Arnulfo, Angélica ; Cianciardo, Cintia ; González, María ; Semitiel, José

Un problema motivador para el estudio de ecuaciones diferenciales en ciencias económicas

Anuario de la Facultad de Ciencias Económicas del Rosario Nº 11, 2015

UN PROBLEMA MOTIVADOR PARA EL ESTUDIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN CIENCIAS ECONÓMICAS

Angélica. Arnulfo; Cintia Cianciardo; María González; José Semitiel[1]

Facultad de Ciencias Económicas del Rosario

Universidad Católica Argentina

Av. Pellegrini 3314, CP 2000, Argentina

Resumen. En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En ella se intenta que el alumno de Ciencias Económicas valorice la necesidad de los conceptos matemáticos en la resolución de problemas de su especialidad.

Palabras clave: Propuesta de estudio – Problema motivador – Ecuaciones diferenciales – Elasticidad de la demanda.

1. Introducción

No siempre es claro para los estudiantes de Ciencias Económicas, cuyo campo de especialización no es la Matemática, el rol que juega la misma en la currícula de sus respectivas carreras.

Nuestra experiencia como docentes en carreras de Ciencias Económicas nos lleva a proponer que los profesores del área Matemática orienten los contenidos hacia aplicaciones a la Administración yla Economía y que los fundamentos matemáticos dados sea utilizados en las asignaturas de la carrera para las cuales la Matemática es una invalorable herramienta.

Estamos convencidos que la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en estas carreras va más allá del hecho de enseñar fórmulas o teoremas; deben lograr que el alumno construya el conocimiento de forma tal que pueda recurrir al mismo, de manera natural, cuando se lo requiera. Este trabajo debe comenzar desde el inicio de la carrera. Desde este momento los docentes de Matemática y los de las asignaturas donde ésta es utilizada deberán interactuar para optimizar el trabajo y lograr que se proporcionen los fundamentos matemáticos

[1]aarnulfo@fceia.unr.edu.ar; cintiac@fceia.unr.edu.ar; fliafongi@gmail.com; semitiel@fceia.unr.edu.ar

necesarios y de manera apropiada. Recordemos que en el primer curso de Matemática se presenta el concepto de derivada, herramienta fundamental en la Economía ya que brinda la posibilidad de realizar cálculos marginales, es decir, obtener la razón de cambio en los casos que se agrega una unidad adicional al total. Así, por ejemplo, las funciones de costo marginal, beneficio o producción marginal resultan ser las derivadas de las funciones costo, beneficio y producción respectivamente. Deseamos aclarar esto ya que, nuestro trabajo consiste en una propuesta didáctica para el estudio, entendido éste como el proceso enseñanza-aprendizaje-evaluación, de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en carreras de Ciencias Económicas y éste es un contenido que se presenta, en el actual plan de estudios, recién en Matemática III.

Organizamos el artículo en cuatro secciones.

La primera de ellas es la presente: *Introducción.* La segunda, consiste en una *Fundamentación de la propuesta* donde, a partir del pensamiento de diferentes referentes teóricos, se indica la importancia de la modelización. En la tercera, presentamos la *Propuesta didáctica* para la construcción del concepto de ecuación diferencial, siguiendo algunas nociones elementales de la Teoría de Elasticidad de la demanda. Por último, se exponen algunas *Conclusiones* de esta propuesta.

2. Fundamentación de la propuesta

Hay gran cantidad de publicaciones que tratan del papel que cumple la Matemática en la Economía. Este tema, no exento de polémica, además de repercutir en el desarrollo de la Economía como ciencia social influye decisivamente en la docencia de la Matemática en carreras de Ciencias Económicas.

Son cada vez más los economistas que consideran que la utilización de la Matemática, como lenguaje simbólico y método de razonamiento científico, constituye un elemento de ayuda inestimable en las tareas y objetivos de la Economía. Su presencia resulta fundamental tanto en la descripción de las complejas relaciones económicas como en la formulación de proposiciones sobre relaciones de comportamiento.

La Matemática tuvo un desarrollo muy fuerte al servicio de las Ciencias Físicas lo que hizo que diferentes situaciones problemáticas de la Economía encuentren dificultades para resolverse usando el lenguaje clásico de la misma. No cabe duda que las necesidades de la Economía en los dos últimos siglos, y en especial en los últimos años, han provocado el avance de nuevos desarrollos matemáticos que complementados con los avances informáticos permiten agilizar los cálculos, dando paso a todo tipo de simulaciones y contrastando con las teorías económicas complejas que de otro modo hubieran sido imposibles. De tal modo, la contribución de la Matemática a la Economía no puede verse de manera aislada sino como una consecuencia de la evolución histórica de ambas y de sus relaciones con otros campos como la Física, Biología, Ecología, Medicina, Astronomía, etc.

Entendemos por modelización un proceso que parte de una situación problemática y permite obtener, a partir de sucesivos pasos -donde las estrategias pueden diferir entre quienes lo están llevando a cabo- a lo que llamamos un modelo que da respuesta al problema inicial. Ayudar a desarrollar capacidades y aptitudes en los alumnos para que éstos puedan resolver con éxito situaciones problemáticas de distinta índole es, quizá, uno de nuestros mayores desafíos y, suponemos que la modelización de problemas es un buen aporte para esto.

La resolución de problemas constituye el eje fundamental de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje en donde se encuentre involucrada la Matemática o, en su defecto, cualquier ciencia que dependa directa o indirectamente de la misma.

Brousseau (1983) en su Teoría de las Situaciones Didácticas, atribuye un lugar preferencial a la resolución de problemas. En relación con el saber, establece que la didáctica plantea que éste surge a partir de preguntas o problemas a los que el alumno se ve necesitado de dar respuesta. Los problemas entonces, se inscriben dentro del proceso del aprendizaje; no al final como una mera aplicación de conocimientos ya adquiridos, ni al principio como motivadores. Además, señala que "la constitución del sentido, tal como la entendemos, implica una interacción constante del alumno con situaciones problemáticas, interacción dialéctica (porque el sujeto anticipa, finaliza sus acciones), donde él compromete conocimientos anteriores, los somete a la revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar concepciones nuevas". Sostiene también que "el interés de un problema va a depender esencialmente de lo que el alumno comprometa ahí, de lo que ahí someterá a prueba, de lo que invertirá, de la importancia para él de los rechazos que será conducido a hacer de las consecuencias previsibles de esos rechazos, de la frecuencia con la cual arriesgaría cometer esos errores rechazados y de su importancia. Así los problemas más interesantes serán aquellos que permitirán franquear un verdadero obstáculo".

Hans Aebli (1988) en "Doce Formas Básicas de Enseñar", dice que resolver problemas es una forma básica de aprendizaje. Parte del hecho de que el alumno ve y comprende ya ante una estructura a aprender, una idea, un concepto, un procedimiento, en sus rasgos generales, a donde desearía llegar, pero sin saber aún en detalle cómo. Resolver problemas significa desarrollar detalladamente la idea, el procedimiento. "Desarrollar" es aquí una excelente expresión; significa que la solución del problema ya está contenida *in nuce* en él, pero que ha de "desarrollarse" a partir de ahí, desarrollándose el pensamiento sobre el problema en pensamiento sobre la solución. Por ello, una clase en la que se resuelven problemas es también una clase que implica un desarrollo. Interroga y desarrolla al mismo tiempo, cuando el propio alumno o bien, en representación de él, el profesor, plantea consecutivas preguntas y al responder a ellas va perfilando, cada vez más claramente, la solución del problema hasta que plenamente desarrollada quede incorporada a su pensamiento y a su actuación.

Por lo tanto, un "problema" es una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos.

La modelización matemática como metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación tiene un doble propósito: hacer que los alumnos asimilen mejor el contenido matemático que se les intenta enseñar y que sea un sujeto activo del proceso de estudio.

3. La propuesta didáctica

El objetivo de la presente propuesta es abordar el tema ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en carreras de Ciencias Económicas a través de un problema propio de la disciplina.

3.1. Problema motivador

Obtenga la función de demanda $p = p(q)$, donde p representa el precio (en pesos) y q el número de unidades sabiendo que la elasticidad de la demanda es

$$\eta = \frac{q-200}{q} \quad \text{con}\, 0 < q < 200 \tag{1}$$

y $p(190) = 5$.

3.2. Conceptos económicos vinculados al problema

La elasticidad de la demanda permite a los economistas medir la forma en que un cambio en el precio de un producto afecta la cantidad que se demanda. Es decir, se refiere a la respuesta de los consumidores a cambios en los precios. Así, podemos dar una aproximación del decaimiento porcentual que sufrirá la demanda de un producto cuando se produzcan incrementos en el precio del mismo.

Los conceptos involucrados en el problema debieron ser aprendidos y utilizados por los alumnos en Matemática I. Hoy se les plantea una nueva situación problemática; el alumno debe obtener la función de demanda $p = p(q)$ a partir del conocimiento de la elasticidad de la demanda η.

Es decir el alumno conoce que si $p = p(q)$ es la función demanda para un producto, el cambio porcentual en la cantidad de demanda es

$$\frac{\Delta q}{q} \times 100 .$$

También sabe que el cambio porcentual correspondiente en el precio por unidad es

$$\frac{\Delta\, p}{p} \times 100 = \frac{p(q+\Delta q) - p(q)}{p(q)} \times 100 ,$$

y que se llama elasticidad media a

$$\eta^* = \frac{cambio\ porcentual\ en\, la\, cantidad\ de\, demanda}{cambio\ porcentual\, en\ precios} .$$

A partir de estos conocimientos el alumno obtuvo que

$$\eta^* = \frac{\Delta q}{q} \frac{p(q)}{p(q+\Delta q) - p(q)} ,$$

o equivalentemente

$$\eta^* = \frac{p(q)}{q} \frac{1}{\dfrac{p(q+\Delta q) - p(q)}{\Delta q}} .$$

En Matemática I se definió que si la función de demanda $p = p(q)$ es derivable, la elasticidad de la demanda está dada por

$$\eta = \lim_{\Delta q \to 0} \eta^* ,$$

es decir:

$$\eta = \frac{p(q)}{q} \frac{1}{p'(q)} . \qquad (2)$$

3.3. Construcción del concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden

Como ya dijimos los anteriores son conceptos que los alumnos han utilizado en la resolución de problemas. Esta nueva situación problemática intenta lograr que el alumno llegue a partir de estos conocimientos previos, de estrategias de trabajo, y del acompañamiento del docente orientando, motivando y guiando en todo el proceso, a formular una ecuación donde aparezca la incógnita buscada. En estas situaciones nada es mejor que el trabajo en grupos que permite la interacción de los alumnos y la mejor discusión del problema.

Si el alumno pudo recurrir a estos conocimientos, es previsible que pueda sustituir (1) en (2) y obtener

$$\frac{q - 200}{q} = \frac{p(q)}{q} \frac{1}{p'(q)} ,$$

o equivalentemente

$$(q - 200)\, p'(q) - p(q) = 0 ,$$

donde $0 < q < 200$ con la condición $p(190) = 5$.

El alumno se encuentra con una ecuación donde aparece la incógnita de su problema pero al intentar resolverla descubre que no puede hacerlo.

Es aquí donde cobra mayor importancia el rol del docente que aprovecha esta dificultad para introducir un nuevo concepto matemático: el de *ecuación diferencial ordinaria de primer orden.* Asimismo enseñará una forma de resolver esta ecuación diferencial que debe satisfacer la condición $p(190) = 5$, en la cual obtendrá por solución general a la función de demanda

$$p(q) = -2q + 400 ,$$

donde $0 < q < 200$.

4. Conclusiones

Estamos convencidos que la tarea de la Universidad no consiste solamente en impartir conocimientos a los estudiantes sino en enseñar al futuro profesional a pensar, a estudiar de modo independiente, creativo, innovador. Para esto, es necesario organizar el proceso de estudio de modo que estimule, que logre el desarrollo de capacidades y que permita que el estudio de la Matemática sea una actividad dinámica donde exista espacio para el desarrollo teórico-práctico de conceptos matemáticos. Nada mejor en este sentido que lasactividades que se desarrollan en la clase incluyan discusiones abiertas entre los estudiantes y el docente.

La propuesta presentada contribuye en este sentido mostrando una forma de incentivar al alumno de la necesidad de recurrir a la Matemática para la solución de algunos problemas específicos de su propia disciplina, así como que valore la importancia de la Matemática como herramienta en la resolución de problemas.

Esta propuesta no puede lograr por sí misma lo antedicho si está presentada de manera aislada es decir, si no es parte de una metodología de trabajo iniciada desde el primer curso de Matemática. Para lograr el propósito antedicho, el docente debe plantearse formas alternativas de desarrollo de sus clases que incluyan actividades que muestren al alumno la necesidad construir nuevos conocimientos o nuevas metodologías de trabajo.

5. Referencias Bibliográficas

Brousseau, G.: Les obstacles épistémologies et les problemes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 4 (1983).

De Guzmán, M.: Sobre la Educación Matemática. *Revista de Occidente*, 1983, pp.37-48.

Edwards, C., Penney D. *Ecuaciones Diferenciales*. Segunda Edición. México: Pearson Educación.

Hans, A. (1988). *Doce Formas Básicas de Enseñar*. Madrid: Marcea.

Lomelí, H., Rumbos, I. (2003). *Métodos Dinámicos en Economía. Otra búsqueda del tiempo perdido*. México: Thomson.