Semitiel, José ; Arnulfo, Angélica ; Cianciardo, Cintia

Estudio de la estabilidad de una variante del modelo de la telaraña

Anuario de la Facultad de Ciencias Económicas del Rosario Nº 10, 2014

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE UNA VARIANTE DEL MODELO DE LA TELARAÑA

Semitiel, José ; Arnulfo, Angélica ; Cianciardo, Cintia[131]

Facultad de Ciencias Económicas del Rosario
Universidad Católica Argentina
Av. Pellegrini 3314, CP 2000, Argentina

Resumen.
Este artículo versa sobre una de las aplicaciones de las ecuaciones en diferencias finitas lineales de primer orden en el análisis económico de un problema. A partir del conocido modelo de la telaraña o modelo de cobweb se introducen, siguiendo a P. Cagan (1956), expectativas adaptativas y se obtiene una variante de dicho modelo. Se estudia la estabilidad de tal variante a partir del análisis del carácter de la sucesión de precios generada por la solución del modelo.
Palabras clave: Ecuaciones en diferencias finitas- Variante del modelo de la telaraña- Estabilidad

1. Introducción

En Economía es frecuente estudiar cómo evolucionan los valores de una misma variable en distintos instantes temporales. Si la variable tiempo se considera como algo continuo, dicha evolución se estudia utilizando *ecuaciones diferenciales*. Sin embargo, si el tiempo es tratado de manera discreta, es decir que dicha variable sólo puede tomar valores enteros, se utilizan entonces las *ecuaciones en diferencias finitas*.

Las ecuaciones en diferencias finitas se pueden aplicar en diferentes ámbitos económicos y financieros. Son muchos y variados los ejemplos

[131] {semitiel, aarnulfo, cintiac}@fceia.unr.edu.ar

de modelos microeconómicos y macroeconómicos que se plantean a partir de esta formulación. El cálculo de la solución (general y particular) de las ecuaciones en diferencias finitas y su posterior interpretación puede ser de gran utilidad en contextos económicos y financieros.

En este artículo presentamos una aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas lineales de primer orden, conocida con el nombre de *modelo de la telaraña* o *modelo general de cobweb* del economista británico Nicholas Kaldor (1934), para estimar los precios en un mercado agrícola. Más precisamente efectuamos el estudio de una variante del modelo de la telaraña al considerar, como sugiere Phillip D. Cagan (1956), expectativas adaptativas.

Para el nuevo modelo planteado obtenemos su solución, que genera una sucesión de precios, y analizamos el carácter de la misma.

Por último, y en función de los resultados obtenidos al estudiar la convergencia de la sucesión de precios, se analiza la estabilidad de la variante del modelo de la telaraña planteado.

2. Una variante delmodelo de la telaraña

2.1. El modelo de la telaraña

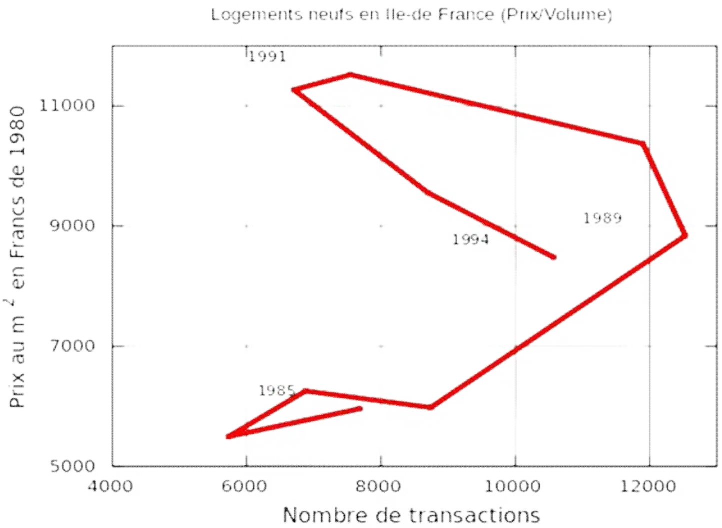
El *modelo de la telaraña* explica el modelo general que sigue la formación de los precios de los productos, cuya demanda se establece como una función del precio del mercado y la oferta en función del precio de mercado observado en el período inmediatamente anterior, como puede ser un día, semana, temporada, año, etc. En la práctica, el modelo se aplica principalmente a bienes y servicios cuya producción es discontinua, tales como productos agrícolas.

Este modelo puede explicar las fluctuaciones que se producen en los precios de los mercados. Tras un fuerte cambio en la producción (aumento o disminución), es el propio mercado que lleva a cabo el proceso de ajuste, corrigiendo la desviación hasta alcanzar su precio en equilibrio.

El modelo recibe el nombre de telaraña pues el proceso de ajuste gráficamente se asemeja a la de una tela de araña. Por ejemplo, la Ilustración 1 muestra la relación entre los precios y el volumen de ventas de viviendas (casa y pisos) nuevos en la región central de Francia entre 1985-1994.

Ilustración 1. El modelo de la telaraña

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_telara%C3%B1a



Para formular matemáticamente este modelo, se tienen en cuenta las siguientes hipótesis:

[a] la decisión de producir debe ser adoptada en el período anterior al de la venta y se confía en el que el precio actual se mantendrá en el próximo período;

[b] las cantidades demandadas y ofertadas son funciones lineales del precio del producto;

[c] el mercado está en situación de equilibro.

Entonces el modelo de la telaraña se puede expresar matemáticamente mediante el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (i) \quad q_t^D = a - bp_t \\ (ii) \quad q_t^S = -c + dp_{t-1} \\ (iii) \quad q_t^D = q_t^S \end{cases} \tag{1}$$

donde q_t^D y q_t^S representan las cantidades demandada y ofertada respectivamente en el instante de tiempo t, p_t representa el precio en el instante de tiempo t, y las constantes a, b, c y d son todas positivas.

La ecuación (1)(i) es la ecuación de demanda donde la cantidad demandada es una función lineal del precio (hipótesis [b]). La ecuación (1)(ii) representa la ecuación de oferta donde la cantidad ofertada es una función lineal del precio en un período anterior (hipótesis [a] y [b]). Mediante la ecuación (1)(iii) se indica que el mercado está en equilibrio (hipótesis [c]).

2.2. Cambio de hipótesis

La hipótesis [a] es poco aceptable en general. Por tal motivo, si se introduce en la función de oferta un precio p_t^*, significando con ello el precio esperado para el período t al momento de efectuarse la venta, se introducen variantes en el modelo de la telaraña, quedando el mismo expresado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} (i) \quad q_t^D = a - bp_t \\ (ii) \quad q_t^S = -c + dp_t^* \\ (iii) \quad q_t^D = q_t^S \end{cases} \tag{2}$$

Si además se define un precio normal p_n como el precio en que los productores creen que, más tarde o más temprano, ese producto tendrá en el mercado, y por lo tanto el precio en el mercado "se ajustará" mediante el precio normal, se introduce en el modelo otra variante. A esta nueva variante se la puede expresar:

$$p_t^* = p_{t-1} + k\left(p_n - p_{t-1}\right) \tag{3}$$

donde $0 < k < 1$.

En 1956, Phillip D. Caganen [1] y [2],sugiere una variante del modelo con expectativas adaptativas, pues al considerar p_n no constante, éstas son revisadas en cada período por parte del productor, ajustando el precio previamente esperado. De esta manera, se sustituye la ecuación (3) por la expresión:

$$p_t^* - p_{t-1}^* = k\left(p_{t-1} - p_{t-1}^*\right) \tag{4}$$

donde $0 < k < 1$ es llamado *coeficiente de ajuste de las expectativas*.

Con este último supuesto, se puede construir una variante del modelo de la telaraña que es el que nos proponemos estudiar en este artículo y el cual puede expresarse como:

$$\begin{cases} (i) & q_t^D = a - bp_t \\ (ii) & q_t^S = -c + dp_t^* \\ (iii) & q_t^D = q_t^S \\ (iv) & p_t^* - p_{t-1}^* = k\left(p_{t-1} - p_{t-1}^*\right) \end{cases} . \tag{5}$$

2.3. Solución del modelo

Para estudiar la estabilidad de la solución de (5), resolvemos dicho problema para p_t. Para ello, sustituyendo (5)(*i*) y (5)(*ii*) en (5)(*iii*), se tiene que:

$$a - bp_t = -c + dp_t^* . \tag{6}$$

de donde:

$$p_t^* = \frac{a+c}{d} - \frac{b}{d} p_t , \tag{7}$$

y reemplazando (7) en (5)(*iv*):

$$p_t = \left(1 - \frac{d}{b}k - k\right) p_{t-1} + k \frac{a+c}{b} , \tag{8}$$

o equivalentemente

$$p_t = A p_{t-1} + B . \tag{9}$$

donde

$$A = 1 - k\left(1 + \frac{d}{b}\right), \tag{10}$$

y

$$B = \frac{k(a+c)}{b} . \tag{11}$$

Las ecuaciones (8) ó (9) son *ecuaciones en diferencias finitas lineales de primer orden.*

Dado que $d > 0, b > 0$ y $0 < k < 1$ de (10) resulta que $A < 1$.

Supongamos que el precio inicial, vale decir, el precio en el instante $t = 0$ es p_0. Entonces los precios en los instantes $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$ son

$$p_1 = A p_0 + B , \tag{12}$$

$$p_2 = A p_1 + B = A\left(A p_0 + B\right) + B = A^2 p_0 + B\left(1 + A\right), \tag{13}$$

$$p_3 = A p_2 + B = A\left(A^2 p_0 + B\left(1 + A\right)\right) + B = A^3 p_0 + B\left(1 + A + A^2\right), \tag{14}$$

respectivamente. Luego, se puede inferir que

$$p_t = A^t p_0 + B\left(1 + A + A^2 + ... + A^{t-1}\right), \tag{15}$$

para $t=1,2,3,...$ .Como

$$1+A+A^2+.....+A^{t-1}=\frac{1-A^t}{1-A},\quad(16)$$

con $t=1,2,3,\ldots$, sustituyendo (16) en (15) se obtiene que:

$$p_t=\alpha A^t+\beta, \qquad (17)$$

para $t=0,1,2,3,...$ siendo

$$\alpha=p_0-\frac{a+c}{b+d}, \qquad (19)$$

y

$$\beta=\frac{a+c}{b+d}. \qquad (20)$$

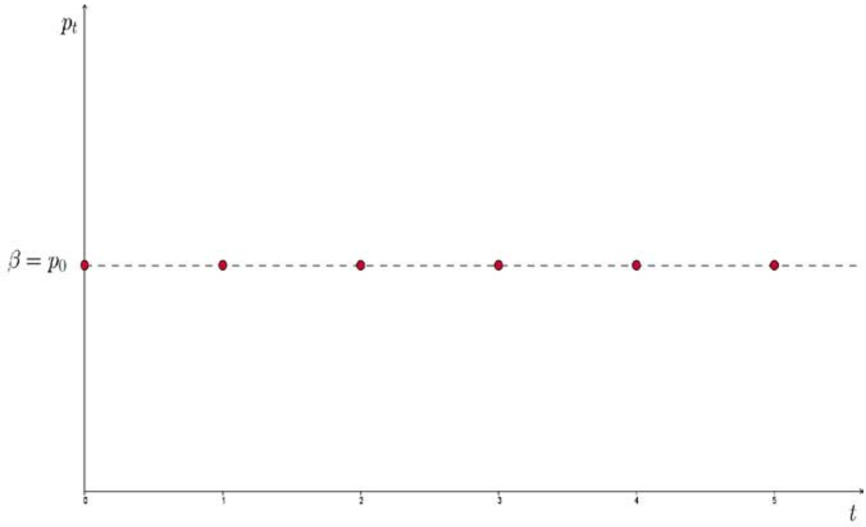
La ecuación (17) representa la solución de la variante del modelo de la telaraña planteado en (5) con la condición inicial (precio inicial) p_0. Esta solución genera una sucesión de precios $p_0,\ p_1,\ p_2,...$ que representamos por $\{p_t\}$.

2.4. Análisis de la solución del modelo

Con el propósito de estudiar la estabilidad de la ecuación en diferencias (9) y por lo tanto del modelo planteado en (5), en este apartado analizaremos el carácter de la sucesión $\{p_t\}$ dada en (17).

Si $\alpha=0$ la ecuación en diferencias dada en (8) tiene por solución a la sucesión constante $p_t=\beta$ para todo $t=0,1,2,3,...$como se muestra en la Ilustración 2. Luego, la sucesión $\{p_t\}$ *converge* al valor β llamado *precio en equilibrio* o *precio estacionario* de dicha sucesión.

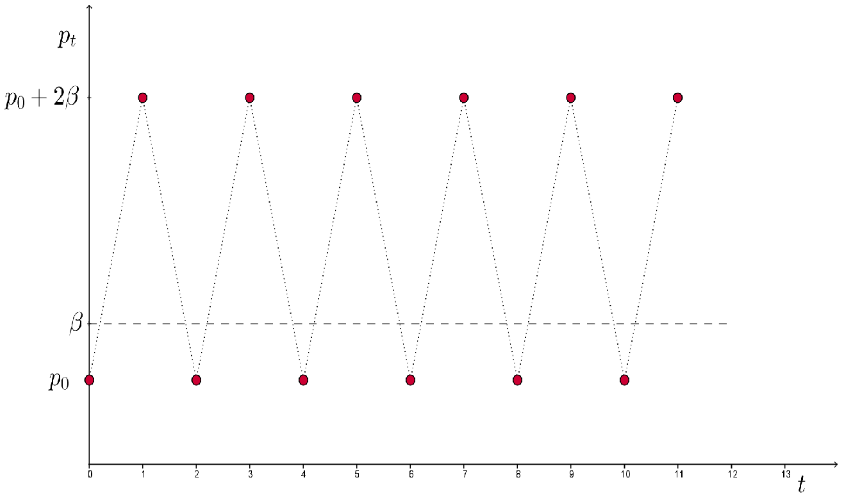
Ilustración 2. Trayectorias temporales: $\alpha = 0$



Supongamos ahora $\alpha \neq 0$, es decir, el precio inicial es diferente al precio en equilibrio.Si $A = 0$ entonces $p_t = \beta$ para todo $t = 0,1,2,3,...$ por lo que la situación es idéntica al caso en que $\alpha = 0$ (ver Ilustración 2). Por lo tanto, la sucesión $\{p_t\}$ es*convergente* al precio en equilibrio β, independientemente de las condiciones iniciales.

Si $A = -1$ se tiene que $p_t = p_0$ para todo $t = 2k$ con $k = 0,1,2,3,....$, mientras que $p_t = p_0 + 2\beta$ para todo $t = 2k - 1$ con $k = 1,2,3,....$. La Ilustración 3muestraque la sucesión dada en (17) oscila en forma acotada y por lo tanto es *divergente.*

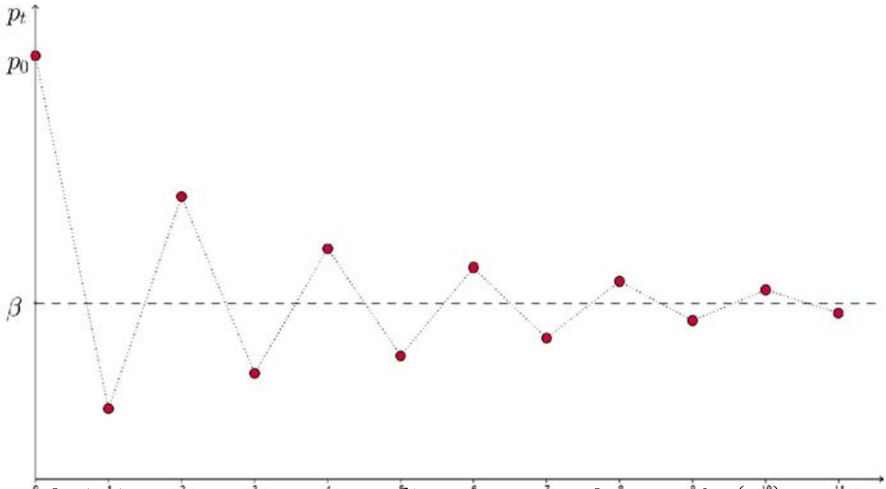
Ilustración 3. Trayectorias temporales: $\alpha \neq 0$, $A = -1$ y $p_0 < \beta$.



Si $-1 < A < 0$ entonces si $t \to +\infty$ de (17) se tiene que $p_t \to \beta$. Por lo tanto la sucesión $\{p_t\}$ converge oscilatoriamente al precio en equilibrio.

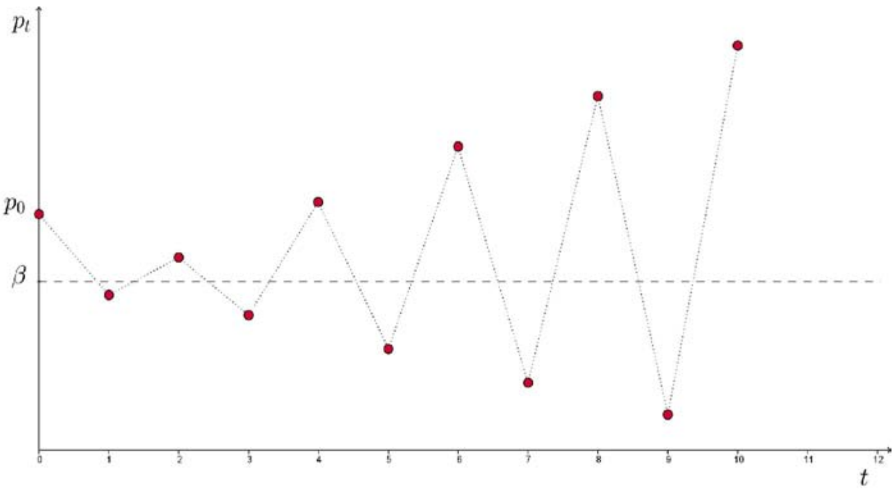
En la Ilustración 4se puede observar que el nivel de precios tiende al nivel de equilibrio, partiendo de una situación en la cual la demanda del producto en su período inicial es mucho mayor a la cantidad ofrecida, que luego por presiones de demanda y oferta, tiende en el mediano a largo plazo al equilibrio.

Ilustración 4. Trayectorias temporales: $\alpha \neq 0$, $-1 < A < 0$ y $\beta < p_0$.



Si $A < -1$ de (17) se tiene que no existe $\lim_{t \to +\infty} p_t$, entoncesla sucesión $\{p_t\}$ dada en (17) es oscilatoria no acotada como se observa en la Ilustración 5. Resulta entonces que dicha sucesión es *divergente*.

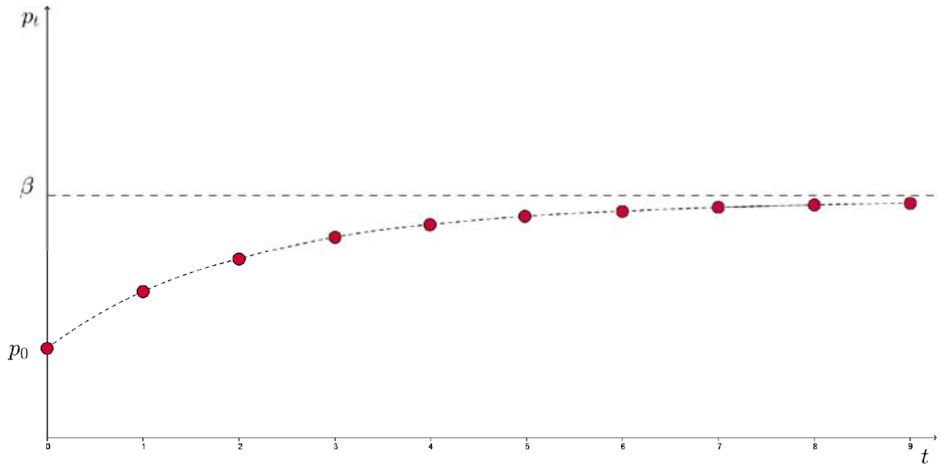
Ilustración 5. Trayectorias temporales: $\alpha \neq 0$, $-1 < A < 0$ y $\beta < p_0$.



Si $0 < A < 1$ entonces si $t \to +\infty$ de (17) se tiene que $p_t \to \beta$.

Por lo tanto la sucesión $\{p_t\}$ *converge* monótonamente al precio en equilibrio. En la Ilustración 6 se puede observar que el nivel de precios crece en el tiempo tendiendo en el mediano a largo plazo, al nivel de equilibrio.

Ilustración 6. Trayectorias temporales: $\alpha \neq 0$ **,** $-1 < A < 0$ **y** $p_0 < \beta$ **.**



3. Conclusiones

En el párrafo 2.3hemos analizado el carácter de la sucesión de precios $\{p_t\}$ dada en (17) generada a partir de la solución de la variante del modelo de la telaraña planteado en (5). En la Tabla 1 se muestran los distintos resultados obtenidos.

Tabla 1. Carácter de la sucesión de precios $\{p_t\}$ dada en (17)

Convergente monótona	Convergente oscilatoria	Divergente a $\pm\infty$	Divergente oscilatoria
▪ $\alpha = 0$ ▪ $\alpha \neq 0,\ 0 \leq A < 1$	▪ $\alpha \neq 0,\ -1 < A < 0$	▪ $\alpha \neq 0,\ A < -1$	▪ $\alpha \neq 0,\ A = -1$

La *estabilidad* del modelo planteado en (5) dependerá de la ecuación en diferencias dada en (8) sea o no estable, es decir si la solución (sucesión de precios) dada en (17) converge o no al precio en equilibrio β, independientemente de las condiciones iniciales (precio inicial p_0).

Llamamos $\xi = -\dfrac{d}{b}$, cociente entre las pendientes de las ecuaciones de oferta y demanda dadas en (5)(*i*) y (5)(*ii*) respectivamente, concluimos que el modelo planteado en (5) resulta ser:

- *estable* si $1 - \dfrac{2}{k} < \xi < 1$,
- *inestable* si $\xi \leq 1 - \dfrac{2}{k}$.

4. Referencias bibliográficas

[1] Di Marco, L., Expectativas de Precios, *Revista Económica*, Vol. 15, No. 3, 1969, pp. 275-282.

[2] Christev, A., The Hiperinflation Model of Money Demand (or Cagan Revisited): Some new Empirical Evidence from the 1990s,*Centre for Economic Reform and Transformation*, 2007, http://www2.hw.ac.uk/sml/downloads/cert/wpa/2005/dp0507.pdf(Acceso el 20 de febrero de 2015).

[3] Chiang, A. (1987).*Métodos fundamentales de Economía Matemática*. México: Mc Graw-Hill.

[4] Tenorio Villalón, A., Martín Caraballo, A., Paralera Morales, C., Contreras Rubio, I.: Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros, *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 16, 2003, 165-199.

[5] Weber, J. (1984). *Matemáticas para Administración y Economía*. México, D.F: Harla.