $g = 1$ obtenemos un filtro rechazo de banda, y con $r = 2$ y $g = -1$, un pasa banda.

Otras clasificaciones de los filtros

Los filtros con los que trataremos se denominan *lineales e invariantes en el tiempo*. Estos filtros resultan de gran importancia en audio, dado que son los únicos que preservan las frecuencias de las señales que ingresan a ellos, es decir, no agregan componentes espectrales. Los filtros no lineales producen distorsión armónica e intermodulación.

Decimos que un filtro es *lineal* cuando cumple lo siguiente:

- la amplitud de la salida es siempre proporcional a la amplitud de la entrada.
- si sumamos dos señales y las ingresamos al filtro, la salida es la misma que la suma de las señales de entrada filtradas por separado.

Un filtro es *invariante en el tiempo* cuando ejecuta siempre la misma operación, independientemente del tiempo transcurrido. Un ejemplo de filtro *variable en el tiempo* es un trémolo, donde la amplitud de una señal ($x(n)$) varía según otra, en general periódica ($g(n)$).

$$y(n) = g(n) \cdot x(n)$$

Por otra parte, podemos clasificar a los filtros en *causales* y *no causales*. Decimos que un filtro es *causal* cuando su salida no depende de muestras de entrada “futuras”. Los filtros vistos anteriormente son *causales*. Un filtro *no causal* es el siguiente:

$$y(n) = x(n) + x(n + 1)$$

en el cual ($n + 1$) alude a una muestra futura. Los filtros no causales poseen ciertas limitaciones cuando se emplean en *tiempo real*.

Además, los filtros se clasifican en *recursivos* y *no recursivos*. Un filtro *no recursivo* sólo emplea muestras de la señal de entrada ($x(n - 1)$, por ejemplo) para calcular la salida.

$$y(n) = x(n) + x(n - 1)$$

Un filtro *recursivo* es aquel que, además de usar las muestras de entrada, utiliza muestras ya calculadas de su salida ($y(n - 1)$, por ejemplo) para generar la muestra actual. Estos últimos poseen realimentación (*feedback*), vale decir, reutilizan la salida.

$$y(n) = x(n) + y(n - 1)$$

Ecuación en Diferencias

Los filtros causales, lineales e invariantes pueden representarse en el dominio del tiempo por su *ecuación en diferencias*. Esta ecuación es una fórmula que permite calcular la salida de un filtro de acuerdo a las muestras presentes y pasadas de la señal de entrada (parte no recursiva) y las muestras pasadas de la señal de salida (parte recursiva).

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) + \dots + b_Mx(n - M) - a_1y(n - 1) - \dots - a_Ny(n - N)$$

Los valores de las a y las b se denominan *coeficientes* del filtro.

Podemos escribir la ecuación anterior de modo más compacto, utilizando el símbolo de sumatoria

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n - i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n - i)$$

donde se reemplazan las i y las j por números consecutivos que van de 0 hasta M para el primer término, y de 0 a N para el segundo.

A modo de ejemplo, si $M = 2$ y $N = 2$ la ecuación es:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) + b_2x(n - 2) - a_1y(n - 1) - a_2y(n - 2)$$

y el diagrama que corresponde es el siguiente, donde se aprecia con más claridad la recursión, en la parte derecha del gráfico:

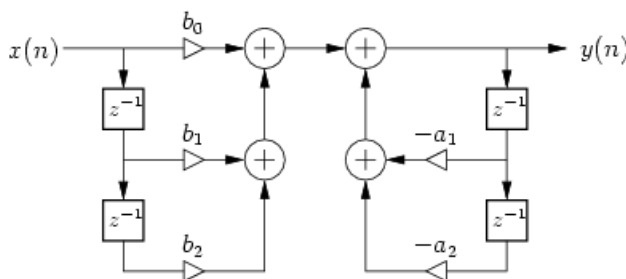


Figura 5

Denominamos *orden* del filtro al número mayor de muestras de retardo que posee su parte recursiva o su parte no recursiva (valor máximo entre M y N). En el ejemplo anterior, tanto M como N valen 2, por lo cual se trata de un filtro de *segundo orden* (el orden es 2).

En la ecuación siguiente, $M = 1$ y $N = 3$, se trata entonces de un filtro de *tercer orden*.

$$y(n) = x(n) - 0.1 x(n - 1) - 0.5 y(n - 1) + 0.8 y(n - 2) - 0.3 y(n - 3)$$

Filtros FIR

Un filtro FIR (por *finite impulse response*, respuesta finita al impulso) sólo consta de la parte no recursiva, vale decir que sólo utiliza muestras actuales y anteriores de la señal de entrada. También se denomina *filtro transversal* o *tapped delay line*.

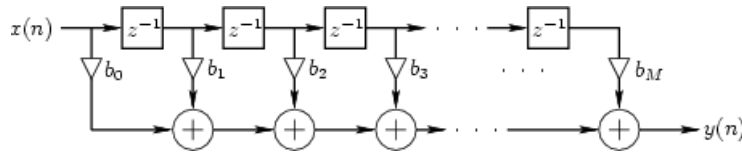


Figura 6

La respuesta en amplitud de un filtro FIR está formada por depresiones o *anti-resonancias*, que constituyen los *ceros* del filtro. Cada *cero* corresponde a un coeficiente b_i distinto de 0, para i mayor que 0 ($b_1, b_2, b_3 \dots$). Un filtro FIR siempre es *estable*, dado que no existe recursividad.

Filtros IIR

A diferencia del filtro FIR, el IIR (por *Infinite Impulse Response*, respuesta infinita al impulso) consta sólo de una parte recursiva, o bien de ambas, recursiva y no recursiva, como el que se observa en la figura 5. Cada término de la ecuación en diferencias que manifiesta una realimentación (cada coeficiente a_i distinto de 0) conforma un *polo* del filtro, y produce un pico de resonancia en la respuesta en amplitud.

Respuesta a impulso y función de transferencia de un filtro

Definimos al impulso como una señal digital ($u(n)$) cuya primera muestra vale 1, y todas las siguientes valen 0.

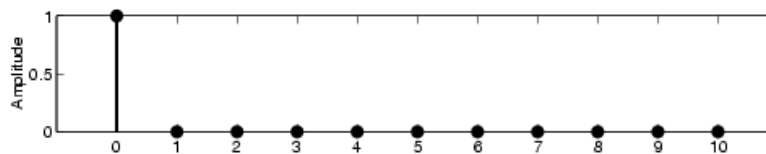


Figura 7

Esta señal se caracteriza por poseer un espectro que cubre todas las frecuencias del rango audible de forma constante.

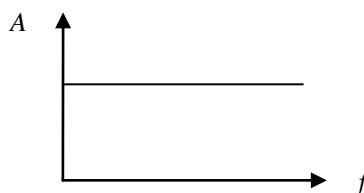


Figura 8

Si ingresamos un impulso a un filtro obtenemos su *respuesta a impulso*, señal que suele identificarse como $h(n)$. En situaciones normales, la respuesta a impulso se aproxima a cero a medida que el tiempo transcurre, y decimos en ese caso que el filtro es *estable*. Caso contrario, si la señal aumenta su amplitud con el tiempo, decimos que el filtro es *inestable*.

Consideremos, a modo de ejemplo, el siguiente filtro recursivo de primer orden, y observemos qué sucede al ingresar un impulso:

$$y(n) = x(n) + 0.9y(n - 1)$$

| n | $x(n)$ | $y(n - 1)$ | $y(n)$ |
|-----|--------|------------|--------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0,9 |
| 3 | 0 | 0,9 | $0,9 \times 0,9 = 0,81$ |
| 4 | 0 | 0,81 | $0,9 \times 0,81 = 0.73$ |
| 5 | 0 | 0,73 | $0,9 \times 0,73 = 0.65$ |
| 6 | 0 | 0.65 | $0,9 \times 0,65 = 0.58$ |
| 7 | 0 | 0.58 | <i>etc.</i> |

La respuesta a impulso es por lo tanto la siguiente:

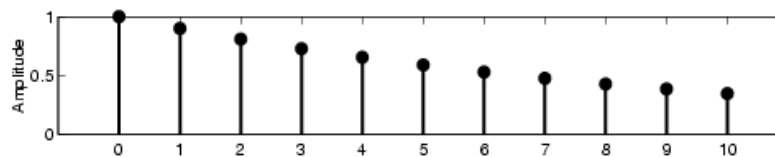


Figura 8

Podemos, entonces, definir al impulso como una señal discreta cuya primera muestra es unitaria y todo el resto nulo, que se representa como $u(n)$. El impulso posee una respuesta plana en frecuencia, y su utilización nos permite evaluar el comportamiento de un sistema, tanto en los aspectos temporales como espectrales por su brevedad, y porque posee energía en todas las frecuencias del rango audible.

Si registramos un sonido impulsivo en un determinado ambiente –producido por un disparo, por ejemplo– el recinto responderá a ese estímulo con múltiples reflexiones y una coloración espectral particular. Efectuando la *convolución* entre la respuesta a impulso de la sala $h(n)$ y otra señal $x(n)$, grabada de un instrumento musical al aire libre por ejemplo, obtendremos un resultado similar al del instrumento ejecutando en ese ambiente $y(n)$. En este caso, hemos evaluado a la sala como si se tratara de un filtro.

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

donde $h(n)$ es la respuesta a impulso, o sea la señal que egresa del filtro al ingresar un impulso, y el símbolo $*$ representa a la operación de *convolución*.

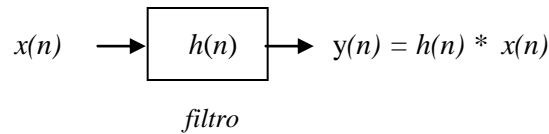


Figura 9

La siguiente ecuación define a la *convolución lineal*, que es útil cuando la respuesta a impulso contiene pocas muestras.

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^n x(m) h(n-m)$$

Caso contrario, es más conveniente aplicar la *convolución rápida*, que se obtiene a partir de la multiplicación de los dos espectros, el de la señal de entrada y el de la respuesta a impulso.

Es posible pasar de una respuesta a impulso $h(n)$ (una forma de onda representada en el dominio del tiempo) a una función de transferencia $H(k)$ (un espectro representable en el dominio de la frecuencia) utilizando la Transformada Discreta de Fourier (DFT, por *Fourier Discrete Transform*). Según se observa, reemplazamos la variable n (número de muestra de una señal en el dominio del tiempo) por la letra k (número de muestra de una señal en el dominio de la frecuencia) a fin de distinguirlas.

La *función de transferencia* describe la relación entre la entrada y la salida de un filtro a través de

$$H(k) = Y(k) / X(k)$$

$X(k)$ representa a la DFT de la señal de entrada, e $Y(k)$ a la de salida.

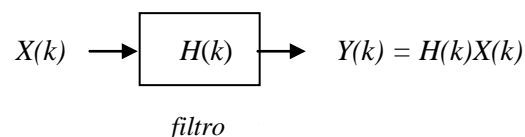


Figura 10

Podemos entonces definir a la *función de transferencia* como la relación entre el espectro de Fourier de la señal de salida y el de la señal de entrada, y dicho de otro modo, como el espectro de la respuesta a impulso del filtro. Ella nos informa en qué medida varía la amplitud y la fase de cada una de las componentes de la señal que a él ingresa.

Retardo de un fasor

Partiendo de la relación de Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$, y haciendo $e^{j\theta} = e^{j\omega t}$, obtenemos un fasor de radio unitario y velocidad ω .

Si aplicamos un retardo de τ segundos al fasor

$$e^{j\omega(t-\tau)} = e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t}$$

vemos que equivale a multiplicar al fasor por un factor complejo que no depende del tiempo t , sino del tiempo de retardo τ y la velocidad ω . Aplicar tal retardo significa atrasar al fasor en un ángulo igual a $-\omega\tau$ (porque $e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} = e^{j\omega t - j\omega\tau}$ y $\omega\tau$ es un ángulo).

El filtro básico desde otra perspectiva

Sumando al fasor otro fasor retardado nos queda:

$$y(t) = e^{j\omega t} + b_1 e^{j\omega(t-\tau)}$$

Según dijimos, el segundo fasor se encuentra retrasado un ángulo de $-\omega\tau$ radianes.

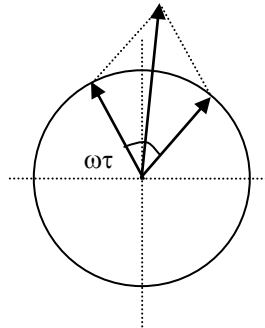


Figura 11

Si factorizamos el fasor obtenemos

$$y(t) = [1 + b_1 e^{-j\omega\tau}] e^{j\omega t}$$

lo cual nos dice que la salida del filtro es el mismo fasor con frecuencia ω , multiplicado por la expresión entre corchetes, a la cual llamamos respuesta en frecuencia.

$$H(\omega) = 1 + b_1 e^{-j\omega\tau}$$

De aquí podemos extraer la respuesta en amplitud (magnitud de la respuesta en frecuencia) y la respuesta en fase (ángulo de la respuesta en frecuencia). Podemos decir que el filtro multiplica la magnitud del vector de entrada por la frecuencia en amplitud del filtro y desplaza la fase de acuerdo a la respuesta en fase.

La magnitud de la respuesta en frecuencia es:

$$|H(\omega)| = |1 + b_1 e^{-j\omega\tau}|$$

$$|H(\omega)| = |1 + b_1 \cos \omega\tau - jb_1 \sin \omega\tau|$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{(1 + b_1 \cos \omega\tau)^2 + (-b_1 \sin \omega\tau)^2}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{1 + 2b_1 \cos \omega\tau + b_1^2 \cos^2 \omega\tau + b_1^2 \sin^2 \omega\tau}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{1 + 2b_1 \cos \omega\tau + b_1^2}$$

Resumiendo, dado el filtro

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

Podemos escribir

$$y(n) = x(n) [b_0 + b_1 e^{-j\omega}]$$

dado que n representa una cantidad de períodos de muestreo y $\tau = 1$, o sea un retardo de un período de muestreo.

Podemos llamar z a $e^{j\omega}$, con lo cual

$$y(n) = x(n) [b_0 + b_1 z^{-1}]$$

Que indica que multiplicar por z^{-1} (operador de retardo) equivale a retrasar a la señal en una muestra.

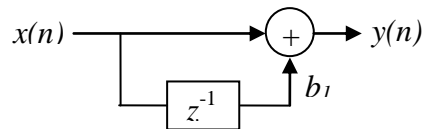


Figura 12

Si X es la señal $x(n)$ entera, con todas sus muestras, del mismo modo que Y lo es respecto a $y(n)$,

$$Y = X [b_0 + b_1 z^{-1}]$$

A la expresión $[b_0 + b_1 z^{-1}]$ se la define como la función de transferencia del filtro $H(z)$, y es un operador que escala y retrasa, o retrasa y escala, pues ambas operaciones son conmutativas al aplicarlas sobre la señal X).

$$Y = H(z)X$$

La función de transferencia resulta muy útil para resolver distintos casos, como el que se presenta cuando colocamos dos filtros ubicados uno a continuación de otro, en lo que se denomina una conexión en cascada. Supongamos que sus funciones de transferencia son $G(z) = a_0 + a_1 z^{-1}$ y $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$, respectivamente.

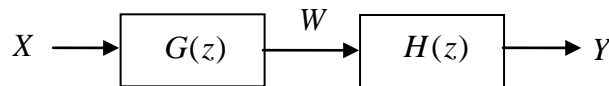


Figura 13

$$Y = H(z)W = H(z)[G(z)X]$$

Si multiplicamos ambos operadores, $H(z) \cdot G(z)$, obtenemos

$$H(z) \cdot G(z) = (a_0 + a_1 z^{-1})(b_0 + b_1 z^{-1})$$

$$H(z) \cdot G(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^{-1} + a_1 b_1 z^{-2}$$

por lo cual, los filtros se combinan del siguiente modo:

$$y(n) = a_0 b_0 x(n) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x(n-1) + a_1 b_1 x(n-2)$$

e indican que $H(z) \cdot G(z) = G(z) \cdot H(z)$

Representación gráfica en el plano z

Ejemplo, si

$$H(z) = 1 - b_1 z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{z - b_1}{z}$$

$$|H(\omega)| = \frac{|z - b_1|}{|z|} = |z - b_1| \quad \text{si } z = e^{j\omega}$$

El módulo de $z - b_1$ equivale a la distancia existente entre el punto que representa a ω y la ubicación de b_1 .

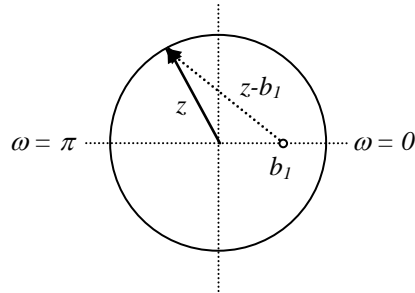


Figura 14

Transformada Z

Según vimos, un filtro digital es lineal si obedece al principio de superposición. Si las señales $x(n)$ son entradas, las $y(n)$ salidas, y a y b son constantes cualquiera, debe cumplirse que:

$$ax_1(n) + bx_2(n) = ay_1(n) + by_2(n)$$

Por otra parte, si la respuesta del filtro no varía con el paso del tiempo el filtro es invariante en el tiempo. Y si para $n < 0$, $x(n)$ vale 0, el filtro es, además, causal.

Finalmente, concluimos que un filtro lineal, invariante en el tiempo y causal puede ser descrito a partir de la ecuación:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

donde b y a son los coeficientes que determinan las características de ese filtro.

El signo negativo frente a los elementos recursivos proviene de la forma simétrica de escribir la ecuación. Suponiendo que el filtro es recursivo de orden 2, su ecuación en diferencias es:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

donde

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

Definición

La importancia de la transformada z radica en que permite reducir ecuaciones en diferencias a ecuaciones algebraicas, permitiendo la conversión del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

La transformada z se representa $Z\{x(n)\} = X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

donde z es una variable compleja, de la forma $re^{j\theta}$ (forma polar de un número complejo).

Considerando que las señales tratadas comienzan en tiempo cero, podemos comenzar la sumatoria en $n = 0$ (transformada Z unilateral).

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

Un ejemplo: $x(n) = \{1, 0, -1, 0, 2, 0, \dots\}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = 1 + 0z^{-1} - 1z^{-2} + 0z^{-3} + 2z^{-4} + \dots = 1 - z^{-2} + 2z^{-4}$$

z^{-1} puede interpretarse como un operador de retardo unitario, pues $x(n)z^{-1} = x(n-1)$, y $z^{-1}z^{-1} = z^{-2}$.

Impulso unitario

$Z\{\delta(n)\}$, sabiendo que $\delta(n) = \{1, 0, 0, \dots\}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = \delta(0)z^0 = 1$$

Impulso unitario con desplazamiento

$\delta(n-3) = \{0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots\}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-3)z^{-n} = z^{-3}$$

y en general

$$Z\{\delta(n-m)\} = z^{-m} \quad \text{si } |z| > 0$$

Escalón unitario

Para el escalón unitario, donde $u(n) = 1$ para todo $n \geq 0$, y 0 en caso contrario,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

Considerando que $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}}$$

Si $|z| < 1$ entonces la serie es convergente (la suma de los términos da un número finito, pues a medida que n aumenta los términos se vuelven cada vez más pequeños), y puede aplicarse la siguiente fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

La transformada Z del escalón unitario queda definida entonces como

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} = Z\{u(n)\}$$

Relación entre la transformada Z y la transformada de Fourier

Si reemplazamos z^{-n} por $e^{-j\omega n}$ obtenemos

$$X(e^{-j\omega n}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

que es la transformada de Fourier. Esto demuestra que la DFT es un caso particular de la transformada z .

Transformada Z de una ecuación en diferencias

Partiendo de la ecuación general en diferencias de un filtro LTI (lineal e invariante en el tiempo) vamos a aplicar la transformada z .

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_Mx(n-M) - a_1y(n-1) - \dots - a_Ny(n-N)$$

$$Z\{y(n)\} = Z\{b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_Mx(n-M) - a_1y(n-1) - \dots - a_Ny(n-N)\}$$

$$Z\{y(n)\} = Z\{b_0x(n)\} + Z\{b_1x(n-1)\} + \dots + Z\{b_Mx(n-M)\} - Z\{a_1y(n-1)\} - \dots - Z\{a_Ny(n-N)\}$$

$$Z\{y(n)\} = b_0Z\{x(n)\} + b_1Z\{x(n-1)\} + \dots + b_MZ\{x(n-M)\} - a_1Z\{y(n-1)\} - \dots - a_NZ\{y(n-N)\}$$

Aplicando el teorema del desplazamiento, que establece que un retardo Δ en el dominio del tiempo corresponde a una multiplicación por $z^{-\Delta}$ en el dominio de la frecuencia

$$x(n-\Delta) \leftrightarrow z^{-\Delta}X(z), \quad \Delta \geq 0$$

$$Z\{x(n-k)\} = z^{-k}X(z)$$

nos queda, entonces

$$Z\{y(n)\} = b_0 Z\{x(n)\} + b_1 z^{-1} Z\{x(n)\} + \dots + b_M z^{-M} Z\{x(n)\} - a_1 z^{-1} Z\{y(n)\} - \dots - a_N z^{-N} Z\{y(n)\}$$

Reemplazando $Z\{x(n)\}$ por $X(z)$ y $Z\{y(n)\}$ por $Y(z)$

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_M z^{-M} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - \dots - a_N z^{-N} Y(z)$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_N z^{-N} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_M z^{-M} X(z)$$

$$Y(z) [1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}] = X(z) [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

que es la función de transferencia de un filtro LTI, donde la salida está caracterizada por el producto de la transformada de la señal de entrada con la función de transferencia.

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

La función de transferencia nos permite ahora acceder a los polos (raíces del denominador) y ceros del filtro (raíces del numerador), luego de haber convertido la ecuación en diferencias, en polinomios. El teorema fundamental del álgebra expresa que un polinomio de grado N tiene exactamente N raíces, las cuales pueden ser reales o complejas. Cualquier valor de z que convierta al polinomio en cero, es su raíz.

Los polos representan regiones de resonancia en el espectro de la respuesta a impulso, mientras que los ceros representan depresiones. Observando la ecuación de la función de transferencia, vemos que un cero en el denominador la vuelve cero (cero), mientras que un cero en el denominador la vuelve infinito (polo).

Una forma posible de encontrar las raíces de un polinomio es mediante el factoro. Para poder factoro el numerador debemos quitar, en principio, el término b_0 del polinomio

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = b_0 \frac{1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

siendo $\beta_i = b_i / b_0$. Los polinomios factorados pueden ser expresados del siguiente modo:

$$H(z) = b_0 \frac{(1 - q_1 z^{-1})(1 - q_2 z^{-1}) \dots (1 - q_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_N z^{-1})}$$

donde las q representan a los polos del filtro, y las p a los polos. Cualquier q que convierta al numerador en 0 es un cero, y del mismo modo, cualquier p que convierta al denominador en 0 es un polo.

Ejemplo de obtención de la función de transferencia a partir de la respuesta a impulso

Vamos a analizar ahora un caso concreto: la respuesta de un filtro de un polo, cuya ecuación en diferencias es

$$y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$$

Si introducimos un impulso en nuestro filtro, la respuesta a impulso será

$$h(n) = \{1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, \dots\}$$

Podemos componer mejor este concepto observando la siguiente tabla:

| n | $x(n)$ | $y(n-1)$ | $y(n) = h(n)$ |
|-----|--------|----------|---------------|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | a_1 |
| 2 | 0 | a_1 | a_1^2 |
| 3 | 0 | a_1^2 | a_1^3 |
| 4 | 0 | a_1^3 | a_1^4 |
| ... | ... | ... | ... |

Aplicando la transformada z obtenemos la función de transferencia

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = 1 + a_1 z^{-1} + a_1^2 z^{-2} + a_1^3 z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$$

teniendo en cuenta que llegamos a ese resultado basándonos en

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = 1 + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}$$

con $a = 1$ y $r = a_1 z^{-1}$.

A partir de la función de transferencia podemos calcular la respuesta en frecuencia y la respuesta en fase del filtro. Para ello, evaluamos primero z como $e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega}}$$

y luego debemos calcular su magnitud $|H(e^{j\omega})|$ y su fase $\angle H(e^{j\omega})$.

La función de transferencia posee una parte real y otra imaginaria. Para extraer la magnitud podemos basarnos en la siguiente regla, que parte de multiplicar un complejo por su conjugado.

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

La magnitud es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria, por lo tanto.

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{1}{1-a_1e^{-j\omega}} \frac{1}{1-a_1e^{+j\omega}}} = \frac{1}{\sqrt{1-a_1e^{j\omega} - a_1e^{-j\omega} + a_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2 - a_1(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}}$$

Como $e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2\cos \omega$, sustituyendo en la ecuación nos queda

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2 - 2a_1 \cos \omega}}$$

A partir de esta ecuación, dando valores a a_1 obtenemos las distintas respuestas en frecuencia del filtro analizado. En el gráfico siguiente se representan tres respuestas, que corresponden a valores de K iguales a 0.8, 0.7 y 0.6. Según se observa, la ecuación corresponde a la de un filtro pasabajos.

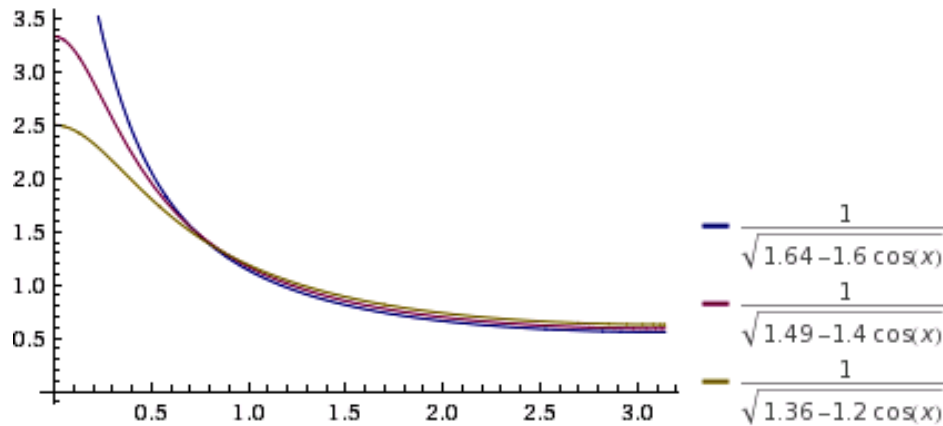


Figura 15

Para calcular la respuesta en fase dividimos la parte imaginaria por la parte real, y calculamos el arco tangente.

$$\angle(a + jb) = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

Pero en nuestro caso, el complejo se presenta bajo la forma $\angle\left(\frac{1}{a + jb}\right)$. Si recordamos que

$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$, y multiplicamos numerador y denominador por $a - jb$, podemos escribir

$$\angle \left(\frac{1}{a + jb} \right) = \angle \left(\frac{a - jb}{a^2 + b^2} \right) = \tan^{-1} \frac{-b}{a}$$

pues el divisor $a^2 + b^2$ no cambia la relación entre a y b .

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a_1 (\cos \omega - j \sin \omega)} = \frac{1}{1 - a_1 \cos \omega + ja_1 \sin \omega}$$

Habiendo obtenido la parte real y la imaginaria y calculando $\angle \left(\frac{1}{a + jb} \right) = \tan^{-1} \frac{-b}{a}$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \frac{-a_1 \sin \omega}{1 - a_1 \cos \omega}$$

A continuación se observa la respuesta en fase del filtro para valores de a_1 iguales a 0.8, 0.7 y 0.6.

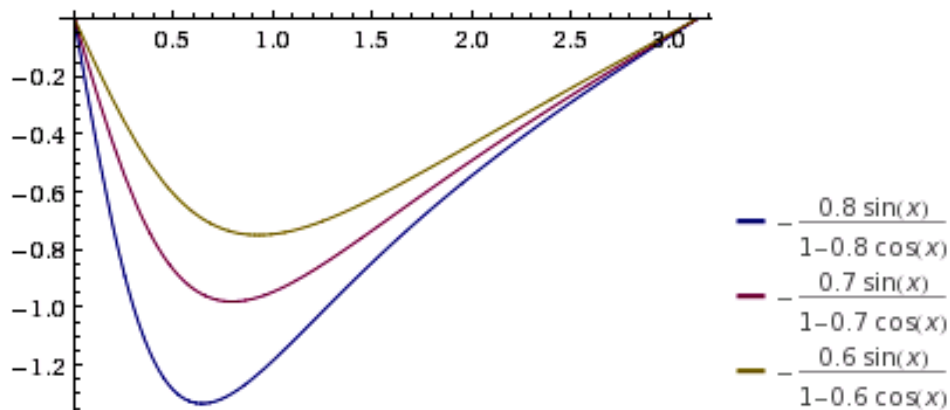


Figura 16

La función de transferencia a partir de la ecuación en diferencias del filtro

Consideremos el filtro de dos polos siguiente

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

Recurriendo a la ecuación de la función de transferencia de un filtro LTI

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

podemos escribir directamente la función de transferencia de nuestro filtro de de segundo orden

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

El orden del polinomio indica que existen dos raíces (polos del filtro) que podrían calcularse mediante la fórmula cuadrática para la resolución de ecuaciones de segundo grado.

$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aplicando esta fórmula podemos averiguar las raíces de la ecuación. Si el discriminante $b^2 - 4ac$ es igual a 0 el polinomio tiene dos raíces iguales, y la parábola que representa toca al eje de las abscisas en un solo punto. Si el discriminante es mayor que cero la ecuación presenta dos raíces reales distintas y la parábola corta al eje en dos puntos. Por último, si el discriminante es menor que cero, las raíces son complejos conjugados, y la parábola no corta al eje de abscisas.

Pero también podemos resolver las raíces del denominador de la función de transferencia mediante el factoro de la ecuación cuadrática, del siguiente modo,

$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})$$

donde p_1 y p_2 son los polos del filtro. Veamos cómo se relacionan los coeficientes con la ubicación de los polos.

$$(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) = 1 - p_2 z^{-1} - p_1 z^{-1} + p_1 z^{-1} p_2 z^{-1} = 1 - (p_1 + p_2) z^{-1} + p_1 p_2 z^{-2}$$

de lo cual se deduce que

$$p_1 + p_2 = -a_1 \quad \text{y} \quad p_1 p_2 = a_2$$

Ahora, si consideramos que las raíces son números complejos conjugados (por ser reales los coeficientes), podemos escribirlos de la siguiente manera:

$$p_1 = r e^{j\theta} \quad \text{y} \quad p_2 = r e^{-j\theta}$$

donde r es el módulo, o sea la distancia entre punto ubicado en el plano complejo y el origen de coordenadas, y θ es el argumento (ángulo).

$$p_1 + p_2 = r e^{j\theta} + r e^{-j\theta}$$

de acuerdo a la relación de Euler:

$$p_1 + p_2 = r(\cos \theta + j \sin \theta) + r(\cos \theta - j \sin \theta) = 2r \cos \theta$$

$$p_1 p_2 = r(\cos \theta + j \sin \theta) \cdot r(\cos \theta - j \sin \theta) = r^2$$

Sustituyendo en $1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$, nos queda

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (p_1 + p_2)z^{-1} + p_1 \cdot p_2 z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

que es la función de transferencia, en la cual observamos el valor de los coeficientes obtenidos a partir de la ubicación de los polos.

La utilidad de conocer los polos o ceros de un filtro reside en la posibilidad de graficarlos en el plano z , y a partir de ello obtener la respuesta en frecuencia y en fase de forma gráfica y sencilla. El plano z puede contener una circunferencia de radio unitario, que es definida por las soluciones de $z = e^{j\omega}$, y sobre la cual se representan las frecuencias entre 0 (en $z = 1$) y $R/2$ (frecuencia de Nyquist, en $z = -1$) sobre los ángulos que van de 0 a π radianes.

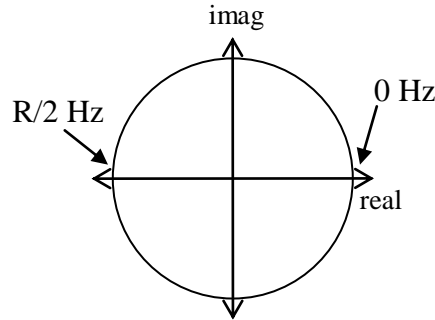


Figura 17

Los polos y los ceros se ubican en el plano z , ya sea dentro o fuera de la circunferencia unitaria. No obstante, es preciso considerar que si los polos se ubican fuera de la circunferencia producen un filtro de tipo inestable.

Recordemos entonces que la función de transferencia puede ser factorada, para obtener de ese modo los polos y los ceros del filtro.

$$H(z) = b_0 \frac{(1 - q_1 z^{-1})(1 - q_2 z^{-1}) \dots (1 - q_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_N z^{-1})}$$

El único polo (p_1) del filtro $y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$, ya analizado, cuya función de transferencia es $H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$, se encuentra obviamente en a_1 , pues $1 - a_1 z^{-1}$ equivale a $(1 - p_1 z^{-1})$ en la

ecuación general anterior. Veamos cómo se grafica ese polo (con una X) en el plano z , para un valor de $a_1 = 0.8$.

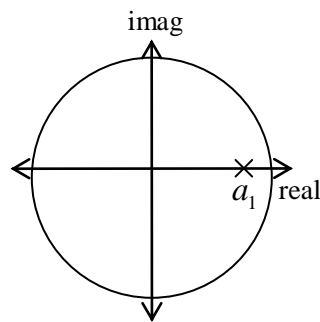


Figura 18

Podemos obtener la respuesta del filtro para una frecuencia cualquiera trazando un segmento entre el punto a_1 y el punto sobre la circunferencia unitaria que representa a la frecuencia elegida. La ganancia que aporta el polo sobre la frecuencia considerada equivale al recíproco ($1/L$) de la longitud del segmento (L).

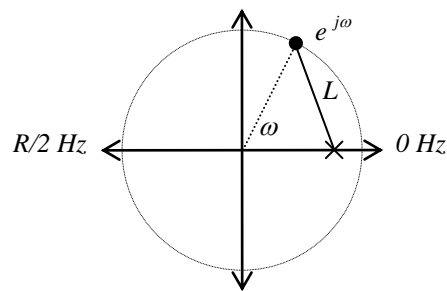


Figura 19

Si movemos el punto $e^{j\omega}$ sobre la circunferencia, entre 0 y π radianes, y calculamos el recíproco de las longitudes entre ese punto y el polo, para cada ángulo ω , obtendremos así la respuesta en frecuencia. Este es el equivalente gráfico de la evaluación de la función de transferencia para $z = e^{j\omega}$, que calculamos anteriormente.

Obtenida la función de transferencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega}}$$

si consideramos $a_1 = 0.8$ y $\omega = 0$ radianes (que equivale a la frecuencia de 0 Hz),

$$1 - a_1 e^{-j\omega} = 1 - 0.8 \cos(0) = 0.2$$

que es la longitud L . Haciendo el recíproco de L (o sea $1/L$) obtenemos la ganancia para 0 Hz ($1/0.2 = 5$).

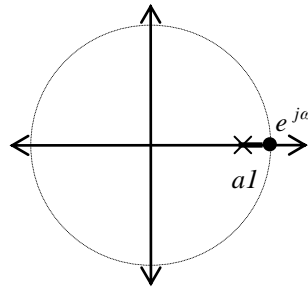


Figura 20

Veamos un caso más, cuando $a_1 = 0.8$ y $\omega = \pi/2$ radianes (que equivale a la frecuencia de $R/4$ Hz).

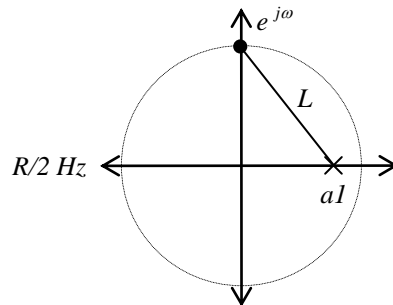


Figura 21

En este caso, la longitud L equivale, de acuerdo al teorema de Pitágoras a $\sqrt{1^2 + 0.8^2} \cong 1.28$, por lo cual la ganancia para $R/4$ Hz es $1/1.28 = 0.78$.

En general, a L la podemos calcular como la distancia entre dos puntos en el plano complejo, que son respectivamente $p_1 = a_1(\cos \theta + j \sin \theta)$ y $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$. Aplicando el teorema de Pitágoras, L resulta ser

$$L = \sqrt{(a_1 \cos \theta - \cos \omega)^2 + (a_1 \sin \theta - \sin \omega)^2}$$

pero para calcular la ganancia aportada por el polo debemos hacer el recíproco de L , dado que los polos –a diferencia de los ceros– se encuentran en el denominador.

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{(a_1 \cos \theta - \cos \omega)^2 + (a_1 \sin \theta - \sin \omega)^2}}$$

Anteriormente calculamos la respuesta en frecuencia de $y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$ a partir de la transformada Z de su respuesta a impulso. El mismo resultado obtenemos calculando los recíprocos de las distancias entre el polo y $e^{j\omega}$, para cada valor de ω , mediante esta última ecuación, con $a_1 = 0.8$.

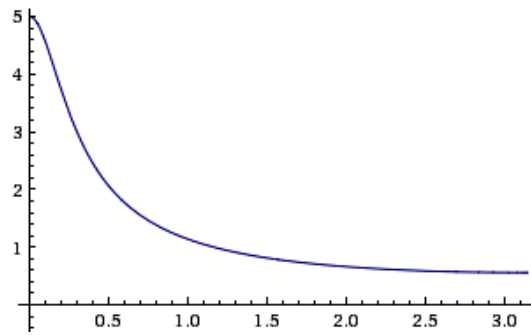


Figura 22

En el caso donde existan más polos, o incluso ceros, la magnitud del espectro puede obtenerse mediante la siguiente expresión:

$$|H(e^{j\omega})| = a_0 \frac{\prod_{i=1}^M Lz_i}{\prod_{i=1}^N Lp_i}$$

donde $\prod_{i=1}^M Lz_i$ indica el producto entre todas las longitudes entre los ceros y el punto $e^{j\omega}$ y $\prod_{i=1}^N Lp_i$ el producto entre todas las longitudes entre los polos y el punto $e^{j\omega}$.

En relación con las fases, si θ_{z_i} es el ángulo formado por la línea que une al cero z_i con $e^{j\omega}$, y θ_{p_i} es el ángulo formado por la línea que une al polo p_i con $e^{j\omega}$, las fases en función del ángulo ω son:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^M \theta_{z_i} - \sum_{i=1}^N \theta_{p_i}$$

Filtro bicuadrático

El filtro bicuadrático toma su nombre a partir de las dos funciones cuadráticas que contiene. Su ecuación por diferencias es:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) + a_2y(n-2)$$

y la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

A fin de simplificar, vamos a convertir antes a los exponentes negativos de las z en positivos, multiplicando por z^2/z^2 .

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z^1 + b_2}{z^2 + a_1 z^1 + a_2}$$

Ahora, para poder factorarlos, y encontrar las raíces de los polinomios, dividimos numerador y denominador por b_0 . Denominaremos a los b_m/b_0 como β_m . Y a b_0 la llamamos g .

$$H(z) = g \frac{z^2 + \beta_1 z^1 + \beta_2}{z^2 + a_1 z^1 + a_2}$$

Resolviendo los dos polinomios mediante la fórmula cuadrática, nos queda:

$$q = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_2}}{2} \quad p = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

y $H(z)$ factoreada es

$$H(z) = g \left(\frac{(z - q_1)(z - q_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} \right)$$

Multiplicando ahora por z^{-1}/z^{-1} , para regresar a los exponentes negativos de z

$$H(z) = g \left(\frac{(1 - q_1 z^{-1})(1 - q_2 z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})} \right)$$

La multiplicación en el dominio z equivale a la distribución de filtros de primer orden en serie. En tal sentido, podemos escribir la ecuación del filtro bicuadrático separando los términos mediante multiplicaciones, de la siguiente forma:

$$H(z) = g(1 - q_1 z^{-1})(1 - q_2 z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{1 - p_2 z^{-1}} \right)$$

Cada término entre paréntesis es un filtro de un polo o un cero, y en *Pure Data* puede programarse como a continuación se observa, empleando los objetos *czero~* y *cpole~*.

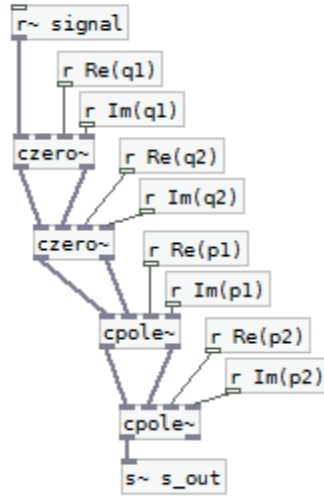


Figura 23

$Re(q1)$, $Im(q1)$, y las demás etiquetas se refieren a la ubicación de los ceros y polos a través de coordenadas cartesianas.

El denominador de la función de transferencia factorizada ($A(z)$) puede representarse del siguiente modo:

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 - Re^{j\theta} z^{-1})(1 - Re^{-j\theta} z^{-1}) = 1 - R \cos(\theta) z^{-1} + R^2 z^{-2}$$

en la cual $Re^{j\theta}$ y $Re^{-j\theta}$ son las raíces conjugadas del polinomio, $\theta = 2\pi f_c T$ representa a la frecuencia resonante f_c , y R determina el ancho Q de resonancia. Los coeficientes a_1 y a_2 en la ecuación en diferencias son, por lo tanto, $-R \cos(\theta)$ y R^2 , respectivamente, lo cual ya habíamos observado al tratar el filtro de dos polos.

Teorema del desplazamiento

En relación con la **transformada Z**, el teorema del desplazamiento establece que un retardo Δ en el dominio del tiempo corresponde a una multiplicación por $z^{-\Delta}$ en el dominio de la frecuencia

$$x(n - \Delta) \leftrightarrow z^{-\Delta} X(z), \quad \Delta \geq 0$$

Demostración:

$$Z\{x(n - \Delta)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n - \Delta) z^{-n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=-\Delta}^{\infty} x(m)z^{-(m+\Delta)} \quad m = n - \Delta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}z^{-\Delta} \quad \Delta \geq 0, x(n) = 0 \text{ para } n < 0 \\
&= z^{-\Delta} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z\{x(n-\Delta)\} = z^{-\Delta} X(z)}$$

Bibliografía

Chowning, J. M. “The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation”. *Journal of the Audio Engineering Society*, 21(7):526-534. Reprinted in Curtis Roads and John Strawn, eds. *Foundations of Computer Music*, Cambridge, MA: MIT Press, 1985.

Moore, F. Richard. *Elements of Computer Music*. MIT Press. Massachussets. 1991.

Moore, F. R. “An introduction to the mathematics of digital signal processing, Part I”. *Computer Music Journal*, 2(1):38-47. Reprinted in John Strawn, ed. *Digital Signal Processing: An Anthology*, Los Altos, CA: William Kaufmann, Inc. 1985.

Moore, F. R. “An introduction to the mathematics of digital signal processing, Part II”. *Computer Music Journal*, 2(2):38-60. Reprinted in John Strawn, ed. *Digital Signal Processing: An Anthology*, Los Altos, CA: William Kaufmann, Inc. 1985

Smih, Julius.”Introduction to complex numbers”. Adapted from Music 320 Course Reader. CCRMA. Stanford University. 1999.

Smith, Julius O. *Introduction to Digital Filters, September 2005 Draft*, Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), Stanford University, Web published at <http://ccrma.stanford.edu/~jos/filters05/>.

Smith, Julius. *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with Audio Applications, Second Edition*. CCRMA online book. <http://ccrma.stanford.edu/~jos/mdft/mdft.html>