



Santa María de los Buenos Aires

Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas e Ingeniería

TRABAJO FINAL

TEORÍA DE LAS CÁSCARAS CILÍNDRICAS

APLICACIÓN AL PROYECTO DE SILOS DE HORMIGÓN ARMADO

Autor: Joaquín Nicolás Riccitelli
N° de Registro: 02-040085-1
Carrera: Ingeniería Civil

Tutores: Ing. Javier Fazio
Ing. Laura Cacciante

Fecha de presentación: 19 de diciembre de 2016

Contenido

1 RESUMEN.....	3
2.1 CÁSCARAS	4
2.2 SILOS	6
3 DESARROLLO	10
3.1 TIPOS DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE SUPERFICIE	10
3.1.1 Placas.....	10
3.1.1.1 Membranas.....	13
3.1.1.2 Teorías para el estudio de las Placas Planas.....	15
3.1.2 Cáscaras	20
3.1.2.1 Bóvedas.....	21
3.1.2.2 Cúpulas.....	24
3.2 CÁSCARAS CILÍNDRICAS	28
3.2.1 Comportamiento estructural de las cáscaras en general.....	28
3.2.2 Teoría Membranal.....	29
3.2.3 Cáscaras con simetría de revolución (de geometría y de cargas) en régimen Membranal.....	30
3.2.4 Esfuerzos internos en las membranas de revolución	32
3.2.5 Solución Membranal	35
3.2.6 Solución incluyendo los esfuerzos de flexión	41
3.2.7 Ecuación diferencial del problema	47
3.2.8 Obtención de las incógnitas Q_0 y M_0	53
3.2.9 Resumen de pasos	56
3 PROYECTO DE SILOS DE HORMIGÓN ARMADO.....	58
3.3.1 Clasificación de los silos	58
3.3.2 Composición y comportamiento estructural de un silo y sus componentes ..	59
3.3.3 Características del material ensilado.....	62
3.3.4 Cargas en silos	65
3.3.5 Normativa para el cálculo de silos.....	80
3.3.6 Situación reglamentaria actual en la Argentina	91
3.3.7 Normativa para el cálculo de silos en el ámbito nacional	99
3.3.8 Análisis de cargas según CIRSOC 201-05 y ACI 313-97.....	125
3.3.9 Predimensionado del espesor de la pared de un silo.....	129
3.3.10 Dimensionamiento estructural.....	133

4 CONCLUSIONES Y APORTES.....	136
5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	137

1 RESUMEN

El estudiante de Ingeniería, en su proceso de formación universitaria, debe cursar una gran cantidad de materias muy diversas, que necesita conocer. En ellas, la cantidad y detalle de los contenidos que se dictan está condicionada por el tiempo disponible. Este factor también es un limitante para el dictado de algunas aplicaciones prácticas que el Ingeniero puede necesitar conocer para su vida profesional.

El presente Trabajo, pretende humildemente servir de aporte teórico-práctico con respecto a uno de tales contenidos que no llegan a ser estudiados en los cursos de grado: la Teoría de las Cáscaras Cilíndricas.

Se inicia el estudio a través de un desarrollo teórico del tema partiendo desde lo general, con los diferentes tipos estructurales superficiales, describiendo en forma sintética sus características y funcionamiento estructural, para luego continuar con el estudio particular de uno de aquellos tipos, las Cáscaras Cilíndricas.

El desarrollo continúa con una aplicación práctica de este último tema, el proyecto y cálculo de silos de hormigón armado. Esta aplicación fue seleccionada teniendo en cuenta que la agricultura es uno de los pilares fundamentales de la economía argentina, dado que su extenso territorio y variedad climática, permiten una gran distribución y producción de los cultivos, haciendo de esta actividad unas de las principales del país, tanto para el mercado interno como para la exportación.

2 INTRODUCCIÓN

2.1 CÁSCARAS

Las cáscaras son estructuras laminares portantes muy delgadas, considerándose por ello *desprovistas* de rigidez a flexión y torsión. Están sometidas en cada punto sólo a esfuerzos que actúan aproximadamente en el plano tangente; o sea, están desprovistas de momentos flectores, momentos torsores y esfuerzos de corte. En otros términos, las tensiones están repartidas uniformemente en el espesor del elemento.

El desarrollo de las superficies cilíndricas comienza con las bóvedas romanas de medio cañón de ladrillo, que fueron perfeccionadas por los romanos. El arte de las bóvedas se destacó también en el estilo Gótico, evolucionando desde las pesadas bóvedas de ladrillo a las esbeltas bóvedas nervadas de sus catedrales.

Por otra parte, las cúpulas, elementos estructurales utilizados para cubrir un espacio de planta circular, cuadrada o elíptica, se han utilizado en arquitectura desde los primeros tiempos. Una de las primeras apariciones fue en un bajo-relieve asirio (705-681 A.C.) que mostraba un grupo de edificios cubiertos con cúpulas hemisféricas y puntiagudas. El desarrollo de las cúpulas va de la mano con el desarrollo de los materiales. En la antigüedad, estos elementos se construían de piedra o mampostería, pasando luego al ladrillo y la madera. Los romanos utilizaron frecuentemente las cúpulas para cubrir basílicas, mausoleos, etc. La más emblemática construcción antigua bajo esta tipología es el Panteón de Roma, años 120-124 D.C (Figura 2.1), con 44 m de diámetro. En la época se utilizaba un material similar al hormigón que contenía cal y puzolanas como aglomerantes, denominado *cemento romano*.

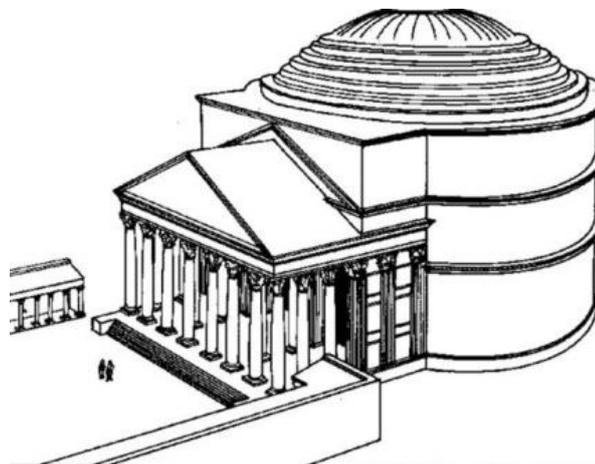


Figura 2.1 – Panteón de Roma¹

La aparición del acero en el ámbito de las construcciones, provocó la evolución tanto de bóvedas como cúpulas debido a la rapidez de puesta en obra y a su alta resistencia en comparación con su peso, pasándose posteriormente a la utilización del hormigón armado.

¹ Panteón de Roma: Templo romano de planta circular construido en Roma dedicado a los Dioses.

Fuente: http://images.slideplayer.es/2/132327/slides/slide_13.jpg

La transformación de las bóvedas y cúpulas tradicionales en estructuras laminares de hormigón armado cubriendo espacios de grandes luces (superficies delgadas de pequeño espesor) es un logro del siglo XX. Se cree que la primera cáscara delgada de hormigón armado en forma de cúpula es la del Zeiss Planetarium (Jena, Alemania, 1925 – Figura 2.2), de 6 cm de espesor, 25 m de diámetro y 12,5 m de altura, obra de Walter Bauersfeld y de los Ingenieros Franz Dischinger y Ulrich Finsterwalder. La armadura está formada por una malla triangulada de acero que va inmersa en el hormigón. Este sistema, desarrollado por Bauersfeld fue patentado como sistema Zeiss-Dywidag.



Figura 2.2 – Zeiss Planetarium Jena

Este tipo de estructuras tuvieron un gran auge al finalizar la Segunda Guerra Mundial (1945), por la escasez de materiales y el bajo costo de la mano de obra.

En la actualidad las cáscaras de diferentes materiales poseen un gran ámbito de aplicación: distintos tipos de depósitos, tuberías, recipientes de presión, el fuselaje de los cohetes, las alas de un aeroplano, las cúpulas y naves industriales.

El Análisis Estructural de cáscaras abarca dos distintas teorías aplicadas comúnmente, la primera de éstas es la Teoría Membranal. Esta supone que una cáscara tiene a lo largo de su volumen, un comportamiento en el que solo aparecen esfuerzos normales a su espesor, no así momentos flectores ni esfuerzos de corte.

Un ejemplo del funcionamiento de este tipo de elementos lo constituye el siguiente: si se toma una hoja de papel y se la quiere sostener apoyada horizontalmente sobre dos de sus bordes paralelos, se observa que la hoja se dobla y se cae por falta de resistencia a flexión. Pero, si se la sostiene apoyada desde los centros de esos lados, dejándola que se curve hacia arriba, la acción de su peso más la forma curvada que ha tomado hace que la hoja se sostenga. La superficie cilíndrica, así formada, trabaja como una viga cuya sección transversal viene determinada por la curva directriz² del cilindro.

La segunda teoría, es la de Flexión o Teoría General, esta incluye los efectos de flexión, lo que permite efectuar el tratamiento en zonas de discontinuidad en la distribución de tensiones, como ser la región vecina al punto de aplicación de una

² En geometría, un cilindro es una superficie de las denominadas cuádricas, formada por el desplazamiento paralelo de una recta llamada generatriz, a lo largo de una curva plana denominada **directriz** del cilindro.

carga, o una discontinuidad estructural propiamente dicha como lo es la zona de vinculación de la estructura.

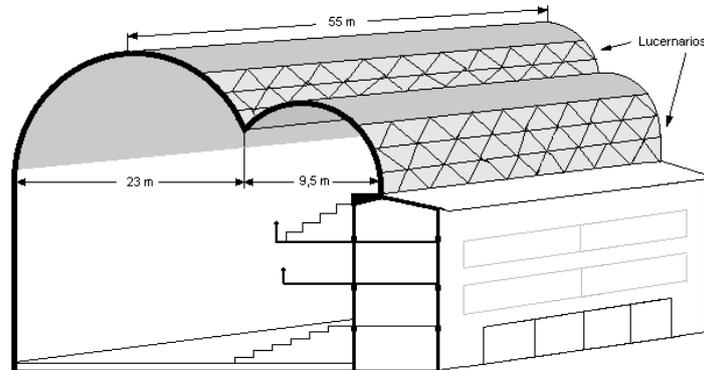


Figura 2.3 – Cáscaras Cilíndricas – El Frontón de los Recoletos.³

2.2 SILOS

Aspectos Históricos

De la palabra latina *sirus*, que significó originariamente un lugar subterráneo y seco donde se guardaban semillas o forraje, deriva la palabra española *silo*, que hace referencia a los depósitos de planta regular utilizados en el almacenamiento de materiales a granel en estado seco.

Los silos se vienen utilizando en civilizaciones desde los tiempos más antiguos, con formas muy variadas, bien enterrados bajo el suelo, o bien como grandes edificaciones con carga por la parte superior y descarga por troneras en la zona inferior de sus paredes. Durante milenios su finalidad fue la de almacenar las cosechas para cuidar la supervivencia de los pueblos ante los malos ciclos agrícolas, garantizando la conservación del material almacenado frente a la humedad, las condiciones climatológicas, los ataques de roedores y las plagas del grano.

Los antiguos grandes silos de planta regular tuvieron que construirse con paredes de *gran espesor* para soportar los empujes del material, dado que lo resistían por gravedad, como los muros.

Hoy en día, los silos se siguen utilizando para el almacenamiento agrícola, pero también se utilizan para almacenar toda clase de productos a granel, tanto en la agricultura como en procesos mineros, industriales y de construcción (Figura 2.4).

La irregularidad del rendimiento de las cosechas y de su distribución en el mundo ha provocado siempre un consumo desigual de cereales y, como consecuencia, ciertas alteraciones en su precio. Este tipo de construcciones permite un consumo más uniforme.

³ El **Frontón Recoletos** fue un frontón (cancha para juegos de pelota) construido en 1935 en la calle Villanueva de la ciudad de Madrid. Constituyó en sus días uno de los diseños más destacados del ingeniero Eduardo Torroja.

En la actualidad, tiende a generalizarse este tipo de almacenaje, suprimiendo el costoso empleo de bolsas y reduciendo el costo de la mano de obra.

Materiales Almacenados

Se almacenan materiales tan diversos como: carbón, minerales, piedra, cal viva, cemento, yeso, cereales, semillas oleaginosas, azúcar, harina, etc. La diversidad de densidades, capacidad de abrasión, posibilidad de ataque químico, contenido de humedad y finura de grano de esta gama tan amplia de materiales hace que las características de cada silo específico y los acabados internos de los mismos sean diferentes.



Figura 2.4- Silos de Hormigón Armado (Cervecería y Maltería Quilmes S.A.)⁴

Tipos De Silos

El peso del material ensilado se transmite en parte por rozamiento a las paredes, y el resto a la base del mismo. El empuje en las paredes y la componente vertical del mismo que constituye la parte del peso que descarga sobre dichas paredes, es función de la densidad del granel, del ángulo de rozamiento interno de dicho material y del ángulo de rozamiento existente entre el material ensilado y la pared.

Cuando la cuña de empuje correspondiente al punto más bajo de la pared aflora en la superficie del material ensilado sin alcanzar otra pared del silo (caso general de las naves granero y naves almacén), estos se denominan silos de gran superficie o de celda baja. En ellos, los empujes unitarios crecen linealmente con la profundidad (como en los muros de contención).

Cuando, por el contrario, la altura del silo respecto a su dimensión en planta es grande, se produce un alivio de los empujes unitarios respecto a la distribución lineal, de tal forma que, a partir de cierta profundidad, los empujes unitarios y las presiones verticales se mantienen constantes. Estos se denominan *silos de celda alta*.

En general los silos de celda alta tienen una boca de carga superior centrada con su eje, un cuerpo de celda de sección regular (circular o poligonal) y una zona inferior o de tolvas en forma de tronco de cono o tronco de pirámide invertido, que termina en uno o varios orificios de descarga. La carga y descarga se realiza por

⁴ Fuente: <http://www.inteco.com.ar/obras-civiles.html>

medio de instalaciones mecánicas de cintas, sinfines o tuberías neumáticas. Es corriente que los silos de celda alta se adosen agrupados, constituyendo los llamados *silos multicelulares*, que permiten una mejor utilización funcional de diferentes clases, calidades o etapas de producción, pero que pueden crear problemas en las cimentaciones por excentricidad de las cargas (al tener celdas vacías y celdas cargadas) en un mismo grupo celular, dado que el peso del material ensilado suele ser mayor que el de la propia estructura del silo.

Teoría y Práctica

En cuanto se refiere a los esfuerzos relativamente elevados que solicitan a las paredes bajo el efecto del empuje y del rozamiento ejercido por los materiales ensilados, su determinación ha sido objeto de muchas hipótesis, a partir del estudio del comportamiento de los primeros silos calculados empíricamente, y teniendo en cuenta también los sucesivos ensayos efectuados con medios perfeccionados sin cesar.

De esta forma, los primeros constructores de silos calcularon las paredes de las celdas como si fueran solicitadas por la acción de un líquido de la misma manera que la materia ensilada.

Después, otros constructores intentaron extender a los silos la teoría y el cálculo del empuje de tierras sobre muros de contención.

Más tarde, experimentadores como Prante, ingeniero de Hamburgo, y Airy, en Francia, demostraron, por una parte, que estos métodos de cálculo eran erróneos, y por otra, que el empuje del grano y la presión sobre el fondo de un silo no aumentan indefinidamente, sino que tienden hacia límites determinados.

Finalmente, autores como Janssen, Könen y Mörsch propusieron teorías basadas en la hipótesis de la constancia de la relación p/q entre el empuje horizontal debido al grano y la presión vertical ejercida por éste.

Estas teorías veían facilitada su interpretación matemática por el hecho de que esta hipótesis permitía sacar la relación constante p/q fuera del signo de integración de la función de equilibrio de la materia ensilada sobre un elemento infinitamente pequeño de la pared de los silos, y obtener así una expresión exponencial relativamente sencilla para el cálculo de los empujes de una masa pulverulenta sobre las paredes de un silo.

Después, gracias a los nuevos métodos de medidas y de presiones proporcionadas por la piezoelectricidad y la extensometría, se han podido realizar ensayos muy precisos sobre modelos reducidos de silos en maquetas de formas diversas y sobre silos reales.

Por otra parte, es conveniente señalar que estos ensayos han confirmado fehacientemente el presente método de cálculo. Pero dicho método se limita al estudio de las presiones sobre las paredes para el caso de materiales pulverulentos de características mecánicas conocidas, esencialmente: densidad y ángulo de rozamiento interno.

Esto ha constituido un progreso cierto, pero a pesar de la precisión de los cálculos establecidos según las fórmulas de los autores precitados, se produjeron numerosos siniestros que, no obstante, parecían satisfactorios en el momento de su llenado.

Se necesitaron nuevas investigaciones que luego confirmaron por medio de fenómenos reales, los valores de los empujes sobre las paredes comparables a aquellos de los resultados de la teoría de Janssen-Könen para el equilibrio llamado *estático* de la masa pulverulenta, en *reposo*, en el interior del silo.

Como contrapartida, se ponían en evidencia los efectos peligrosos de la ruptura de ese equilibrio que acarrearía un aumento importante de los empujes sobre las paredes desde el instante en que comienza el vaciado de los silos (aún mediante una salida insignificante de granos).

Esta brusca ruptura del estado de equilibrio de la masa ensilada es tan rápida que se percibe al oído (sobre todo en silos metálicos) como un efecto de soplido. Se trata pues de un verdadero *efecto dinámico* provocado por el paso instantáneo de un estado de equilibrio en reposo a un estado de equilibrio en movimiento de la masa ensilada.

Los esfuerzos se dirigieron entonces a la búsqueda de los medios susceptibles de evitar esas sobrepresiones debidas al vaciado. Una solución consistió en el uso de los llamados “tubos antidinámicos” o “tubos de depresión” que permite disciplinar el escurrimiento de los granos durante toda la duración del vaciado, manteniendo los granos en su estado de equilibrio estático de llenado. De esta manera, se protegía a los silos de los efectos perniciosos del vaciado, debido a la brusca ruptura del equilibrio estático de la masa ensilada.

Materiales de Construcción

En silos de pequeñas dimensiones se ha utilizado la madera. Actualmente también se realizan en estructuras metálicas con paredes de chapa delgada, ondulada e incluso lisa, tanto para pequeña y mediana dimensión. Los silos importantes se construyen de hormigón armado.

Las paredes interiores del silo pueden exigir revestimientos de resistencia adecuada a la abrasión o al ataque químico, según la naturaleza del material ensilado. Este revestimiento suele ser especialmente importante en las paredes interiores de las tolvas y junto a las bocas de salida donde el flujo del material es más rápido en la descarga y donde el desgaste es importante.

El paramento exterior de los silos lleva a veces tratamientos de impermeabilización o revestimientos como protección contra la lluvia y el calor.

Los aparatos de transporte del material que se desea almacenar son diseñados generalmente por profesionales y empresas especializadas en mecánica, mientras que el estudio de la construcción de silos y de los esfuerzos provocados por los materiales ensilados corresponde al ingeniero civil.

3 DESARROLLO

3.1 TIPOS DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE SUPERFICIE

A continuación, se realizará una clasificación de elementos estructurales de superficie según dos grupos principales, uno correspondiente a las *placas*, y otro, a las *cáscaras*.

3.1.1 Placas

Son elementos estructurales planos con una dimensión pequeña respecto de las restantes. Reciben fundamentalmente cargas en dirección normal a su plano medio. Constituyen la forma más simple para cubrir una determinada superficie entre vigas o muros. Su auge radica en la época en que los avances del hormigón armado permitieron dar una construcción monolítica.

Si se considera a este elemento, compuesto por una serie de bandas en cada una de sus dos direcciones geométricas mayores, quedará formada en la superficie del mismo una especie de red cuadrículada dada por la intersección de dichas bandas. Si actúa sobre aquél, una carga concentrada o simplemente una carga desigualmente repartida de una banda a otra (Figura 3.1), la deformación longitudinal de la banda más cargada tiene que ir acompañada, no sólo de flexiones longitudinales decrecientes en las bandas contiguas, sino que, simultáneamente y por exigencias de la continuidad geométrica, ha de producirse una flexión transversal.

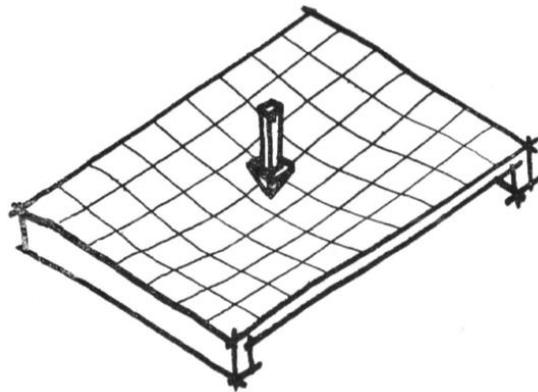


Figura 3.1 – Carga puntal

Siendo este elemento de hormigón armado, se requiere (Figura 3.2), además de la armadura longitudinal o principal, otra transversal de magnitud inferior o de repartición e, inclusive, se requeriría completar éstas con otra superior para los momentos negativos en la zona de apoyos.

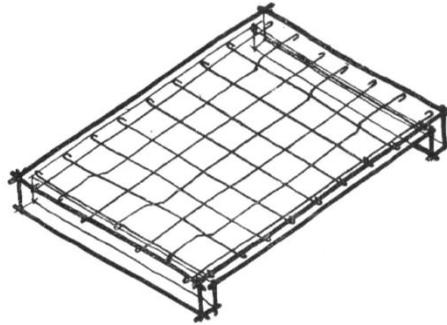


Figura 3.2 – Armadura en dos direcciones

El elemento puede apoyarse sobre dos lados opuestos solamente (Figuras 3.1 y 3.2), o bien, sobre sus cuatro lados (como en el caso de cubrir un recinto cuadrado rodeado por cuatro muros, Figura 3.3). Este último caso se caracteriza por trabajar a flexión, necesaria y fundamentalmente, en dos direcciones ortogonales. No es posible el trabajo de flexión en una dirección sin que se produzca también en la ortogonal, cualquiera que sea el tipo o reparto de cargas que actúen.

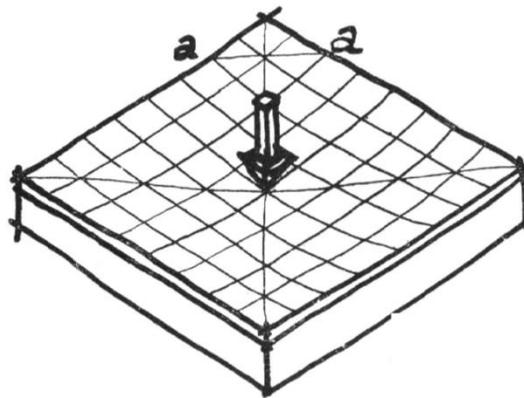


Figura 3.3 – Elemento bidireccional

El contorno de la placa puede ser rectangular, poligonal, circular, elíptico, etc. De su forma, proporciones y del tipo de carga dependerá el que las flexiones, sean mayores o menores en una u otra dirección. En cada punto aparecerán dos direcciones principales de flexión y dos magnitudes de estos momentos flectores que determinan, en unión con los esfuerzos cortantes, el estado tensional fundamental.

En hormigón armado, cada flexión principal requiere su armadura propia; en cambio, el mismo hormigón es capaz de resistir las dos compresiones a la vez, sin merma de su capacidad resistente para cualquiera de ellas independientemente. Es decir que, en la fijación del espesor del elemento necesario para resistir los efectos de estas compresiones, es solamente la mayor de ellas la que influye. Si ambas son iguales (como en la placa cuadrada o circular), el hormigón se aprovecha dos veces y esta es, desde el punto de vista mecánico, la principal ventaja de este elemento estructural.

En el trabajo de una placa rectangular, se producen necesariamente torsiones. Basta observar el tipo de deformación que a una banda contigua al apoyo le imponen las deformaciones de las bandas que cruza (Figura 3.3).

Este fenómeno de torsión favorece el trabajo tensional y alivia en buena parte los esfuerzos de flexión, pero aun independientemente de ellos, hay que tenerlo en cuenta por que representa un nuevo peligro de fisuración, especialmente en las proximidades de las esquinas de la placa, donde las torsiones son mayores. El fenómeno se aclara quizá mejor observando que, en la proximidad de las esquinas, la luz, según la diagonal a-a (Figura 3.3), es muy corta, y por tanto las flechas, que toma la placa, han de producir, en esa dirección, una fuerte concavidad hacia arriba con la correspondiente flexión, que pide una armadura según la diagonal a-a por la cara inferior de la placa. Del mismo modo, pide otra armadura perpendicular a ésta, por la cara superior, porque la placa, por el mismo fenómeno, tiende a levantar las puntas, despegándolas de los apoyos y dejándolas en voladizo. Estas armaduras, son las denominadas “armadura de esquina”.

En cuanto la relación entre las luces de una y otra dirección se aproxima a dos, toda la flexión carga prácticamente en una dirección; y se pasa a un comportamiento predominantemente unidireccional.

Los elementos en cuestión no siempre están apoyados en todo el contorno, ni sobre dos lados paralelos y opuestos, pueden tener algún trozo del contorno sin apoyo, lo que da lugar a estados tensionales y cálculos más complicados. E incluso puede ir apoyada directamente sobre soportes exentos (Figura 3.4), dando lugar a un tipo especial de placa, llamada fungiforme, también típico del hormigón armado, y con interesantes ventajas para establecer pisos continuos sobre filas cruzadas de soportes. Esta tipología es también conocida bajo el nombre de *entrepisos sin vigas*.

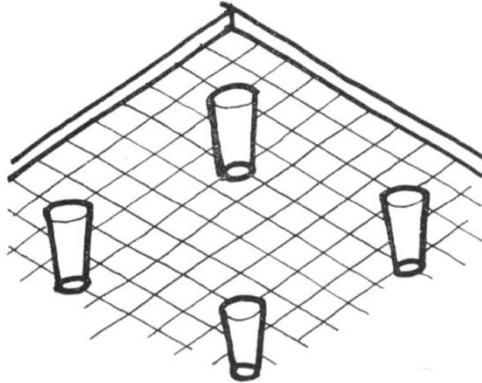


Figura 3.4 – Placa sobre soportes

Este nuevo tipo tiene dos diferencias esenciales respecto al de la placa apoyada en el contorno. Una de ellas es que, ahora, la rotura y la deformación pueden producirse sin necesidad geométrica de provocar flexiones en dos direcciones. En la Figura 3.5 se ve claramente cómo se produce la deformación en forma de superficie cilíndrica con flexión en una sola dirección.

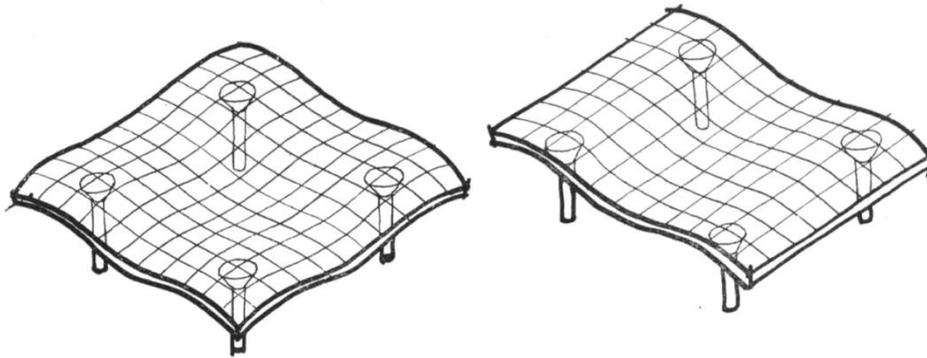


Figura 3.5 – Placa sobre soportes

Otro punto, en que esta placa se separa de la apoyada en el contorno, es en la importancia relativa del esfuerzo cortante. Ahora, la carga de cada recuadro se concentra en el perímetro, relativamente pequeño, del soporte; y éste podría taladrar (fenómeno de punzonado) con facilidad la placa si no fuese porque, para evitar ese peligro, se lo provee de un fuerte capitel encargado de aumentar el perímetro, no sólo resistente a estos esfuerzos cortantes, sino también a la flexión que se concentra, en gran parte, junto al soporte; o mejor dicho que ha de representar sus valores máximos a lo largo de éste perímetro.

Las placas fungiformes, mientras sus vanos están equilibrados, no dan flexión sobre el soporte; pero, en caso contrario, el pórtico que forman la placa y soporte, perjudica en cuanto a la debilidad por flexión sobre el soporte y la compleja concentración de esfuerzos que se producen en el empotramiento de éste sobre la placa. Por eso, su aplicación ventajosa se reduce a los casos en que las distancias de soportes son parecidas en una y otra dirección; y mejora, aún más, si las luces extremas son menores que las centrales, o si hay bien proporcionados voladizos por fuera de ellas, y si las sobrecargas no son demasiado diferentes de un vano a otro.

Por lo demás, la ordenación de soportes no necesita ser rectangular, sino que puede ser trapezoidal, a tresbolillo o en triángulos equiláteros, lo que proporciona en muchos casos ventajas apreciables de utilización. Su enconfrado es muy sencillo y económico, y la altura total que ocupa la placa es menor que la necesaria con sistema sobre vigas, pero, el volumen de hormigón y el peso de la armadura que requiere son, en general, mayores que el de este otro sistema de piso. Este ahorro de altura por no tener vigas, en un edificio de una cierta cantidad de pisos, podría permitir la construcción de un piso extra.

3.1.1.1 Membranas

Una membrana es una placa muy delgada que por su gran deformabilidad termina trabajando por acomodamiento de forma como una cáscara (definida en el siguiente punto), de gran delgadez en comparación con sus dimensiones laterales. Su forma inicial es la de una placa, se justifica distinguirla solamente porque si se considera la posición deformada en una teoría de segundo orden, termina funcionando como cáscara en régimen membranar. *Es una placa que muta en cáscara.* Por tales características, sólo puede desarrollar tracciones a lo largo de su superficie. Al ser su espesor muy reducido, las resistencias a flexión y corte resultan despreciables, como así la resistencia a la compresión, que se ve limitada dado que para un valor relativamente bajo de la misma la membrana pandearía.

La estabilidad de estos elementos, se debe a su geometría y a las tensiones que las mismas desarrollan en presencia de las cargas.

La *Teoría Membranal* (tratada más adelante), constituye una simplificación que se toma como base para el diseño de superficies curvas, aunque no refleja necesariamente la verdadera distribución de tensiones, dado que se asumen condiciones estáticamente determinadas. A pesar de esto, tal aproximación resulta válida para representar de manera aceptable el comportamiento de tipos estructurales acorde a estos elementos idealizados.

En las *superficies reales* las cargas son resistidas mediante tracciones y compresiones superficiales, gracias a que dichas superficies son suficientemente delgadas para poder despreciar las tensiones de flexión y lo suficientemente gruesas como para no pandear por bajas tensiones de compresión.

Los materiales utilizados en las membranas son las maderas, los metales, los plásticos, y el hormigón armado o pretensado.

En general, las tensiones en la membrana suelen ser reducidas, por lo que en muchas ocasiones el espesor queda determinado por los momentos inducidos en los apoyos. A pesar de esto, existen razones para evaluar las fuerzas en la membrana, las cuales son:

- Localizar tensiones de tracción para adicionar la armadura o refuerzo necesario en esta zona, si el material trabaja fundamentalmente a compresión.
- Verificar el fenómeno de pandeo a través de las máximas tensiones de compresión.
- Verificar las deformaciones en los bordes y las tensiones por flexión producidas como consecuencia de limitar dichas deformaciones.

Las membranas, no son consideradas aptas para resistir cargas puntuales, por lo que debe evitarse la presencia de las mismas, dado que podrían generar un colapso local.

En cuanto a deformaciones, en las membranas planas la deformación elástica tiene influencia importante sobre los valores de los esfuerzos, y por lo tanto es necesario tenerla en cuenta.

En las membranas curvas, en cambio, las deformaciones elásticas no tienen influencia sensible sobre los esfuerzos (salvo que sean tan grandes que alteren notablemente la forma de la membrana). Por consiguiente, estas membranas se consideran inextensibles, aunque se tienen en cuenta los alargamientos cuando interesa el cálculo de las deformaciones.

Para calcular los esfuerzos en las membranas bastan condiciones de equilibrio, por lo que el problema es estáticamente determinado (internamente) y es *particularmente sencillo en el caso, muy frecuente, de membranas con forma de superficie de revolución cargadas con simetría radial.*

En los casos generales de fuerzas no simétricas o de membranas con forma cualquiera, el problema (aunque continúa siendo estáticamente determinado) requiere la resolución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

En el caso de losas curvas, que difieren de las membranas porque no son muy delgadas, y que, por consiguiente, resisten asimismo a flexión, el problema, estáticamente indeterminado (internamente), es mucho más complicado, tanto desde

el punto de vista conceptual como desde el matemático. Sin embargo, también en el estudio de las losas curvas pueden utilizarse con buena aproximación los resultados válidos para las membranas, teniendo en cuenta por separado las acciones en el contorno, lo que permite sustituir cálculos muy largos y laboriosos en pocas operaciones simples.

3.1.1.2 Teorías para el estudio de las Placas Planas

Con el objeto de estudiar con cierta profundidad estos elementos, es conveniente definir como placa plana al lugar geométrico de los puntos comprendidos entre dos superficies que equidistan de un plano. A este plano se lo denomina plano medio, y ambas superficies se encuentran próximas entre sí, a una distancia que se denomina espesor y que es mucho menor que las dimensiones que se pueden medir sobre el plano medio.

Las superficies generalmente son planos paralelos por lo que el espesor resulta constante, salvo que se explicite lo contrario.

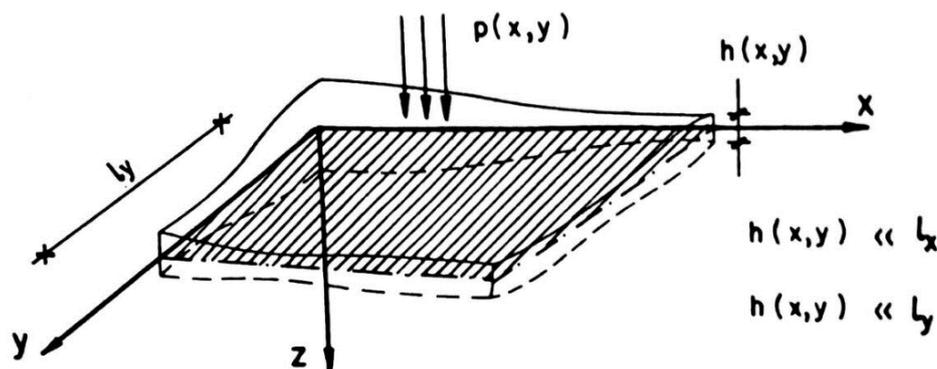


Figura 3.6 – Elemento Placa

Existen diversas teorías para analizar las placas planas, y es necesario hacer previamente una clasificación de las mismas.

El límite de la placa lo constituye una superficie cilíndrica perpendicular al plano medio que tiene una directriz cualquiera, y cuya forma le da el nombre a la placa. Por ejemplo, si se tiene una circunferencia o un rectángulo como directriz, resultarán placas planas circulares o rectangulares, respectivamente.

Se denomina *borde* o *contorno* de la placa a la intersección del plano medio con la superficie cilíndrica que la limita.

Generalmente sobre los bordes se presentan restricciones a los desplazamientos, o se aplican cargas como resultado de la acción que ejercen otros elementos estructurales. A todas ellas se las suele denominar: *condiciones de borde* o *condiciones de vínculo*.

Cuando en un borde no hay condiciones de vínculo se lo denomina *borde libre*. Las condiciones de vínculo pueden ser continuas, a intervalos discretos o estar aplicadas en determinados puntos, inclusive en el interior de la placa.

Como se indicó anteriormente, las cargas son básicamente perpendiculares al plano medio, y pueden ser concentradas o estar definidas como una función $p(x,y)$ de las coordenadas x e y del punto sobre dicho plano. En $p(x,y)$ se suponen incluidas todas las fuerzas másicas y de superficie.

Para el análisis se partirá de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales que permitirá estudiar cómodamente las placas rectangulares, luego, el problema se reformulará en coordenadas, que se adaptan mejor al estudio de placas circulares o anulares. De cualquier manera, es importante tener siempre presente que las conclusiones y conceptos generales a los que se arribe, así como el esquema estructural de funcionamiento, *son independientes del sistema de coordenadas que se utilice para el planteo.*

Para simplificar el análisis se describirá el comportamiento de la placa a través de lo que ocurre en el plano medio, mediante una reducción al mismo de las magnitudes intervinientes. *Esto es análogo a lo que se hace en la teoría de barras, donde todas las magnitudes se reducen al eje baricéntrico.*

Clasificación

Una primera forma de clasificarlas es según la *ley de comportamiento del material* que las compone, y así resultan *teorías elásticas* (lineales o no lineales), *plásticas*, *viscoelásticas*, etc.

Naturalmente, cada una de estas teorías se apoya en determinadas hipótesis, y como resultado de ellas, aparecen límites para sus aplicaciones. A continuación, se expondrán, las hipótesis de partida y las limitaciones a considerar en cada caso.

La clasificación más interesante es la que está relacionada con el régimen estructural de trabajo de la placa. De acuerdo con él, se pueden definir los siguientes tipos:

- *Placas planas delgadas*

Una placa se considera *delgada* cuando su espesor es menor que un décimo de la mínima dimensión en su plano. Ellas son las de aplicación más común en la ingeniería civil, debido a su favorable relación entre la capacidad portante y peso.

Para su estudio se hacen las siguientes *hipótesis*:

Hipótesis 1: La teoría es lineal en cuanto a las deformaciones. Es decir que se consideran pequeñas las derivadas de los desplazamientos frente a la unidad. En el caso de coordenadas cartesianas, esto se expresa:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \ll 1 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} \ll 1$$

Siendo w , la componente del desplazamiento en la dirección del eje z , ya que son estas las derivadas de los desplazamientos más grandes que se pueden encontrar.

Esta hipótesis se traduce en una limitación de los desplazamientos en relación con las dimensiones de la placa en su plano (a) ⁽⁵⁾:

⁵ Consultar justificación en referencia bibliográfica N° 3 (Curso de Placas Planas) - Anexo I

$$w < 0.05a$$

Hipótesis 2: Un segmento de recta normal al plano medio de la placa en la posición inicial, continúa siendo recto y normal a la superficie media de la placa en la posición deformada.

Esta hipótesis, introducida por *Kirchhoff* (1850), permite expresar todos los desplazamientos en función de los del plano medio y es rigurosamente cierta *únicamente en el caso de flexión pura*.

Esta suposición implica considerar despreciables a las distorsiones entre las direcciones perpendiculares al plano medio y las paralelas al mismo (por ejemplo, en coordenadas cartesianas, γ_{xy} y γ_{xz}), por lo que no se tiene en cuenta el efecto de los esfuerzos de corte en las deformaciones, aun cuando este esfuerzo no sea nulo. No es válida en el caso de placas gruesas, o con agujeros, o con cargas concentradas en un área pequeña. La aplicación de la misma hace necesario limitar el espesor de la placa en relación con las dimensiones en el plano medio a , aproximadamente:

$$\frac{h}{a} < \frac{1}{10}$$

Hipótesis 3: Las deformaciones específicas en la dirección perpendicular al plano medio (eje z) son despreciables y las correspondientes tensiones también:

$$\varepsilon_z \cong 0 \quad \text{y} \quad \sigma_z \cong 0$$

Es importante aclarar que esta suposición excluye el análisis de placas bajo la acción de cargas concentradas, ya que, en estas condiciones, las tensiones σ_z son elevadas en el punto de aplicación de la carga. En efecto, puede considerarse que una carga concentrada de intensidad P está aplicada en el centro de un círculo de radio infinitesimal dr , con lo que la tensión resulta infinitamente grande. Esta es una idealización que de hecho no se presenta en las aplicaciones prácticas, porque el área sobre la que actúa la carga es finita. Aun así, como la tensión σ_z adopta valores grandes, es necesario realizar un análisis particular que incluya la deformación por corte.

Placas planas delgadas sin esfuerzos membranales. Teoría de Lagrange.

En este caso, se consideran solamente cinco esfuerzos característicos (M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y). Mantienen su validez las hipótesis 1, 2, 3; y además es necesario plantear la siguiente:

Hipótesis 4: El plano medio es indeformable, o sea:

$$\varepsilon_{x0} = \varepsilon_{x_{z=0}} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{y0} = \varepsilon_{y_{z=0}} = 0$$

Esta hipótesis sólo se cumple estrictamente si la superficie deformada es desarrollable (por ejemplo: cilíndrica) y los apoyos son desplazables, pero puede considerarse suficientemente aproximada, si se limitan los desplazamientos w a:

$$w < 0.2 h$$

Aun cuando en muchos casos se acepta $w < 0.5$. En tal caso, la placa resiste las cargas desarrollando esfuerzos de flexión, y los esfuerzos membranales se pueden despreciar.

Placas planas delgadas con esfuerzos membranales.

Puede ocurrir que, además de los esfuerzos característicos correspondientes al caso anterior, aparezcan esfuerzos membranales derivados de la aplicación de cargas contenidas en el plano medio de la placa, o de la presencia de deflexiones que están entre $0.2h$ y $0.5h$ cuando los apoyos son indesplazables, es decir que las placas también trabajen como chapas.

En este caso ya no será válida la hipótesis 4, y para el estudio se distinguirán dos situaciones distintas:

a) Las tensiones que aparecen, por la acción de cargas contenidas en el plano medio, son bastante menores que las que producirían inestabilidad al equilibrio.

En este caso es posible aceptar la teoría lineal de la elasticidad como una descripción suficientemente aproximada del fenómeno, y entonces el problema podrá resolverse aplicando el principio de superposición estudiando dos casos por separado: *Placas planas sin esfuerzos membranales + Estado plano de tensión.*

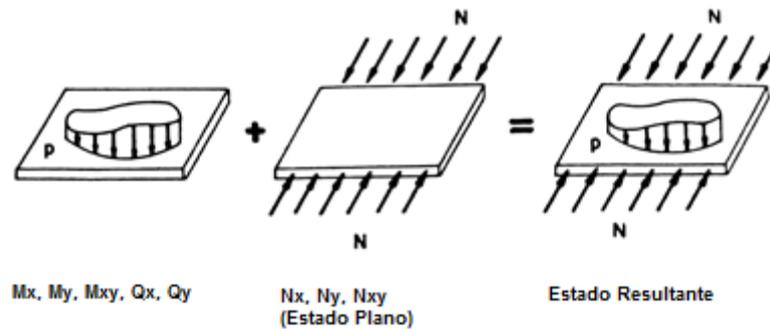


Figura 3.7 – Superposición de estados tensionales

Se ve que los esfuerzos característicos que aparecen en una parte del problema son nulos en la otra. Es claro entonces que, desde el punto de vista del equilibrio, los dos casos son totalmente independientes entre sí, siempre que se acepte la teoría de la elasticidad lineal para describir el comportamiento.

b) Las tensiones en el plano medio son grandes, de manera tal que deben considerarse sus efectos en la flexión de la placa (efectos de segundo orden).

Para estudiar este caso será necesario plantear las ecuaciones de equilibrio considerando la acción de los esfuerzos en la posición deformada, es decir aplicar una teoría no lineal. Aun cuando se considere un material constitutivo de la placa que cumpla con la ley de Hooke en todo el rango posible de tensiones y un planteo cinemático lineal (Hipótesis 1).

Esta teoría, que se atribuye a Saint Venant, considera que, en una primera instancia, se aplican las fuerzas en el plano medio de la placa dando origen a esfuerzos N_x, N_y y N_{xy} , posteriormente dichos esfuerzos membranales permanecen constantes durante la flexión, es decir:

- Desprecia la influencia adicional de las componentes de los esfuerzos de corte sobre el plano medio de la placa.
- Desprecia la aparición de deformaciones adicionales en el plano medio durante la flexión.

Se considera la influencia de los esfuerzos membranales en la deformación por flexión, pero no a la inversa.

- Placas flexibles o muy delgadas ($W > 0.5 H$)

Si la deflexión de la placa supera $0.5h$, y la deformada no es desarrollable o tiene apoyos indesplazables, se consideran válidas las hipótesis 2 y 3, pero no la 4.

Esta teoría atribuida a Von Kármán, analiza las deformaciones del plano medio incluyendo algunos de los términos no lineales en las relaciones cinemáticas; considerando así, el efecto de las deformaciones por flexión sobre los esfuerzos membranales de la placa. Las cargas son resistidas por flexión, corte, torsión y esfuerzos normales y tangenciales.

Esta teoría no tiene aplicaciones en la ingeniería civil, pero sí en la aeronáutica o en la aeroespacial. Su estudio, en este caso, contribuye a la determinación del límite de validez de la teoría de las placas planas delgadas.

- Membranas

No tienen rigidez a flexión y resisten las cargas normales al plano medio únicamente con esfuerzos normales y tangenciales, por la aparición de grandes deformaciones.

De aquí el nombre de membranales que se les da a los esfuerzos N_x , N_y y N_{xy} .

- Placas gruesas

Cuando el espesor de la placa supera un décimo de la menor de las dimensiones del plano medio, ya no se trata de placas delgadas y no son válidas las hipótesis 2 y 3.

El estado tensional, corresponde a un sólido tridimensional, debiendo estudiarse con la Teoría de la Elasticidad.

El diagrama de la figura siguiente ilustra acerca del campo de validez de las diversas teorías que se han citado para el estudio de las placas. Los límites establecidos en el mismo no son absolutos, ya que están relacionados con el problema que se resuelve y los errores admisibles.

hormigón armado, tiene un espesor de seis centímetros y un peso total de 330 toneladas. Estos dos ejemplos demuestran, en forma clara, que la Teoría de las Cáscaras, no siempre fácil desde el punto de vista matemático, como veremos más adelante, le corresponde importancia práctica tan considerable que la justifica plenamente.

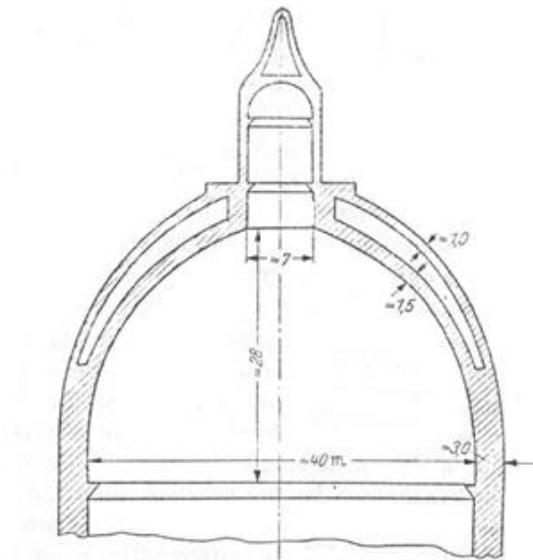


Figura 3.9 – Cúpula de la iglesia de San Pedro en Roma. (Según Zeitschrift F. Bauwesen 37 m [1887], Atlas, hoja 46)

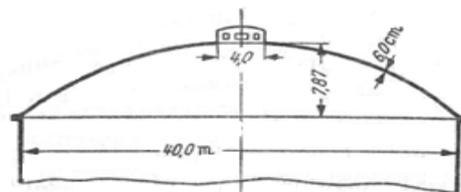


Figura 3.10 – Cúpula sobre una sección de producción de la firma Schott, Jena. (Según Dischinger: Bauing. 6cm [1925], pág. 362)

3.1.2.1 Bóvedas

La *bóveda* es un caso particular de *cáscara*, su superficie media es engendrada por el desplazamiento de un arco a lo largo de una línea recta. Es una cáscara abierta y constituye uno de los elementos con mayor historia en la técnica de la construcción, de entre ellas, es a la bóveda en cañón (Figura 3.11) a quien corresponde la primacía. Parece ser que los griegos concedían a Demócrito⁶ los honores del invento, pero debía ser sólo una patente de introducción porque los egipcios la utilizaban ya, hace bastante más de 4000 años.

⁶ Demócrito fue un filósofo y matemático griego.

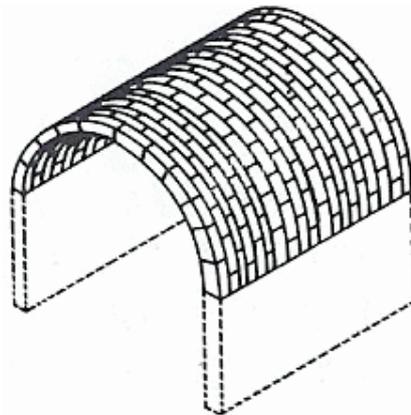


Figura 3.11 – Bóveda en Cañón

La bóveda continua sobre muros corridos, podría considerarse como una sucesión de arcos independientes colocados uno al lado del otro. Sin embargo, tiene algo que supera este concepto simplista; y ese algo es su continuidad a lo largo de las generatrices, que le permite trabajar con flexión según esa dirección. Cada arco puede, de esta forma ayudarse de los contiguos, repartiendo el exceso de carga que puede concentrarse sobre él.

Este concepto ha ido desarrollándose poco a poco, confusamente primero, y con toda claridad y consecuencia en las modernas estructuras laminares, en las que la función primaria de arco llega a desaparecer. En las primitivas bóvedas, el dovelado respondía a la simple idea de arcos contiguos con junta completa entre uno y otro. Muy curioso e instructivo es el tipo de bóveda (Figura 3.12) desarrollado por lo antiguos constructores del Oriente Medio utilizando el ladrillo; la inclinación dada al plano de los arcos y el poco espesor, normal a él, de las dovelas, hacía fácil su colocación en obra sin necesidad de cimbras. Es un caso típico de la influencia que las conveniencias del proceso de construcción y del propio material puede ejercer sobre el tipo estructural.

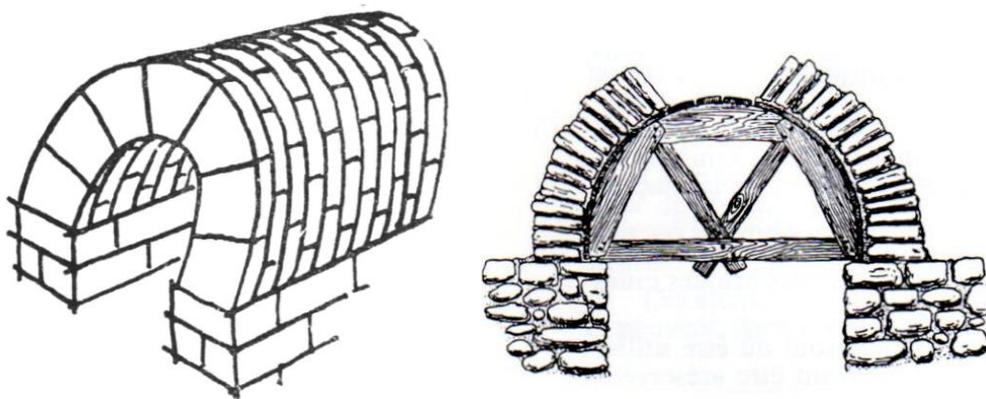


Figura 3.12 – Bóveda Caldea inclinada (izquierda) – Cimbra⁷ (Derecha)

En el arte romano, el engarce entre un arco y el contiguo, es ya el corriente hoy en día; con él se evita la separación y la desnivelación posible entre un arco y el otro

⁷ La *Cimbra* es un elemento auxiliar generalmente de madera que sirve para sostener provisionalmente el peso de un arco o bóveda.

(Figura 3.13). Las juntas seguidas, en lugar de ir entre arco y arco, van entre dovela y dovela, correspondiéndose a todo lo largo de la generatriz, como si se tratase de un arco único de ancho igual a la longitud de la Bóveda.

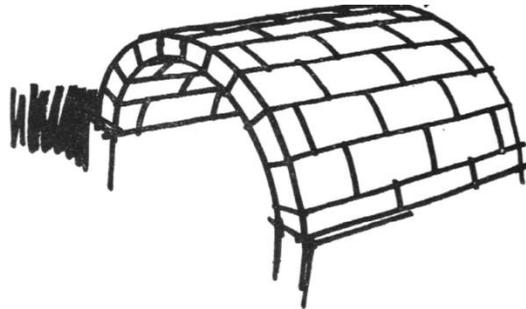


Figura 3.13 – Bóveda Romana

Las ventajas de este tipo de aparejo⁸ se acusan especialmente al emplear los arcos perpiaños (Figura 3.14) como refuerzos de la bóveda. Estos arcos no son solamente elementos ornamentales, que cortando la monótona continuidad del cañón mejoran su aspecto, recintando, el espacio; son verdaderos elementos de refuerzo, cuyo efecto se extiende a toda la bóveda, a lo largo de las generatrices, gracias a la rigidez de la misma en esta dirección. Los arcos perpiaños requieren repetirse con frecuencia para ejercer su beneficioso efecto.

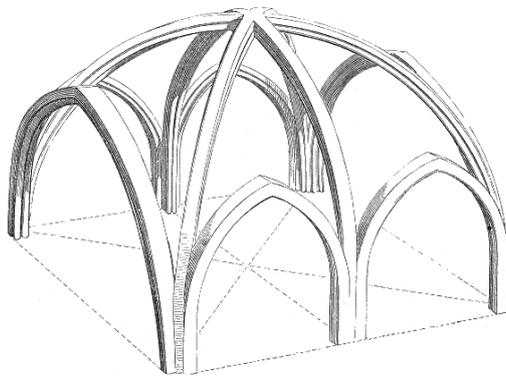


Figura 3.14 – Arcos Perpiaños

Las bóvedas en general, cualquiera que sea su directriz, dan empujes inclinados sobre sus apoyos; y, si éstos van sobre muros verticales, requieren un gran espesor para lograr que su propio peso centre la resultante sobre la base de sustentación. Al mismo tiempo producen esfuerzos cortantes tendientes a hacer *deslizar* los sillares⁹ de arranques sobre sus juntas horizontales, o los del muro que sostiene la Bóveda, peligro que no debe olvidarse en este tipo de estructura.

La bóveda, con arcos perpiaños, tiende a concentrar sus empujes sobre estos anillos más rígidos, y se presta, por tanto, a transmitirlos a los contrafuertes (Figura 3.15) de que atinadamente se provee el muro, a plomo de aquellos.

⁸ Se conoce como *Aparejo* a la forma de disposición de elementos tipo ladrillos o bloques de piedra en un cerramiento.

⁹ *Sillar* es una piedra o elemento constructivo que ha sido labrada y moldeada de manera de permitir su colocación inmediata.

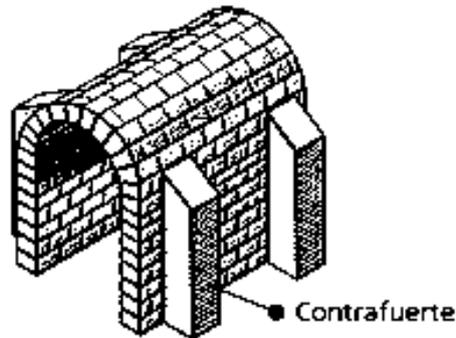


Figura 3.15 – Muros con contrafuertes

Las bóvedas en cañón se prestan muy bien a cubrir un espacio rectangular mediante la yuxtaposición de varias bóvedas paralelas, contrarrestando, mutuamente, sus empujes. Las resultantes, sobre los muros intermedios, son, entonces, verticales, y éstos pueden ser más ligeros y apoyar sobre columnas sin necesidad de contrarresto. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el equilibrio podría resultar inestable por diferencias en dicha transmisión de cargas a los muros entre dos bóvedas contiguas, esto, mientras no se cuente con la resistencia a la flexión de la columna, o de las propias Bóvedas. Bastaría una pequeña diferencia de cargas, de una bóveda a otra, para que se produjese el hundimiento. En estos casos, la estabilidad procede más bien de la rigidez contra movimientos horizontales de la propia Bóveda.

Si las bóvedas empotran sus directrices extremas en otro muro transversal de cierre, es la rigidez de éste, transmitida a través de la propia rigidez de la bóveda, la que da realmente estabilidad al conjunto.

El enlace de dos bóvedas puede realizarse, no solamente a lo largo de una generatriz común, sino en otra multitud de formas; y la combinación de varias bóvedas cilíndricas ha dado, así, lugar a realizaciones tan interesantes, desde todos los puntos de vista, como son, por ejemplo, las bóvedas por arista y en rincón de claustro (Figura 3.16).

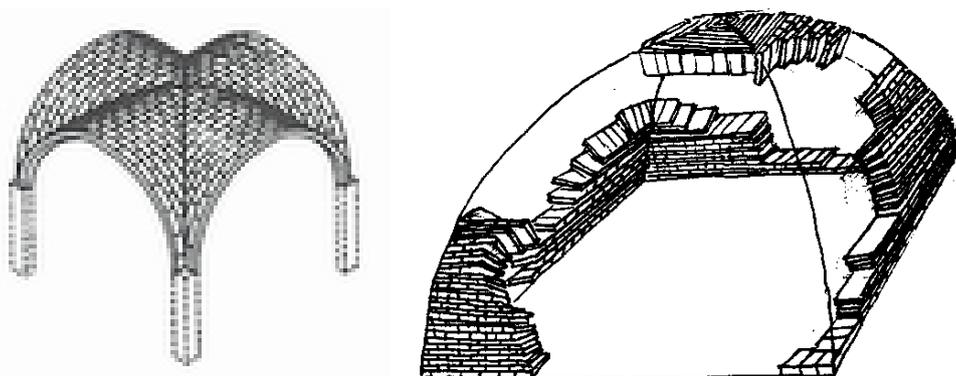


Figura 3.16 – Bóveda por Arista (izquierda), Bóveda de Rincón de Claustro (derecha)

3.1.2.2 Cúpulas

La *cúpula*, al igual que la bóveda, es otro caso particular de cáscara, su superficie media es engendrada por la rotación de una curva respecto de un eje, es

una cáscara de revolución. Es además, uno de los elementos más simples y mejor logrados del arte arquitectónico clásico. Es la solución más natural, más sencilla y, a la par, la más cargada de sentido técnico para cubrir un área sin soportes intermedios con el mínimo material.

Su forma inicial es la de planta circular con apoyo en todo el contorno y directriz apuntada. Esta directriz es natural, con materiales no resistentes a la tracción ya que su geometría no requiere dicha resistencia. En el caso de las cúpulas esféricas, estas generan tracciones en los paralelos de sus riñones¹⁰. Con respecto a las cúpulas rebajadas, estas generan la tracción en el anillo extremo, por lo que se requiere de estribos muy fuertes.

Por consiguiente, montadas sobre muros verticales, para este fenómeno, se requiere, o bien zunchos fuertemente resistentes a la tracción o contrafuertes muy acusados y repetidos. Las cúpulas sobre tambor cilíndrico, tan logradas y queridas del arte renacentista, luchan siempre con este problema.

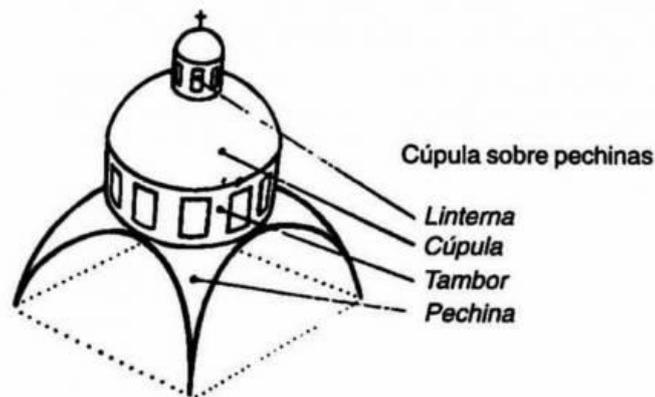


Figura 3.17 –Cúpula sobre tambor cilíndrico

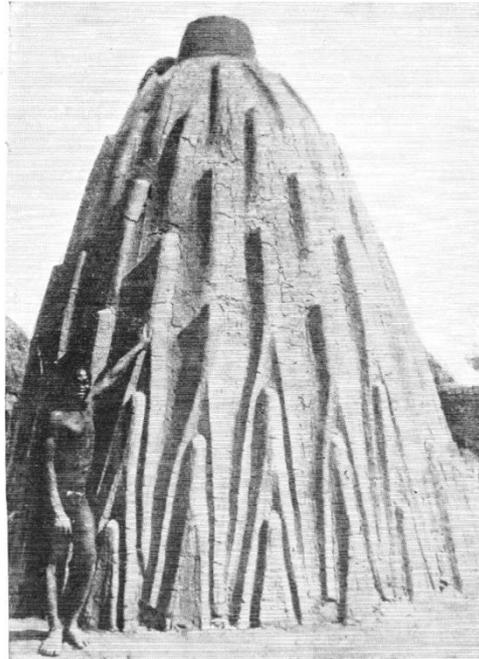
Debido a estos motivos, en la prehistoria de la construcción, la cúpula adopta con frecuencia directriz apuntada.

Muy interesantes son las cúpulas construidas en barro por los africanos del Tchad¹¹ (Figura 3.18). Nunca la humanidad ha logrado con tan escasos medios, crear un tipo estructural tan racional, tan adaptado a las propiedades del material y a las exigencias económicas de sencillez constructiva. Sus tracciones son tan pequeñas, que aún el barro es capaz de soportarlas; construidas por anillos, son estables durante todo el proceso de construcción sin necesidad de cimbra para sostenerse ni de andamiaje para el propio artífice que puede desarrollar su labor, hacia la clave¹², apoyándose en los salientes dejados al efecto de paramento exterior; y logrando, con todo ello, un claro valor estético en el conjunto de sus poblados. Si como se ha dicho, que la cúpula es símbolo de monarquía, estos conjuntos de ellas, más bien parecen una expresión de sana democracia, en el acoplamiento igualitario de sus unidades familiares.

¹⁰ Se conoce como riñón a la zona o franja de una Cúpula, Bóveda o Arco situada aproximadamente a una cuarta parte de su luz.

¹¹ República de Tchad, es un país ubicado en África central.

¹² Se conoce como clave, al punto más alto de un arco. También se denomina así a la dovela central que cierra en su punto más alto un arco, bóveda o cúpula.



Chozas de Tapial del Tchad. De «Summa Artis», J. Pijoán. Espasa-Calpe, S. A.

Figura 3.18 – Cúpulas de barro del Tchad

Pero es con la piedra con la que la humanidad ha desarrollado hasta el presente los mejores valores técnicos y estéticos de la cúpula.

Las mayores posibilidades (y a la par, algunas dificultades) de la cúpula empezaron cuando el hormigón armado permitió su realización con luces enormes y espesores pequeñísimos, limitados casi exclusivamente por el peligro de pandeo.

El hormigón armado, al resistir igualmente las tracciones que las compresiones, amplía el concepto de cúpula al más general de lámina de revolución.

Las posibilidades de este tipo estructural están bien lejos de ser agotadas, a pesar de haber alcanzado esbelteces superiores a las de una cáscara de huevo.

La cúpula puede imaginarse trabajando fundamentalmente como unos gajos o arcos meridianos cuya flexión está impedida por los anillos o paralelos horizontales. En las zonas en que los gajos quieren hundirse hacia adentro, los paralelos se lo impiden trabajando en compresión; y donde los gajos quieren abrirse, el paralelo ha de evitarlo resistiendo la tracción.

Pero, al forzar las tensiones y, por lo tanto, las deformaciones, aparecen problemas nuevos que se han de considerar con cuidado.

En primer lugar, las deformaciones no son suficientemente pequeñas para poder prescindir de ellas. La obligada continuidad entre su superficie y el anillo exterior, que contiene los empujes, provoca una flexión de los meridianos. En efecto, el anillo de borde, bajo las componentes radiales de los empujes, sufre una dilatación (Figura 3.19); mientras la lámina, para seguir este movimiento, necesitará deformar sus meridianos, con flexión en ellos, para amoldarse a la nueva dimensión del anillo. La banda contigua al anillo es la que más flexiones sufre, además de las tracciones que le produce la dilatación circunferencial, que tiende a producir, en esa zona periférica, grietas radiales.

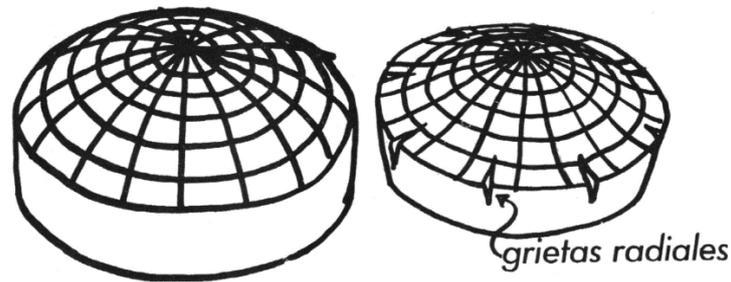


Figura 3.19 – Cúpulas con meridianos flexados y grietas radiales.

Aun cuando en este caso la flexión no sea un fenómeno tensional primario o esencial en la resistencia, la cuestión sigue manteniendo su importancia, por cuanto puede provocar el agrietamiento por flexión e incluso la rotura por compresión, al sumarse las compresiones normales del meridiano con las debidas a su flexión.

El *postesado* del anillo es un aporte interesante a este problema, pues permite establecer la tracción del zuncho de borde dándole, al mismo tiempo, la deformación que pida el paralelo extremo suprimiendo o disminuyendo considerablemente la flexión meridiana.

La contracción del hormigón produce efectos análogos, como es fácil de comprender, que también han de ser tenidos en cuenta.

Lo mismo sucede con las variaciones térmicas que interesan toda la masa de la cúpula. Inclusive, como el espesor es muy pequeño, puede llegar a tener importancia también la desigualdad de temperatura, del trasdós al intradós, producida especialmente por el efecto directo de la radiación solar si el hormigón queda directamente a la intemperie.

Más graves suelen ser los efectos del calentamiento desigual de una zona de la cúpula a otra; desigualdad que, en general, no presenta simetría de revolución. Esto mismo se acusa con las sobrecargas accidentales; porque, al reducirse el espesor y, por lo tanto, el peso propio, ganan importancia relativa otras sobrecargas, como son la nieve y el viento. Pero no siempre la nieve y nunca el viento, presentan este carácter de simetría; y ello da lugar a regímenes de esfuerzos diferentes o pesados de calcular, y para los que se pierden, en buena parte, las ventajas de la forma de revolución.

Por último, el peligro de pandeo se hace decisivo en la cúpula laminar y puede requerir el empleo de nervios rigidizantes; nervios que no tienen por qué seguir los meridianos, y que se prestan a multitud de disposiciones y cruzamientos de buen aspecto estético.

Se ha tratado hasta aquí, la cúpula de revolución de apoyo continuo a lo largo de un paralelo; en muchos casos interesa apoyarla sobre soportes aislados. Es clásica la solución de montarla sobre cuatro arcos, enlazando la forma circular, en planta, con el cuadrado circunscrito de los arcos mediante pechinas o trompas para lograr el apoyo continuo (Figura 3.20); pero la cúpula laminar de hormigón armado, capaz de soportar, no sólo la tracción y compresión en el plano tangente, sino también flexión, permite el apoyo directo de la cúpula sobre soportes aislados.

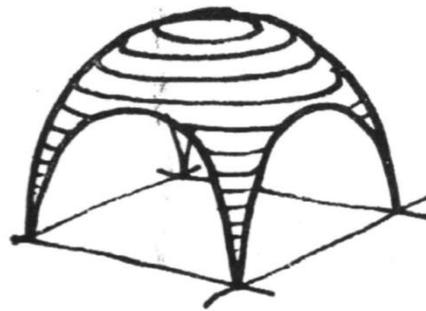


Figura 3.20 – Cúpula sobre pechinas.

3.2 CÁSCARAS CILÍNDRICAS

3.2.1 Comportamiento estructural de las cáscaras en general

En el estudio de esfuerzos internos de las cáscaras, suele representarse a las mismas por su **superficie media**, que es aquella que divide en cada punto el espesor en dos partes iguales. Se analizan generalmente con **coordenadas curvilíneas**.

Se tienen los siguientes esfuerzos:

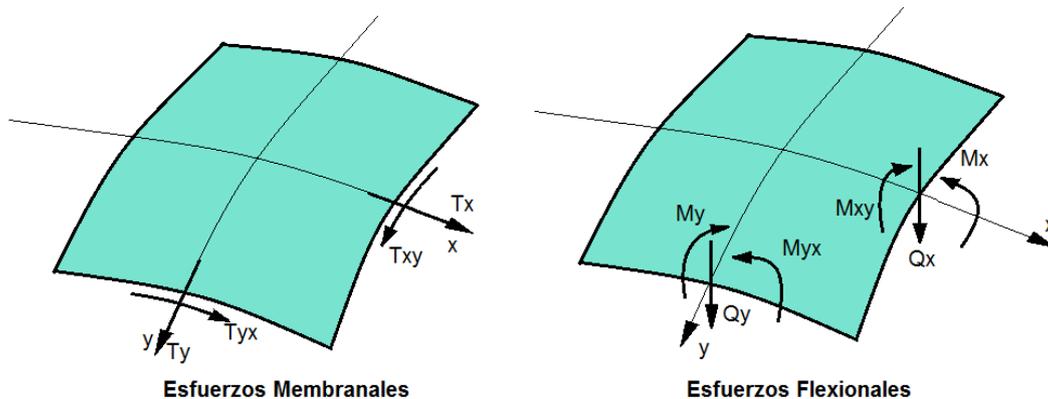


Figura 3.21 – Esfuerzos Internos.

Respecto de los Esfuerzos Membranales, puede decirse que “casi” yacen en el plano tangente a un punto cualquiera de la superficie, pero no son totalmente tangentes, tienen la dirección de las líneas x e y de acuerdo a la forma superficial en cuestión. Cuanto más pequeño sea el elemento diferencial de superficie, los esfuerzos se aproximarán más a estar contenidos en dicho plano tangente. Son similares a los esfuerzos de una **chapa**, con cargas en su plano.

Con respecto a los Esfuerzos Flexionales, decimos que son similares a los esfuerzos de una **placa**, con cargas perpendiculares a su plano. En la Figura 3.21, puede observarse la nomenclatura de los momentos flectores cuyo subíndice indica el eje que tiende a ser flexionado por el momento (M_x , M_y). Para los restantes momentos (M_{xy} , M_{yx}), la primera letra de su subíndice indica el eje normal al espesor en cuestión, y el segundo, el eje que tiende a ser flexionado por el momento.

Todos estos esfuerzos, son *esfuerzos por unidad de longitud*.

3.2.2 Teoría Membranal

Esta teoría supone que los *Esfuerzos Flexionales son nulos* y sólo hay Esfuerzos Membranales.

Para que la solución de la Teoría Membranal sea la solución real, o sea, que efectivamente sólo existan esfuerzos membranales, **no deben darse alguna de las siguientes condiciones.**

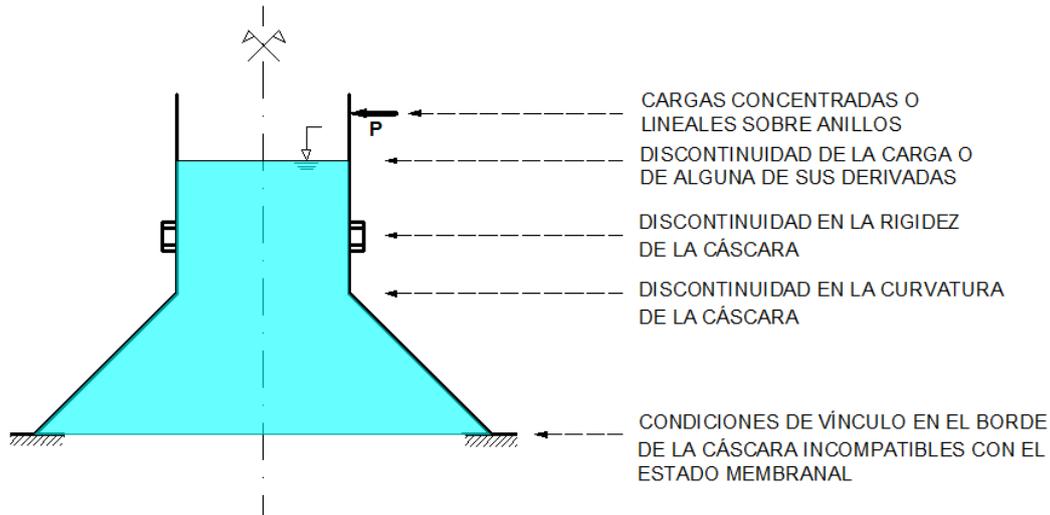


Figura 3.22 – Características del comportamiento **no** membranar.

Con respecto a las condiciones de vínculo puede agregarse lo siguiente:

- Las reacciones deben ser tangentes a la superficie media de la cáscara en cada punto vinculado.
- Los vínculos deben permitir las deformaciones correspondientes a la Teoría Membranar.

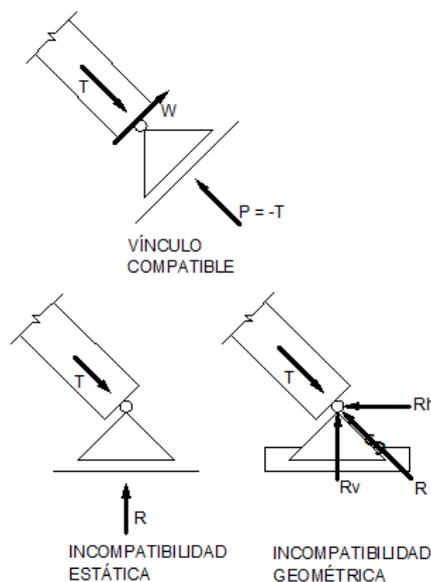


Figura 3.23 – Compatibilidad de vínculos con la Teoría Membranar

Con respecto a la figura anterior, puede decirse que, en el caso de la incompatibilidad estática, la reacción R no puede equilibrar a carga T , ya que R no tiene componente alguna que anule la componente horizontal de T . Existen grandes perturbaciones de borde en la cáscara.

En el caso de la incompatibilidad geométrica, ahora sí, el equilibrio es posible, pero *los desplazamientos calculados según la Teoría Membranal, no son compatibles con los vínculos*. Existen perturbaciones de borde, menores que en el caso de la incompatibilidad estática.

Resulta entonces que el vínculo compatible es el que ejerce su reacción en dirección tangente a la superficie media de la cáscara, de comportamiento similar (como se comentó anteriormente) al de una chapa. Este vínculo, permite los desplazamientos correspondientes a la Teoría Membranal, o sea, el giro en el apoyo y el corrimiento en dirección normal a la superficie media.

En determinadas condiciones, un problema de cáscaras puede encararse en dos etapas.

- 1) *Resolución del Estado Membranal con la Teoría Membranal*
- 2) *Corrección del Estado Membranal y cálculo de esfuerzos flexionales debido a perturbaciones de borde.*

3.2.3 Cáscaras con simetría de revolución (de geometría y de cargas) en régimen Membranal.

Consideraciones intuitivas sobre el comportamiento estático de las membranas.

a - Supongamos el caso de un hilo infinitamente flexible, fijo en un extremo y sometido a fuerzas exteriores que actúan en un plano vertical. Estas fuerzas están equilibradas por el solo esfuerzo de tracción S que actúa en el hilo, con tal que este tenga la forma del funicular de las fuerzas. Es decir que, el hilo, que por su extrema flexibilidad no tiene forma propia, se dispone según el funicular¹³, que es su forma de equilibrio.

Si el hilo tiene cierta rigidez, continúa resultando sometido a tracción simple solo en el caso en que su forma propia coincida con la funicular de las fuerzas exteriores. Si su forma propia es distinta, se deforma y tiende a la funicular, aproximándose más a esta cuanto más flexible es, pero esta deformación provoca momentos flectores proporcionales a las variaciones de curvatura y al módulo de rigidez a flexión del hilo.

b – Por otro lado, para una membrana, la misma, siempre tiene forma propia, incluso si es infinitamente flexible, ya que un cambio de forma significativo, requerirá alargamientos mayores que los elásticos (por ejemplo, imaginemos una membrana en forma de paraboloides o de cono que se quisiese transformar en un casquete esférico).

Por consiguiente, *podría* suponerse que, si no tiene una forma tal que sea compatible con las fuerzas exteriores dadas, estas no pueden estar equilibradas solamente por esfuerzos normales S_1 y S_2 . En otras palabras, bajo una primera mirada, parece que convendría imaginar que la membrana debería tener una forma especial dependiente de la distribución de las fuerzas exteriores, y que, de no ser así, no se produciría el equilibrio en el caso de que la membrana fuera infinitamente

¹³ Forma funicular: es aquella forma que adopta un cable solicitado a tracción pura según un estado de carga solicitante.

flexible, o se producirían fuertes deformaciones acompañadas de momentos flectores en el caso en que tuviese cierta rigidez a flexión.

Pero, resulta que, en realidad, el funcionamiento de una membrana es esencialmente distinto al de un hilo. *Ella siempre está en equilibrio*, cualquiera sea su forma y cualesquiera sean las fuerzas exteriores; dicho equilibrio es posible incluso solo con los esfuerzos de membrana. Este hecho es fácilmente comprensible en el caso de una membrana de revolución sometida a fuerzas exteriores simétricas. En efecto, las franjas según los paralelos, pueden funcionar como funiculares de una fuerza radial (según r) uniforme, de cualquier intensidad. Por consiguiente, *estas franjas absorben una componente radial de las fuerzas exteriores, de valor tal que deja a las franjas meridianas (cualquiera sea la forma del meridiano) las fuerzas que forman la funicular.*

En otras palabras, las franjas meridianas están sometidas a fuerzas exteriores y a las resultantes radiales de los esfuerzos que les transmiten los paralelos, teniendo estas fuerzas valores tales que los meridianos resultan sometidos a fuerzas que generan la forma funicular.

Por consiguiente, el equilibrio es siempre posible, y la membrana está libre de momentos flectores, siendo infinitamente flexible, o bien, no siéndolo completamente y generando momentos flectores de poca importancia.

Como consecuencia, se tiene el régimen estático más favorable que podamos desear. Donde las tensiones normales σ están uniformemente repartidas en el espesor y el material se utiliza del mejor modo posible.

c – Podría objetarse a lo anterior, que una burbuja de agua con jabón, toma la forma esférica y que un recipiente de goma con forma de elipsoide de revolución, sometido a presión interna uniforme, se deforma, tendiendo a transformarse en esférico. Por ello podría creerse que, para fuerzas exteriores dadas, corresponde una determinada forma de la membrana, única adecuada para equilibrar fuerzas.

Pero la burbuja de jabón no tiene forma propia y puede tomar cualquier otra; por consiguiente, se dispone según una esfera, que a igualdad de volumen encerrado tiene superficie mínima (hecha mínima por efecto de la tensión superficial). En el caso del recipiente de goma, este se deforma porque es muy *dilatable*. En los puntos en que los meridianos tienen pequeña curvatura, solamente absorben una pequeña parte de la presión interna. Por consiguiente, los paralelos absorben una parte mayor, por lo que se deforman más que los otros paralelos y el recipiente tiende a la forma esférica. Sin embargo, no puede alcanzarla, ya que entonces se producirían esfuerzos $S_1 = S_2$ constantes en todos los puntos, en contraste con la dilatación no constante que ha sufrido.

d – Resulta entonces que las franjas según los paralelos ejercen una acción de zunchado sobre las franjas según los meridianos, en virtud de la cual las fuerzas exteriores hacen sufrir a estos últimos, deformaciones muy pequeñas. Por tanto, esto hace que las membranas puedan soportar las fuerzas exteriores a pesar de la rigidez muy pequeña o nula de las franjas meridianas. Estas últimas no son capaces de transmitir a distancia las solicitaciones transversales; de cualquier forma, esta transmisión será **frenada o amortiguada con mucha rapidez por la acción de zunchado indicada.**

De esto resulta una importante consecuencia, que es el rápido amortiguamiento de la sollicitación debida a los enlaces y el hecho de que las deformaciones elásticas más importantes dependen solo de los valores locales de los esfuerzos S_1 y S_2 .

3.2.4 Esfuerzos internos en las membranas de revolución

Observaciones preliminares.

a – Consideremos un recipiente o depósito de chapa, o bien una cúpula muy delgada o una envolvente de tejido (globo) con forma de superficie de revolución¹⁴. La superficie puede ser de doble curvatura o bien de simple curvatura cuando es cilíndrica o cónica. Sobre la pared actúan fuerzas igualmente dispuestas en todos los puntos de un mismo paralelo y variables generalmente de uno a otro¹⁵. Pueden tener una componente ξ según la tangente al meridiano y otra Z según la normal a la membrana, estas son iguales para todos los meridianos y constante a lo largo de los paralelos.

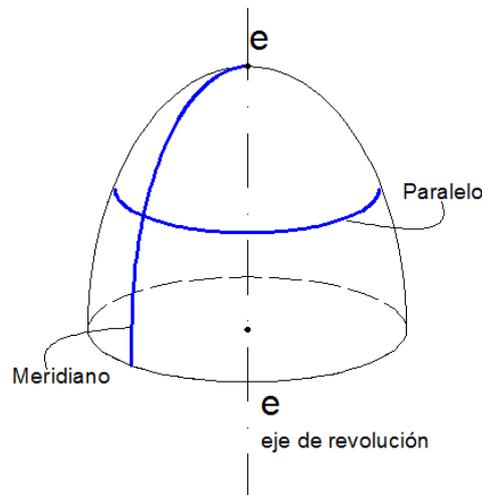


Figura 3.24 - Meridianos y Paralelos

A lo largo de los meridianos existen tensiones *normales* T_ξ dirigidas según la tangente al meridiano, provocadas por la resultante V (vertical) de las fuerzas exteriores. Estas tensiones son nulas si lo es la resultante. A lo largo de los paralelos, existen tensiones *normales* T_φ dirigidas según la tangente al paralelo que están provocadas, sea por la componente Z de las fuerzas exteriores, sea por el hecho de que las tensiones T_ξ cambiando de dirección de punto a punto del meridiano (si este es curvo), no están equilibradas entre sí y ejercen una acción radial sobre los paralelos (esfuerzo de desvío, detallado más adelante).

Las T_φ existen también si es nula la componente Z de las fuerzas exteriores, en cuyo caso se deben sólo a la acción de los meridianos. En el caso de membranas cónicas, si en un cierto entorno no actúan fuerzas exteriores, las T_ξ , que no cambian

¹⁴ Se obtiene una superficie de revolución haciendo girar una curva plana (meridiano) alrededor de un eje contenido en su plano. La membrana queda determinada cuando se conoce la forma del meridiano y el espesor s de la misma en cada punto de dicho meridiano.

¹⁵ Estas fuerzas pueden deberse al peso propio de la estructura, a la presión de un gas, a la presión hidrostática de un líquido, al peso de la nieve o sustancias incoherentes contenidas en el depósito (como granos u otros áridos) o a la fuerza centrífuga si el depósito gira alrededor de su eje.

de dirección, resultan equilibradas entre sí, teniéndose por consiguiente $T_\varphi = 0$. Así, en este caso, las T_φ están producidas solo por las eventuales fuerzas exteriores Z .

Las T_ξ se transmiten a través de las secciones normales a los meridianos, o sea, producidas por superficies cónicas coaxiales con la membrana y normales a ésta. Las T_φ se transmiten a través de las secciones producidas por planos meridianos.

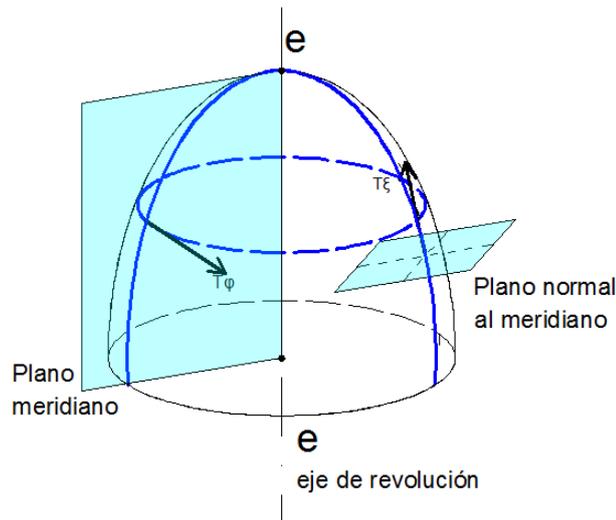


Figura 3.25 – Tensiones según planos correspondientes. Cáscara genérica.

Por razones de simetría, en las secciones según los meridianos o paralelos, son nulas las tensiones cortantes τ (en el plano tangente); en otros términos: dos gajos contiguos se comportan del mismo modo y, por consiguiente, no se transmiten tensiones $\tau_{\varphi\xi}$. De donde, por el teorema de Cauchy, son nulas también las tensiones $\tau_{\xi\varphi}$ en las secciones según los paralelos.

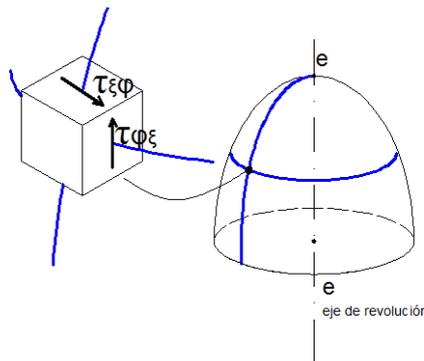


Figura 3.26 – Cubo elemental y tensiones cortantes. Cáscara genérica.

b – Supongamos que el espesor s sea muy pequeño; esto es, que el comportamiento sea el de una membrana. Supondremos, por consiguiente, que tanto T_ξ como T_φ están uniformemente repartidas en el espesor s ; esta es la hipótesis que se utiliza como fundamento del estudio de los depósitos o cúpulas delgadas en cuestión. En general se justifica diciendo que el espesor s es tan pequeño que resulta lícito despreciar la rigidez a flexión. Sin embargo, es conveniente examinar con más atención su significado exacto. En primer lugar, las diversas franjas según los paralelos, estando sometidas a tracción o a compresión, modifican su radio r , pero se

conservan circulares, por lo que la tensión T_φ puede suponerse constante en los diversos puntos del espesor, ya que este es muy pequeño respecto a r .¹⁶ Como consecuencia de las variaciones Δr de los radios r de los diversos paralelos, las franjas según los meridianos pueden deformarse¹⁷ y por consiguiente, su curvatura modificarse en algún punto, lo que provoca tensiones T_ξ' correspondientes a momentos flectores, variables linealmente en el espesor desde un máximo positivo a un máximo negativo de igual valor absoluto. Las T_ξ' se superponen a las tensiones indicadas T_ξ , de forma que las tensiones totales ya no resultan uniformemente repartidas. Sin embargo, las tensiones T_ξ' son muy pequeñas, porque lo son las variaciones de curvatura del meridiano¹⁸, pero sobre todo porque es pequeño el espesor s , por consiguiente, son despreciables respecto a las T_ξ , que por ello se mantienen prácticamente invariables, o sea, uniformemente repartidas en el espesor. En otros términos: el momento flector M_1' es despreciable. No puede decirse lo mismo cuando actúan fuerzas o pares exteriores concentrados a lo largo de un paralelo determinado o cuando la curvatura de los meridianos presenta una discontinuidad en un paralelo. En este caso, las tensiones debidas a la flexión y a la cortadura pueden no ser despreciables. Sin embargo, están limitadas a una pequeña región y disminuyen rápidamente al crecer la distancia al paralelo en cuestión.

Al ser despreciable el momento flector en las franjas meridianas, también lo es el esfuerzo cortante y, por consiguiente, la tensión τ dirigida *normalmente a la superficie media* (esto es, a mitad del espesor) de la membrana.

c – Por consiguiente, en todo punto de la membrana se tiene un estado plano de tensiones, cuyo plano es el tangente en el punto a la superficie media de la membrana. Por razones de simetría, las tensiones principales vienen a ser T_ξ y T_φ indicadas ($\tau_{\varphi\xi} = \tau_{\xi\varphi} = 0$); o sea, *las direcciones principales son las tangentes al meridiano y al paralelo en dicho punto*. Cualquier otra dirección de la membrana, oblicua respecto al meridiano y al paralelo, está sometida a tensiones *normales* y *tangenciales* variables con la orientación de la sección. Sólo en el caso en que $T_\xi = T_\varphi$, las tensiones normales son constantes y las tangenciales nulas en toda la sección.

¹⁶ El radio r de una fibra circular genérica situada hacia el interior o el exterior del espesor, sufre un aumento Δr , que es igual para todas las fibras (si se desprecia la variación del espesor debido a la contracción transversal); por consiguiente, toda fibra sufre el mismo alargamiento total $\Delta l = 2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r = 2\pi\Delta r$. Pero la longitud l de las fibras es menor en las más interiores, por lo que estas sufren un alargamiento $\varepsilon = \Delta l/l$ mayor, y, consiguientemente, una tensión T mayor. Sin embargo, si el espesor s es pequeño respecto a r , la diferencia de las diversas longitudes es despreciable y T es prácticamente constante. La tensión T_φ puede ser variable en el espesor (lo que corresponde a un momento flector M_2) también por efecto de la rotación θ de la tangente al meridiano. Pero también esta causa es despreciable, porque θ es muy pequeño, y sobre todo, porque s es muy pequeño.

¹⁷ En ciertos casos las franjas meridianas se desplazan, pero no se deforman, como sucede, por ejemplo, en el caso de un depósito cilíndrico de eje vertical que contiene líquido hasta el borde superior: los alargamientos Δr de los paralelos son proporcionales a la presión hidrostática. o sea, a la profundidad, por lo que las generatrices (o meridianos) se mantienen rectas.

¹⁸ La deformación de las franjas meridianas es muy pequeña, ya que resulta frenada por las franjas paralelas que deben alargarse o acortarse y que son poco deformables, pues solo están solicitadas a tracción o compresión. Esta acción de frenado es la causa fundamental del comportamiento estático característico de las estructuras en cuestión.

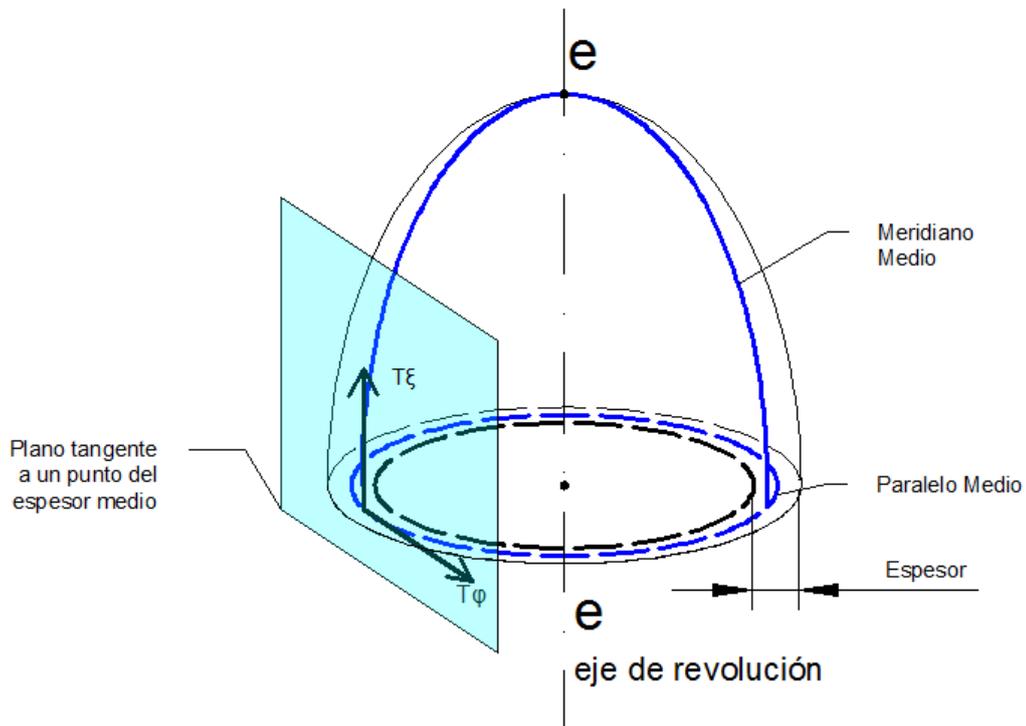


Figura 3.27 – Estado plano de tensiones según un plano tangente en el espesor medio. Cáscara genérica.

En lugar de T_ξ y T_φ , se consideran frecuentemente sus resultantes S_ξ y S_φ , correspondientes al espesor total s y a la anchura unidad de una franja de membrana dirigida según el meridiano o el paralelo, que representan el esfuerzo normal en estas franjas. Evidentemente se tiene:

$$S_\xi = T_\xi \cdot 1 \cdot s ; \quad S_\varphi = T_\varphi \cdot 1 \cdot s$$

Por lo que resulta:

$$T_\xi = \frac{S_\xi}{s} ; \quad T_\varphi = \frac{S_\varphi}{s} \quad [1]$$

A T_ξ y T_φ se las llama tensiones de membrana, mientras que a S_φ , S_ξ y Q , los denominaremos esfuerzos de membrana. Las dimensiones de estos son $F \cdot L^{-1}$ (unidad de fuerza sobre unidad de longitud).

Las tensiones y los esfuerzos recién mencionados no dependen de la deformación de la pared, por lo tanto, el problema es "estáticamente determinado"; es decir, resoluble empleando exclusivamente las condiciones de equilibrio.

3.2.5 Solución Membranal

Curvaturas principales en un punto de la superficie de la cáscara.

Si llamamos \bar{n} al versor de la dirección normal a una superficie y cortamos ésta con planos que contengan a \bar{n} , obtenemos distintas curvas espaciales contenidas en la superficie; cada curva tendría una curvatura distinta; *las curvaturas máxima y mínima de las curvas así generadas son las curvaturas principales.*

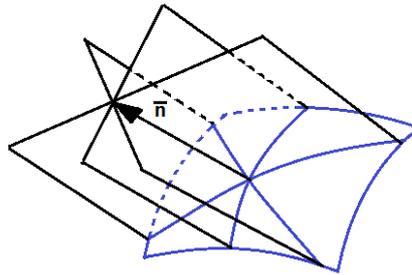


Figura 3.28 – Curvaturas Principales.

En una cáscara con simetría de revolución, *elegimos como curvas coordenadas a los meridianos y los paralelos*. A los meridianos les corresponde además una de las curvaturas principales (la mínima), pero los paralelos no son curvas de curvatura principal máxima. Esto es porque el plano que contiene al paralelo puede no contener la dirección normal. Un ejemplo lo constituye un paraboloide vertical que es cortado con un plano vertical y otro horizontal, cuya intersección con el paraboloide determina los meridianos y paralelos respectivamente, la recta de intersección entre los dos planos, será horizontal, y no tendrá la dirección normal a la superficie.

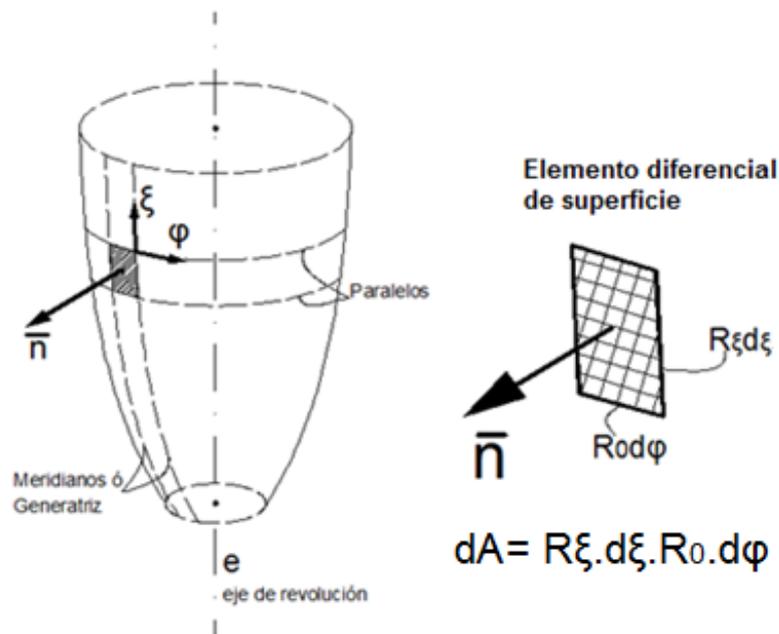


Figura 3.29 – Elemento cáscara con simetría de revolución con coordenadas curvilíneas

Si **abatimos el plano meridiano** (el plano que contiene al meridiano) y tomamos un elemento diferencial de superficie, se tienen los siguientes esfuerzos:

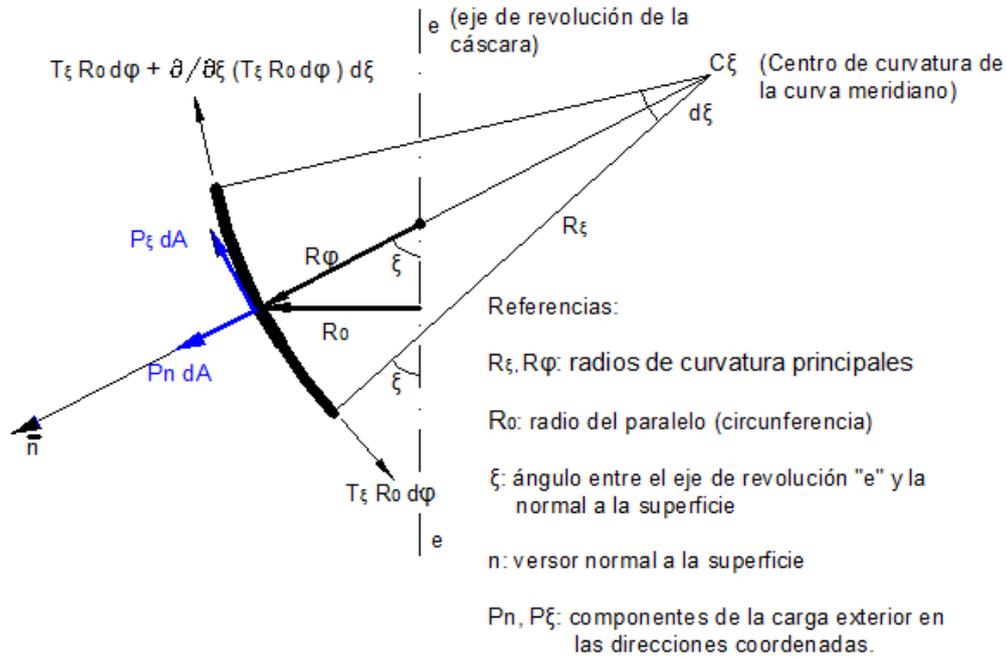


Figura 3.30 – Plano meridiano abatido

Si abatimos el plano paralelo (el plano que contiene al paralelo) y tomamos un elemento diferencial de superficie, se tienen los siguientes esfuerzos:

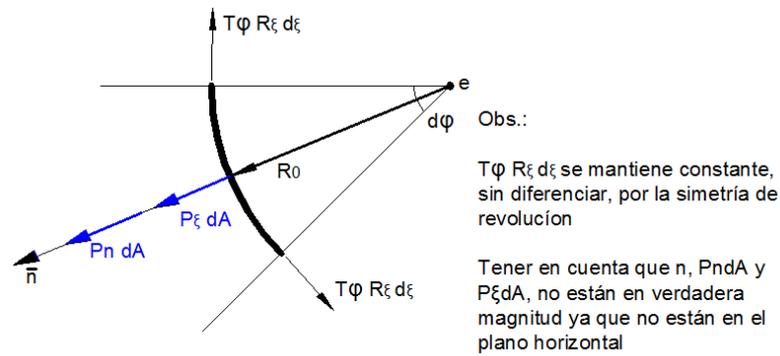


Figura 3.31 – Plano paralelo abatido

TEOREMA DE MEUSNIER

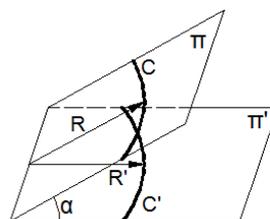


Figura 3.32 – Teorema de Meusnier

Si C' es la proyección de C sobre el plano π' , entonces:

$R' = R \cdot \cos(\alpha)$. Por lo que:

$R_0 = R_\varphi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right)$ (Figura 3.30), luego:

$$R_0 = R_\varphi \cdot \text{sen}(\xi) \quad [2]$$

En los dos esquemas de abatimiento de planos meridianos y paralelos, se ve que los esfuerzos Membranales T sufren un desvío según las curvaturas que provocan las fuerzas de desvío en dirección normal.

Se tiene entonces que en el plano **meridiano**:

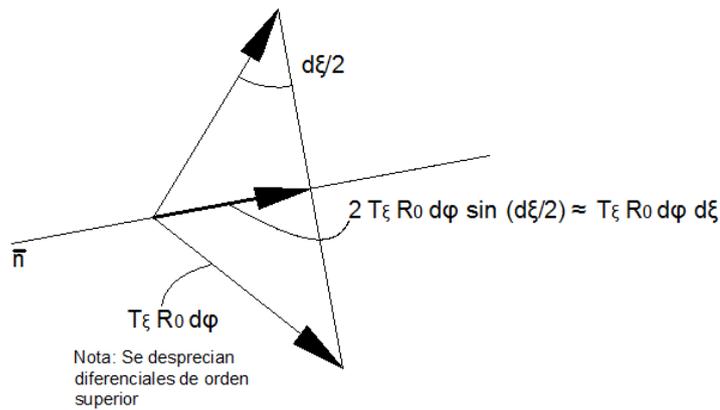


Figura 3.33 – Esfuerzo de desvío en plano meridiano

También, en el plano **paralelo**:

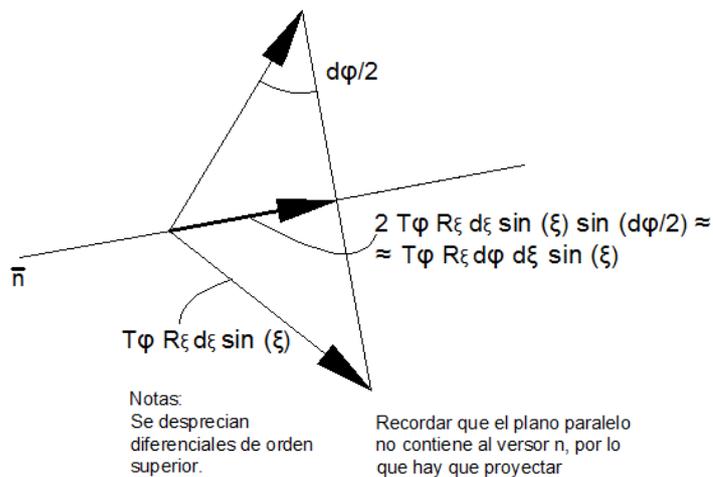


Figura 3.34 – Esfuerzo de desvío en plano paralelo

Se agrega como aclaración la siguiente figura que explica por qué los ángulos internos a las componentes del esfuerzo de desvío van divididos por 2. Como ejemplo, la figura está referida al plano paralelo.

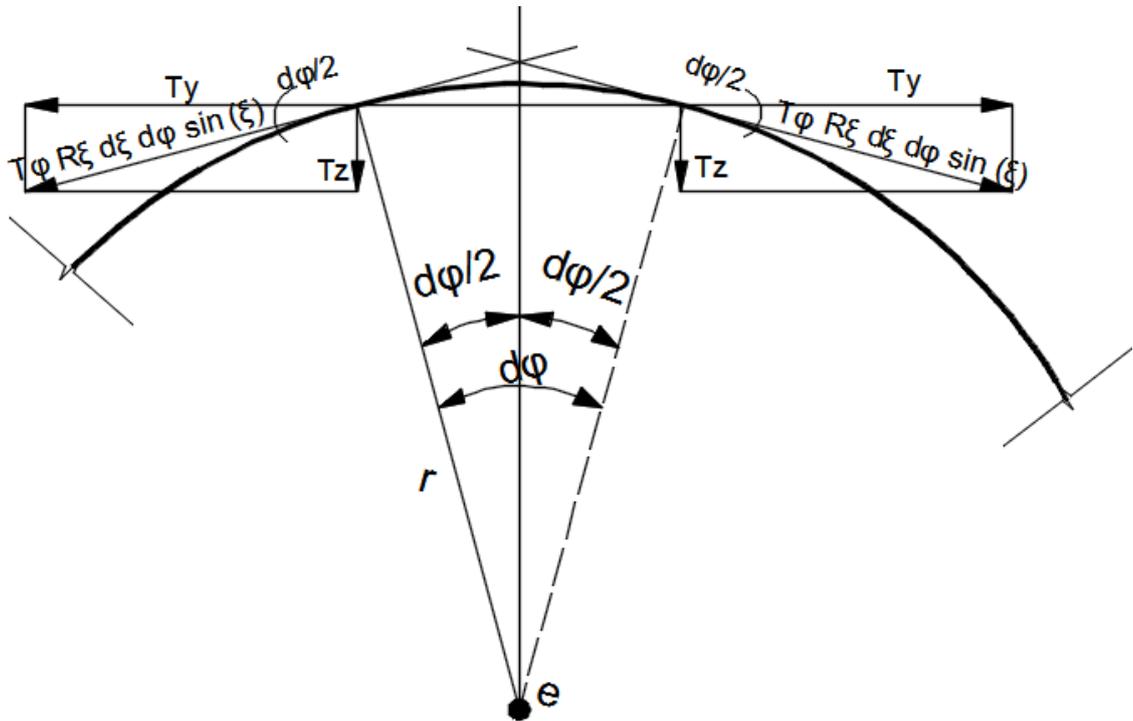


Figura 3.35 – Descomposición de esfuerzos contenidos en plano paralelo en sus componentes según z e y.

Ecuaciones de equilibrio:

- Proyección sobre la normal (en base a las Figuras 3.30, 3.31, 3.33, 3.34)

$$Pn \cdot dA - T_{\xi} \cdot R_0 \cdot d\varphi \cdot d\xi - T_{\varphi} \cdot R_{\xi} \cdot d\varphi \cdot d\xi \cdot \sin(\xi) = 0 \quad [3]$$

A partir de la Figura 3.29:

$$dA = R_{\xi} \cdot d\xi \cdot R_0 \cdot d\varphi \quad [4]$$

$$Pn \cdot R_{\xi} \cdot R_0 - T_{\xi} \cdot R_0 - T_{\varphi} \cdot R_{\xi} \cdot \sin(\xi) = 0 \quad [5]$$

...dividiendo por $R_{\xi} \cdot R_0$ se tiene:

$$\frac{T_{\xi}}{R_{\xi}} + \frac{T_{\varphi}}{\frac{R_0}{\sin(\xi)}} = Pn \quad [6]$$

Pero como, $R_0 = R_{\varphi} \cdot \sin(\xi)$, luego:

$$\frac{T_{\xi}}{R_{\xi}} + \frac{T_{\varphi}}{R_{\varphi}} = Pn \quad [7]$$

La anterior constituye la **primera ecuación de equilibrio en cáscaras con simetría de revolución**.

Proyección sobre el eje de revolución

Si cortamos la cáscara por el plano paralelo tenemos:

Pe: Fuerza resultante de toda la carga actuando a un lado o a otro del paralelo.

Por simetría de revolución de cargas, la dirección de “Pe” coincide con la de “e”.

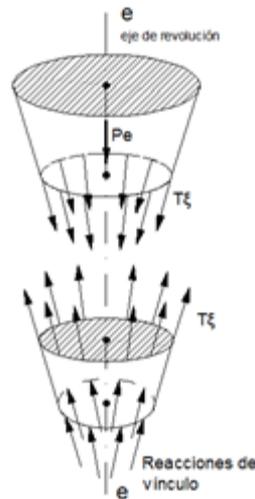


Figura 3.36 – Corte de cáscara por plano paralelo

Entonces:

$$T_{\xi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_0 \cdot \sin(\xi) + Pe = 0$$

Por lo tanto:

$$T_{\xi} = -\frac{Pe}{2 \cdot \pi \cdot R_0 \cdot \sin(\xi)} \quad [8]$$

La anterior constituye la **segunda ecuación de equilibrio en cáscaras con simetría de revolución.**

Para la Figura 3.36 se tiene que, si se calcula “Pe” para la parte inferior, deberán considerarse las reacciones de vínculo.

- Hasta el momento, se han obtenido dos ecuaciones algebraicas de equilibrio (no diferenciales) con dos incógnitas (T_{φ} , T_{ξ}); el análisis estático es *suficiente* para resolver el problema. *Esto permite arribar a una conclusión importante, y es que la Teoría Membranal en cáscaras con simetría de revolución, es un problema ISOSTÁTICO.*

Como tenemos cargas con *simetría de revolución*:

$P_{\varphi} = 0$. Para cumplir la simetría, la carga estará contenida en un plano meridiano, no tiene componente según φ . Si fuera distinto de cero, no habría simetría de revolución.

$T_{\varphi\xi} = 0$. Es un esfuerzo esencialmente *antimétrico*, ya que actúan en puntos simétricos de la estructura con igual módulo y dirección, pero con sentido opuesto. Los esfuerzos antimétricos valen cero en ejes de simetría.

Resultarán entonces con valores distintos de cero:

- Magnitudes cinemáticas
- T_φ
- T_ξ

y todos serán independientes de la coordenada φ .

Cuando las condiciones vistas no se cumplen, aparecen esfuerzos de *flexión*. El análisis de las tensiones y deformaciones, se complica mucho. Para algunos problemas simples se tienen deducidas las expresiones. Por ejemplo, para *Cáscaras Cilíndricas bajo la acción de cargas y temperaturas distribuidas con Simetría de Revolución y Libremente Dilatables en Dirección Longitudinal e Infinitamente Largas*.

3.2.6 Solución incluyendo los esfuerzos de flexión

El siguiente desarrollo aplica para cáscaras cilíndricas, infinitamente largas, libremente dilatables en dirección longitudinal bajo la acción de cargas y variaciones de temperatura distribuidas con simetría de revolución.

En aplicaciones prácticas, frecuentemente se encuentran problemas en donde una cáscara cilíndrica es sometida a las acciones de fuerzas distribuidas simétricamente respecto del eje del cilindro. La distribución de esfuerzos en calderas cilíndricas sometidas a la acción de la presión del vapor, esfuerzos en contenedores cilíndricos que tienen un eje vertical y que se encuentran sometidos a la presión de líquidos y esfuerzos en tuberías circulares bajo presión interna uniforme son ejemplos de estos problemas.

La Figura 3.37 muestra en coordenadas cilíndricas, una cáscara cilíndrica cortada longitudinalmente con un plano que contiene a su eje. La misma posee una carga interior “p” positiva. Se muestra también un detalle del espesor de la cáscara y su deformación compuesta de un giro más un desplazamiento, cumpliendo ésta la Hipótesis de Kirchhoff.

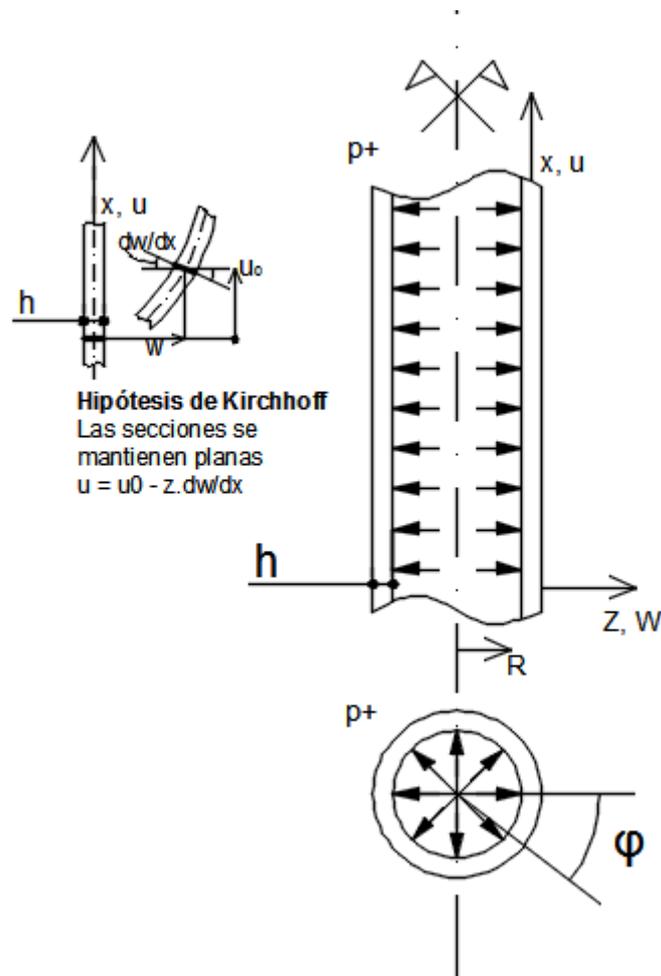


Figura 3.37 – Cáscara cilíndrica infinitamente larga, libremente dilatada en dirección longitudinal bajo acción de cargas distribuidas con simetría de revolución.

Por simetría, se concluye que la componente “v” de desplazamiento en la dirección circunferencial desaparece. Por lo tanto, se consideran solamente las componentes u, w, en las direcciones x, z respectivamente.

Como aclaración y en referencia a la figura 3.37, la Hipótesis de Kirchhoff de placas establece que las fibras que eran rectas y perpendiculares a la superficie media antes de la deformación, permanecen rectas después de la misma.

Expresión General de la Teoría Matemática de la Elasticidad

Esta Teoría es utilizada para obtener respuestas técnicamente satisfactorias a los problemas reales de difícil abordaje por su compleja realidad. Utiliza un modelo que usualmente sustituye a los cuerpos reales, formados por moléculas y átomos, que es el cuerpo continuo, el cual puede concebirse como un conjunto infinito de puntos materiales en el espacio tridimensional.

Dicho conjunto se supone “cerrado” (tiene una frontera que es la superficie del cuerpo) y “conexo” (es decir que cualquier par de sus puntos pueden unirse por medio de una poligonal de un número finito de lados cuyos puntos pertenecen al conjunto).

No existen “a priori” restricciones respecto de la forma geométrica del cuerpo en estudio.

La aceptación de este modelo, en el cual se pueden imaginar elementos de longitud o de área o volumen infinitamente pequeños (diferenciales), permite establecer las definiciones de los elementos del *tensor de deformaciones* y del *tensor de tensiones*. (De gran valor para el estudio del comportamiento de los cuerpos en los problemas de ingeniería). Un *tensor* es una representación matemática en forma de matriz, que representa el estado *deformacional* (tensor de deformaciones) o *tensional* (tensor de tensiones) al que se encuentra sujeto un punto de un cuerpo. Esta representación se encuentra asociada a un sistema de referencia ortogonal definido en dicho punto.

En general, las posibilidades de obtener soluciones analíticas, están limitadas por la complejidad de los problemas matemáticos que se plantean si la geometría del cuerpo no es relativamente sencilla.

Al cuerpo continuo se le atribuye además la propiedad denominada *elasticidad*, según la cual, dicho cuerpo bajo la acción de fuerzas exteriores se deforma y, al descargarlo, recupera totalmente su configuración inicial. En la Teoría Lineal de la Elasticidad, se acepta la existencia de una relación lineal entre las componentes del tensor de deformaciones y el tensor de tensiones. El cuerpo que cumple esta condición es llamado elástico-lineal o elástico proporcional. El estudio de la deformación del continuo, las condiciones de equilibrio y la propiedad de elasticidad nos suministran los elementos básicos para resolver los problemas de acuerdo con la Teoría de la Elasticidad.

Las Incógnitas de la Teoría de la Elasticidad

En total son 18 incógnitas en general. Trabajando en coordenadas cilíndricas:

- 6 de deformaciones: $\epsilon_x, \epsilon_\varphi, \epsilon_z, \gamma_{x\varphi}, \gamma_{\varphi z}, \gamma_{zx}$
- 9 de tensiones: $\sigma_x, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{x\varphi}, \tau_{\varphi z}, \tau_{zx}, \tau_{\varphi x}, \tau_{z\varphi}, \tau_{xz}$
- 3 de desplazamientos: u, v, w .
- Todas son funciones escalares de punto del tipo $f(x, \varphi, z)$
- Según el Teorema de Cauchy:

$$\tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} \tag{9}$$

$$\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} \tag{10}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{11}$$

Por lo que resultan en definitiva 15 incógnitas.

Las Ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad

En total son 15 ecuaciones:

- 3 Ecuaciones Diferenciales de Equilibrio Interno

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + R_x = 0 \quad [12]$$

$$\frac{\partial \tau_{\varphi x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + R_\varphi = 0 \quad [13]$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + R_z = 0 \quad [14]$$

- 6 Relaciones Cinemáticas Lineales

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \epsilon_\varphi = \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad [15]$$

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}; \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad [16]$$

- 6 Ecuaciones por Ley de Hooke Generalizada

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\varphi \\ \epsilon_z \\ \gamma_{x\varphi} \\ \gamma_{\varphi z} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \\ \tau_{x\varphi} \\ \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad [17]$$

- Adicionalmente se dispone de:

Las ecuaciones de equilibrio en la superficie libre del cuerpo

Las ecuaciones de compatibilidad

- Las constantes mecánicas del material *isótropo* y *homogéneo*

E = Módulo de Young

ν = Módulo de Poisson

Contemplando ahora, la simetría del problema para una cáscara cilíndrica y con referencia a la Figura 3.37, resulta:

$$\sigma_z \cong 0 \quad [18]$$

(Simplificación por cargas en superficie)

Resulta:

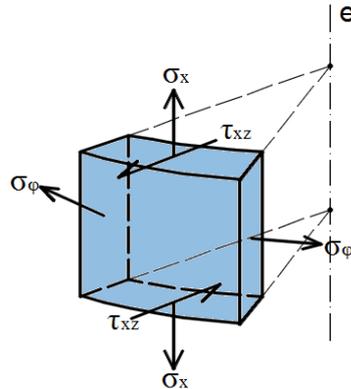


Figura 3.38 – Elemento diferencial de cáscara cilíndrica.

Si se plantea la LEY DE HOOKE y las RELACIONES CINEMÁTICAS para obtener los esfuerzos T_x , T_ϕ , M_x , M_ϕ en términos de los desplazamientos y sus derivadas, se obtiene:

LEY DE HOOKE (a través de la expresión [17])

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \sigma_\phi) \quad [19]$$

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\phi - \nu \sigma_x) \quad [20]$$

Entonces, despejando las tensiones σ :

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_\phi) \quad [21]$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\nu \cdot \epsilon_x + \epsilon_\phi) \quad [22]$$

Ahora, expresándolas matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\phi \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\phi \end{Bmatrix} \quad [23]$$

RELACIONES CINEMÁTICAS (Según Figura 3.37)

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = u'_0 - z \cdot w(x)'' \quad [24]$$

(Alargamiento específico longitudinal)

$$\epsilon_\phi = \frac{w(x)}{r} = \frac{w(x)}{R + z} \simeq \frac{w(x)}{R} \quad [25]$$

(Alargamiento específico de un paralelo o alargamiento específico diametral)

Pues: $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ y $h \ll R$ (cáscaras de pequeño espesor)

Mediante las relaciones cinemáticas, se obtienen las expresiones de σ_x y σ_φ en función de \mathbf{u} y \mathbf{w} .

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[(u'_0 - z \cdot w(x)'') + \nu \cdot \frac{w(x)}{R} \right] \quad [26]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[\nu \cdot (u'_0 - z \cdot w(x)'') + \frac{w(x)}{R} \right] \quad [27]$$

Con estas expresiones pueden obtenerse los **ESFUERZOS** en **FUNCIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS**:

$$Tx = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dz = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \cdot \left(u'_0 + \nu \cdot \frac{w(x)}{R} \right) \quad [28]$$

$$T\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi \cdot dz = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \cdot \left(\nu \cdot u'_0 + \frac{w(x)}{R} \right) \quad [29]$$

$$Mx = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = -D \cdot w(x)'' \quad [30]$$

$$M\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi \cdot z \cdot dz = -D \cdot \nu \cdot w(x)'' \quad [31]$$

Con:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \quad [32]$$

(Término que representa la rigidez flexional de una placa)

Por otra parte, se había planteado la hipótesis de que el cilindro es *libremente dilatable*, entonces no habrá reacción en el extremo libre del cilindro por lo que: $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Entonces:

$$\frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \cdot \left(u'_0 + \nu \cdot \frac{w(x)}{R} \right) = 0 \quad [33]$$

Pero:

$$\frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \neq 0$$

Entonces:

$$u'_0 + \nu \cdot \frac{w(x)}{R} = 0$$

$$u'_0 = -\nu \cdot \frac{w(x)}{R} \quad [34]$$

Reemplazando u'_0 en $T\varphi$ queda:

$$T\varphi = E \cdot h \cdot \frac{w(x)}{R} \quad [35]$$

M_x y M_φ no cambian:

$$M_x = -D \cdot w(x)''$$

$$M_\varphi = -D \cdot \nu \cdot w(x)''$$

Ya poseemos las expresiones de T_x , T_φ , M_x , M_φ en función de w y sus derivadas, conocida w , se tiene la solución del problema.

3.2.7 Ecuación diferencial del problema

Para conocer la solución del problema planteamos las *ecuaciones de equilibrio*, y trataremos de obtener la ecuación diferencial gobernante. En la siguiente figura se muestra un elemento diferencial de una cáscara cilíndrica. Aquí, puede concluirse que por simetría, los esfuerzos cortantes de membrana $T_{xy} = T_{yx}$ desaparecen en nuestro caso y que las fuerzas T_φ son constantes a lo largo de la circunferencia. Con respecto a las fuerzas de corte transversales Q_x , también por simetría, puede concluirse que no desaparecen.

Considerando los momentos actuantes en el elemento de la siguiente figura, podemos además concluir por simetría que los momentos torsores $M_{xy} = M_{yx}$ desaparecen y que los momentos flexores M_φ son constantes a lo largo de la circunferencia.

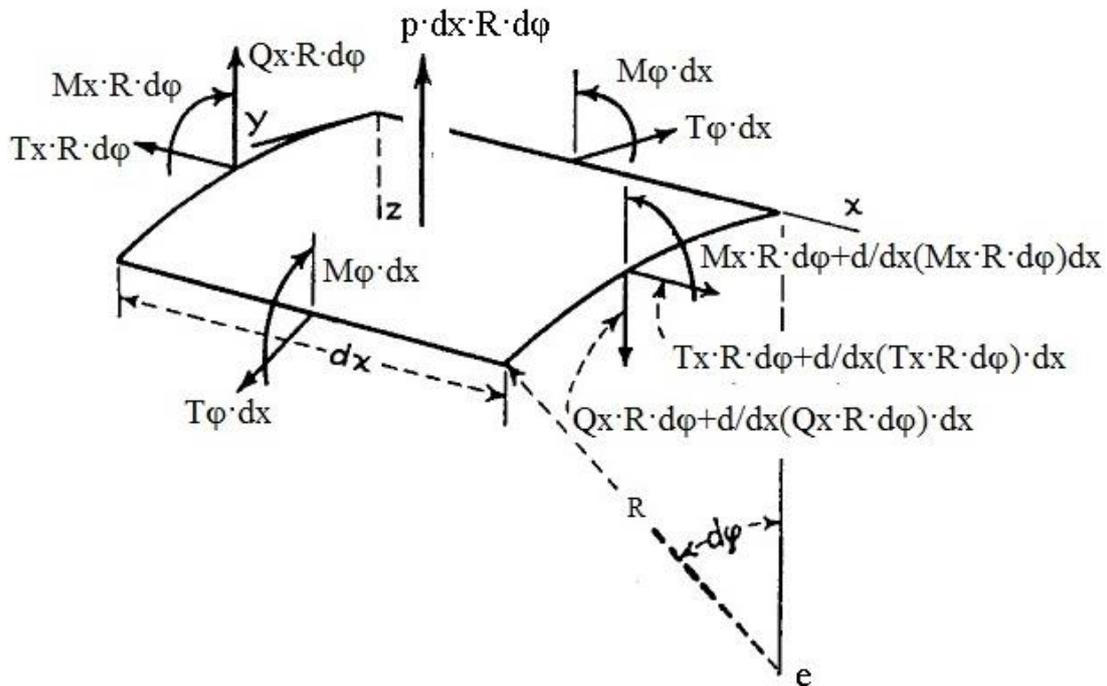


Figura 3.39 – Fuerzas en elemento diferencial de cáscara cilíndrica

Podemos considerar solo tres ecuaciones, aquellas obtenidas por proyección de las fuerzas en los ejes x , z , y la que surge de considerar los momentos de las fuerzas respecto del eje y . Asumiendo que las fuerzas externas consisten solamente en la presión normal a la superficie, las tres ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{dT_x}{dx} \cdot R \cdot dx \cdot d\varphi = 0 \quad [36]$$

$$\frac{dQ_x}{dx} \cdot R \cdot dx \cdot d\varphi + T_\varphi \cdot dx \cdot d\varphi + p \cdot R \cdot dx \cdot d\varphi = 0 \quad [37]$$

$$\frac{dM_x}{dx} \cdot R \cdot dx \cdot d\varphi - Q_x \cdot R \cdot dx \cdot d\varphi = 0 \quad [38]$$

La primera ecuación indica que las fuerzas T_x son constantes¹⁹, se las considera igual a cero inicialmente. Si estas fuerzas son diferentes de cero, la deformación y el esfuerzo correspondiente a tales fuerzas constantes pueden ser fácilmente calculadas y superpuestas con los esfuerzos y deformaciones producidas por carga lateral. Las restantes dos ecuaciones pueden ser escritas en la siguiente forma simplificada al dividir las dos ecuaciones anteriores por $dA = R \cdot dx \cdot d\varphi$:

$$1) \quad \frac{dQ_x}{dx} - \frac{T_\varphi}{R} + p = 0 \quad (\text{proyección sobre } z) \quad [39]$$

$$2) \quad \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \quad [40]$$

Estas dos ecuaciones contienen las incógnitas T_φ, Q_x, M_x . Para resolver el problema, se debe considerar los desplazamientos en los puntos a mitad del espesor de la cáscara.

Si se reemplaza 2) en 1) se tiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{T_\varphi}{R} + p = 0 \quad [41]$$

Si reemplazamos M_x y T_φ y derivamos dos veces los términos correspondientes a M_x (tener en cuenta que w depende de x), se obtiene:

$$w^{IV} + \frac{E \cdot h}{4 \cdot D \cdot R^2} \cdot 4w = \frac{p}{D} \quad [42]$$

Si llamamos:

$$\beta^4 = \frac{E \cdot h}{4 \cdot D \cdot R^2} \quad [43]$$

Resulta entonces:

$$w^{IV} + 4 \cdot \beta^4 \cdot w = \frac{p}{D} \quad [44]$$

Que corresponde a la *ecuación diferencial de cuarto orden del problema, a coeficientes constantes, no homogénea*.

Representa también, la ecuación de una viga de rigidez flexional D , sobre una fundación elástica y sujeta a una carga P_r .

La solución de la ecuación diferencial será de la forma:

$$w(x) = W_{hom}(x) + W_{part}(x) \quad [45]$$

¹⁹ El efecto de estas fuerzas en la flexión es despreciado en esta instancia.

Para $W_{hom}(x)$ (solución homogénea de la ecuación), se tiene que, si se hace cero el término independiente, “no hay presencia de cargas”. La solución homogénea depende sólo de las condiciones de borde.

Para $W_{part}(x)$ (solución particular de la ecuación), se tiene que, como solución particular, se tomará la solución independiente de las condiciones de borde. Para el caso de cargas corresponderá la solución Membranal, para la variación de temperatura, el cilindro libre y lejos de los bordes.

A continuación, se deduce la solución de la parte homogénea en función de las reacciones de vínculo consideradas como fuerzas aplicadas en el borde del cilindro (condiciones de borde):

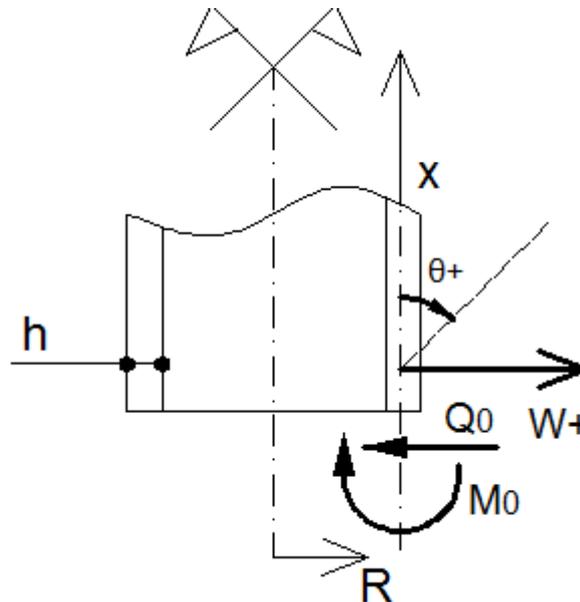


Figura 3.40– Coordenadas $\theta(x)$, $w(x)$ y reacciones Q_0 y M_0 .

La solución de la homogénea para el tipo de ecuación diferencial en cuestión estará dada por:

$$wh = C_1 \cdot (e^{m_1 \cdot x}) + C_2 \cdot (e^{m_2 \cdot x}) + C_3 \cdot (e^{m_3 \cdot x}) + C_4 \cdot (e^{m_4 \cdot x}) \quad [46]$$

En donde: C_1, C_2, C_3, C_4 son constantes y m_1, m_2, m_3, m_4 son las raíces de la siguiente expresión, que representa la ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial.

En correspondencia con el caso donde las soluciones de la ecuación diferencial están dada por raíces complejas conjugadas, se tiene:

$$m^4 + 4 \cdot \beta^4 = 0 \quad [47]$$

Esta ecuación puede ser escrita, por adición y sustracción de $4m^2\beta^2$, como:

$$(m^2 + 2 \cdot \beta^2)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot \beta^2 = 0$$

Luego, despejando el término $m^2 + 2 \cdot \beta^2$:

$$m^2 + 2 \cdot \beta^2 = \pm 2 \cdot m \cdot \beta$$

Despejando m :

$$m = \pm\beta \cdot (1 \pm i)$$

Queda:

$$m_1 = \beta + \beta i$$

$$m_2 = \beta - \beta i$$

$$m_3 = -\beta + \beta i$$

$$m_4 = -\beta - \beta i$$

Reemplazando las raíces m y sacando factor común:

$$wh(x) = e^{\beta x} \cdot (C_1 \cdot e^{i\beta x} + C_2 \cdot e^{-i\beta x}) + e^{-\beta x} \cdot (C_3 \cdot e^{i\beta x} + C_4 \cdot e^{-i\beta x}) \quad [48]$$

Presentando la solución particular w_p , se puede notar que el resultado de la teoría membranal, puede ser considerado como una solución particular de la ecuación general de la teoría de la flexión.

Con respecto a la expresión anterior, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas. Con este objeto se hace uso de la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta \quad [49]$$

Donde θ es un número real, la consecuencia de esta fórmula es que:

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \cdot \sin \beta x$$

$$e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \cdot \sin \beta x$$

Obsérvese que, si primero sumamos y después restamos las dos ecuaciones anteriores, se obtiene respectivamente:

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2 \cdot \cos \beta x \quad [50]$$

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \cdot \sin \beta x \quad [51]$$

Como la expresión:

$$y(x) = e^{\beta x} \cdot (C_1 \cdot e^{i\beta x} + C_2 \cdot e^{-i\beta x}) + e^{-\beta x} \cdot (C_3 \cdot e^{i\beta x} + C_4 \cdot e^{-i\beta x})$$

Es una solución para la parte homogénea para cualquier elección de las constantes C_1, C_2, C_3, C_4 ; en particular si:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$$

$$y(x) = (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \cdot (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})$$

$$(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = \cos \beta x + i \cdot \sin \beta x + \cos \beta x - i \cdot \sin \beta x = 2 \cdot \cos \beta x$$

$$y(x) = (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \cdot 2 \cdot \cos \beta x \quad [52]$$

O si:

$$C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 1, C_4 = -1$$

$$y(x) = (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \cdot (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})$$

$$(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = \cos \beta x + i \cdot \sin \beta x - \cos \beta x + i \cdot \sin \beta x = 2i \cdot \sin \beta x$$

$$y(x) = (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \cdot 2i \cdot \sin \beta x \quad [53]$$

Según el siguiente teorema de ecuaciones diferenciales de orden superior:

Sean y_1, y_2, \dots, y_n soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n , donde x está en un intervalo I . La combinación lineal:

$$y = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x) \quad [54]$$

...en donde las c_i con $i = 1, 2, \dots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución cuando x está en el intervalo.

Del teorema anterior, se tiene el siguiente corolario:

- *Un múltiplo constante, $y = c_1 y_1(x)$, de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.*
- *Una ecuación diferencial lineal homogénea siempre tiene la solución trivial $y = 0$.*

Según dicho corolario, los resultados anteriores, demuestran que las funciones reales $e^{\pm\beta x} \cdot (2 \cdot \cos \beta x)$ y $e^{\pm\beta x} \cdot (2i \cdot \sin \beta x)$, son soluciones de la parte homogénea de la ecuación diferencial. Además, esas soluciones forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$, por lo tanto, la solución general es:

$$w(x) = e^{\beta \cdot x} \cdot (c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot \sin \beta x) + e^{-\beta \cdot x} \cdot (c_3 \cdot \cos \beta x + c_4 \cdot \sin \beta x) + f(x) \quad [55]$$

Donde c_1, c_2, c_3, c_4 son constantes arbitrarias de integración, a determinarse sobre la base de las condiciones apropiadas de contorno²⁰, y $f(x)$ es la solución particular.

Si se toma, por ejemplo, un cilindro circular largo sometido a la acción de momentos flectores M_0 y a esfuerzos de corte Q_0 , ambos uniformemente distribuidos a lo largo del borde en $x = 0$ (Figura 3.41). En este caso, en correspondencia con la solución homogénea, no hay presencia de cargas por lo que no hay presión distribuida Z sobre la superficie del cilindro y el término particular $f(x)$ es igual a cero en la solución general. Como las fuerzas aplicadas en el extremo $x = 0$ producen una flexión local la cual se amortigua y disminuye rápidamente con el incremento de x a partir del extremo cargado $x = 0$, puede concluirse que el primer término de la ecuación diferencial desaparece. Por lo tanto, $c_1 = c_2 = 0$. Debe observarse el hecho de que el sistema de fuerzas aplicado en el extremo del cilindro es un sistema de fuerzas equilibrado y que la longitud del cilindro puede incrementarse como se quiera. Esto forma parte del principio de Saint Venant. Este principio establece que, si las fuerzas que actúan sobre una pequeña parte de la superficie del cuerpo elástico, se sustituyen por otro sistema estáticamente equivalente de fuerzas que actúan sobre la misma porción de la superficie, esta redistribución de la carga produce cambios sustanciales en las tensiones a nivel local, pero tiene un efecto insignificante sobre las tensiones en las distancias que son grandes en comparación con las dimensiones lineales de la

²⁰ Notar que las constantes c_1, c_2, c_3, c_4 son nuevas constantes en reemplazo de C_1, C_2, C_3, C_4 como consecuencia de trabajar la forma de expresar las ecuaciones.

superficie en la que se cambian las fuerzas. En el caso en cuestión del cilindro circular, con los momentos flectores y esfuerzos de corte en el borde, las dimensiones de la sección transversal son pequeñas en comparación con la longitud del cilindro, de manera que la aplicación de estos esfuerzos externos M_0 y Q_0 afecta la distribución de tensiones sólo en las cercanías del borde en el que se aplican, sin generar consecuencias para secciones transversales distantes.

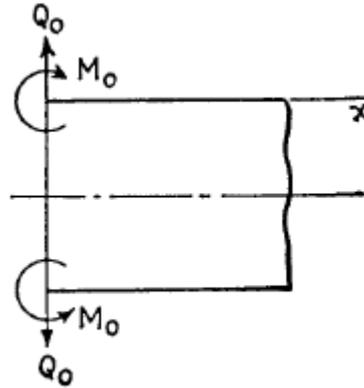


Figura 3.41 – Cilindro circular largo con solicitaciones por reacciones de vínculo.

Luego de esta consideración, se obtiene la siguiente ecuación homogénea:

$$wh(x) = e^{-\beta \cdot x} \cdot (c_3 \cdot \cos \beta x + c_4 \cdot \sin \beta x) \quad [56]$$

Las dos constantes c_3 y c_4 pueden ser determinadas a partir de las condiciones de borde:

$$(M_x)_{x=0} = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0 \quad [57]$$

$$(Q_x)_{x=0} = \left(-\frac{dM_x}{dx} \right)_{x=0} = -D \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0} = Q_0 \quad [58]$$

Sustituyendo la expresión de w en la expresión anterior y derivando, pueden obtenerse las condiciones de borde:

$$c_3 = -\frac{1}{2\beta^3 D} (Q_0 + \beta M_0) \quad [59]$$

$$c_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D} \quad [60]$$

Por lo que la expresión final para la parte homogénea de la ecuación general de w en función de las reacciones de vínculo consideradas como fuerzas aplicadas en el borde del cilindro es:

$$wh(x) = \frac{e^{-\beta \cdot x}}{2 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot \{ \beta \cdot M_0 \cdot [(\text{sen}(\beta \cdot x) - \text{cos}(\beta \cdot x))] - Q_0 \cdot \text{cos}(\beta \cdot x) \} \quad [61]$$

$$\theta h(x) = \frac{d}{dx} wh(x) \quad [62]$$

Pero, anteriormente hemos deducido la expresión de los esfuerzos en términos de w y sus derivadas. Entonces, resulta:

$$Mx(x) = \frac{e^{-\beta \cdot x}}{\beta} \cdot \{\beta \cdot M_0 \cdot [\text{sen}(\beta \cdot x) + \text{cos}(\beta \cdot x)] + Q_0 \cdot \text{sen}(\beta \cdot x)\} \quad [63]$$

$$Qx(x) = e^{-\beta \cdot x} \cdot \{-2 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot \text{sen}(\beta \cdot x) + Q_0 \cdot [\text{cos}(\beta \cdot x) - \text{sen}(\beta \cdot x)]\} \quad [64]$$

$$M\varphi(x) = \nu \cdot Mx(x) \quad [65]$$

$$T\varphi(x) = E \cdot h \cdot \frac{w(x)}{R} \quad [66]$$

3.2.8 Obtención de las incógnitas Q_0 y M_0

El apartamiento de la solución membranal, según lo especificado en la Figura 3.22, se debe a las condiciones de vínculo. En este tipo de problema, lo que se buscará obtener, serán las reacciones Q_0 y M_0 . Dado que se estará ante un *sistema hiperestático*, dichas magnitudes se obtendrán con el método de la fuerza.

Mediante la aplicación de dicho método se tiene:

Sistema Fundamental (sistema 0): se separa la cáscara del vínculo, entonces aparecen las incógnitas Q_0 y M_0 .

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [67]$$

Incógnitas

$$\begin{aligned} x_1 &= Q_0 \\ x_2 &= M_0 \end{aligned} \quad [68]$$

Términos independientes

$$a_{10} = -w_0 \text{ (desplazamiento debido a las cargas en el sistema fundamental)}$$

El sistema fundamental (sistema 0) solicitado por las cargas corresponde a la *solución membranal*:

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{h} \cdot (T_\varphi - \nu \cdot T_x) \quad [69]$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E \cdot h} \cdot (T_\varphi - \nu \cdot T_x) \quad [70]$$

$$w = \varepsilon_\varphi \cdot R = \frac{R}{E \cdot h} \cdot (T_\varphi - \nu \cdot T_x) \quad [71]$$

$$w_0 = \varepsilon_{\varphi_0} \cdot R = \frac{R}{E \cdot h} \cdot (T_{\varphi_0} - \nu \cdot T_{x_0}) \quad [72]$$

$$a_{20} = \theta_0 \text{ (giro debido a las cargas en el sistema fundamental)}$$

De la misma manera que para el término anterior, corresponde la solución membranal:

...en $x = 0$, $\theta \rightarrow \theta_0$

*Flexibilidades*²¹

a_{11} , a_{12} son los desplazamientos y a_{22} , a_{21} los giros en el sistema fundamental debido al valor unitario de las incógnitas Q_0 y M_0 .

La expresión general de $w(x)$ donde aparecen Q_0 y M_0 , indican los desplazamientos para fuerza y momento en el borde. Si derivamos dicha expresión, tendremos también los giros θ_x .

Tomando los siguientes valores si $X = 0$:

$$Q_0 = 1, M_0 = 0 \text{ (Sistema 1)}$$

ó

$$Q_0 = 0, M_0 = 1 \text{ (Sistema 2)}$$

Se obtiene:

$$w_Q = -\frac{1}{2 \cdot \beta^3 \cdot D}$$

$$\theta_Q = \frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D}$$

$$w_M = -\frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D}$$

$$\theta_M = \frac{1}{\beta \cdot D}$$

En forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cc} w_Q = -\frac{1}{2 \cdot \beta^3 \cdot D} & w_M = -\frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} \\ \theta_Q = \frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} & \theta_M = \frac{1}{\beta \cdot D} \end{array} \right] \quad [73]$$

Esta es la matriz de flexibilidades del método de la fuerza para resolución de estructuras hiperestáticas.

Los elementos de la matriz corresponden a los desplazamientos y los giros para valores unitarios de Q_0 y M_0 . Pero hay ciertas incoherencias aparentes, las cuales son:

- Las flexibilidades cruzadas son distintas
- Una de las flexibilidades directas es negativa

La aparente incoherencia se resuelve teniendo en cuenta que:

- La fórmula de $W(Q_0, M_0)$, corresponde a la *convención*:

²¹ FLEXIBILIDAD: Efecto cinemático debido a una causa estática unitaria y positiva.

RIGIDEZ: Efecto estático debido a una causa cinemática unitaria y positiva.

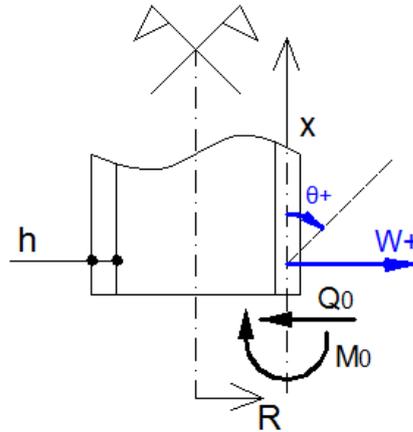


Figura 3.42 – Convención original

Nota: El término de θ_0 es *negativo*

En cambio, en el *método de la fuerza*:

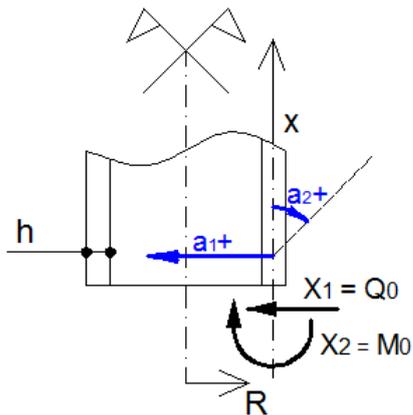


Figura 3.43 – Convención Método de la Fuerza

Nota: Las direcciones de a_1 y x_1 *coinciden siempre*.

Por lo que los términos correspondientes a los desplazamientos, deben contemplarse con signo opuesto. Esto iguala las flexibilidades cruzadas y hace positiva la flexibilidad directa que antes era negativa.

Por lo tanto:

$$a_{11} = -\bar{w}_Q$$

$$a_{12} = -\bar{w}_M$$

$$a_{22} = \bar{\theta}_M$$

$$a_{21} = \bar{\theta}_Q$$

Entonces, ahora:

$$a_{11} = + \frac{1}{2 \cdot \beta^3 \cdot D} \quad [74]$$

$$a_{12} = a_{21} \quad [75]$$

$$a_{22} = \frac{1}{\beta \cdot D} \quad [76]$$

3.2.9 Resumen de pasos

Resumen de pasos para resolución de problemas con esfuerzos flexionales por perturbaciones de borde debidas a vínculos externos no compatibles con la Teoría Membranal.

- a) Solución *Membranal* sin considerar vínculos aplicada al caso de cáscara cilíndrica circular, se obtiene: \mathbf{T}_φ , \mathbf{T}_x , $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$

Ecuaciones de equilibrio ([7], [8]) para el caso general de cáscaras con simetría de revolución.

$$\frac{T_\xi}{R\xi} + \frac{T_\varphi}{R\varphi} = Pn$$

$$T_\xi = - \frac{Pe}{2 \cdot \pi \cdot R_0 \cdot \sin(\xi)}$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores y de la consideración de las características geométricas de una cáscara cilíndrica, se tiene que; por un lado, el primer término de la primera ecuación de equilibrio [7] se cancela debido a que, por tratarse de una cáscara cilíndrica, el centro de curvatura de la misma, considerándola longitudinalmente, se encuentra en el impropio, por lo que el radio de curvatura principal tiende a infinito. Por otro lado, en [8] el ángulo ξ vale $\pi/2$, por lo que el seno del mismo vale 1. Por último, los radios R_0 y R_φ coinciden y su valor es el radio de la cáscara cilíndrica. Teniendo en cuenta esto, y pasando de las coordenadas curvilíneas como caso general, a las coordenadas cilíndricas del caso particular analizado, se obtiene:

$$\frac{T_\varphi}{R} = Pn(x)$$

$$T_\varphi(x)^M = Pn(x) \cdot R \quad [77]$$

$$T_x(x)^M = - \frac{Pe(x)}{2 \cdot \pi \cdot R} \quad [78]$$

$$w(x)^M = \varepsilon_\varphi \cdot R = \frac{(T_\varphi - \nu \cdot T_x)}{E \cdot h} \cdot R \quad [79]$$

$$\theta(x)^M = \frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{(T_\varphi - \nu \cdot T_x)}{E \cdot h} \cdot R \quad [80]$$

- b) Cálculo de desplazamiento y giro en el borde según teoría membranal, se obtiene: w_0 , θ_0

$$w_{x=0} = \left[\frac{(T_\varphi - \nu \cdot T_x)}{E \cdot h} \cdot R \right]_{x=0} \quad [81]$$

$$\theta_{x=0} = \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{(T_\varphi - v \cdot T_x)}{E \cdot h} \cdot R \right]_{x=0} \quad [82]$$

Obs.: Para el estado membranal, que se esté en $x=0$, se ve reflejado por el valor de la carga en $x=0$.

- c) Resolución del sistema hiperestático por el *Método de las Fuerzas*. Ecuación de compatibilidad $w_0^H, \theta_0^H = 0$. Se obtiene: Q_0, M_0

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot \beta^3 \cdot D} & \frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} \\ \frac{1}{2 \cdot \beta^2 \cdot D} & \frac{1}{\beta \cdot D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{x=0} \\ \theta_{x=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [83]$$

- d) Cálculo de Esfuerzos Flexionales por Q_0, M_0 para cada valor de x . Se obtiene: $w(x), M_x(x), Q_x(x), M_\varphi(x), T_\varphi(x)$

$$wh(x) = \frac{e^{-\beta \cdot x}}{2 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot \{ \beta \cdot M_0 \cdot [(\text{sen}(\beta \cdot x) - \text{cos}(\beta \cdot x))] - Q_0 \cdot \text{cos}(\beta \cdot x) \}$$

$$Mxh(x) = \frac{e^{-\beta \cdot x}}{\beta} \cdot \{ \beta \cdot M_0 \cdot [(\text{sen}(\beta \cdot x) + \text{cos}(\beta \cdot x))] + Q_0 \cdot \text{sen}(\beta \cdot x) \}$$

$$Qxh(x) = e^{-\beta \cdot x} \cdot \{ -2 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot \text{sen}(\beta \cdot x) + Q_0 \cdot [\text{cos}(\beta \cdot x) - \text{sen}(\beta \cdot x)] \}$$

$$M\varphi h(x) = v \cdot Mx(x) T\varphi h(x) = E \cdot h \cdot \frac{w(x)}{R}$$

- e) Solución final: a) + d)

$$w(x) = \frac{e^{-\beta \cdot x}}{2 \cdot \beta^3 \cdot D} \cdot \{ \beta \cdot M_0 \cdot [(\text{sen}(\beta \cdot x) - \text{cos}(\beta \cdot x))] - Q_0 \cdot \text{cos}(\beta \cdot x) \} + \frac{(T_\varphi - v \cdot T_x)}{E \cdot h} \cdot R \quad [84]$$

$$Mx(x) = \frac{e^{-\beta \cdot x}}{\beta} \cdot \{ \beta \cdot M_0 \cdot [(\text{sen}(\beta \cdot x) + \text{cos}(\beta \cdot x))] + Q_0 \cdot \text{sen}(\beta \cdot x) \}$$

$$Qx(x) = e^{-\beta \cdot x} \cdot \{ -2 \cdot \beta \cdot M_0 \cdot \text{sen}(\beta \cdot x) + Q_0 \cdot [\text{cos}(\beta \cdot x) - \text{sen}(\beta \cdot x)] \}$$

$$M\varphi(x) = v \cdot Mx(x)$$

$$T\varphi(x) = E \cdot h \cdot \frac{w}{R} + Pn(x) \cdot R \quad [85]$$

$$Tx(x) = -\frac{Pe(x)}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

Con:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad ; \quad \beta^4 = \frac{E \cdot h}{4 \cdot D \cdot R^2}$$

3 PROYECTO DE SILOS DE HORMIGÓN ARMADO

3.3.1 Clasificación de los silos

Los silos se clasifican en dos grandes categorías los silos agrícolas y los industriales.

Silos Agrícolas

Estos silos están destinados a almacenar cereales. Dentro de ellos, tenemos los:

Silos de chacra. Gran número de productores están hoy en día equipados con uno o más silos para almacenar cereales, suprimiendo las bolsas cuyo costo llegó a ser prohibitivo. Estos silos pueden ser de distinto tipo. Puede ser de tipo **exterior**, comprendiendo una o varias celdas de 50 a 100 t, con su propio techo, generalmente lindante con un granero o un galpón. Estos silos son a veces de hormigón armado, muy frecuentemente metálicos. También, se encuentran los de tipo **interior**, es decir, al abrigo dentro de un galpón y equipándolo con celdas de 15 a 50 t, de material metálico, laminares, de madera o de otro material apropiado.

Silos de Cooperativas. Su capacidad varía de una instalación a otra y de acuerdo a las regiones, de 1.000 a 10.000 t, a veces mayores. Estos silos son indistintamente de hormigón armado o de chapa de acero. La elección del material está frecuentemente hecha en consideración del costo (las contingencias locales pueden favorecer un material respecto de otros) o por simple preferencia de los usuarios: los unos exigen celdas en hormigón armado que no necesitan ningún mantenimiento exterior (pero que deben estar equipados de aparatos que aseguran la ventilación artificial del grano), los otros prefieren celdas en chapa maciza de acero que debe ser regularmente repintada, pero que permite el almacenamiento en atmósfera confinada, y otros aún, que buscan, ya sea celdas laminares que deben estar igualmente cuidadas, pero que permiten una gran aireación material y artificial del grano, o ya sea, ciertos usuarios que acopian los cereales corrientes en silos de madera.

Las celdas de estos silos son, en general, de capacidad unitaria media, del orden de 80 a 1.000 t, pero cada instalación contiene celdas de menor capacidad unitaria, necesarias para almacenar cereales secundarios, como en los silos portuarios.

Silos portuarios. Su capacidad es generalmente superior a 5.000 t y supera gradualmente 10.000 a 20.000 t, para alcanzar incluso a 50.000 t o más.

Son generalmente de hormigón armado y raramente metálicos, en razón de la agresividad de la atmósfera marina que necesita un mantenimiento muy cuidadoso de las chapas.

Las celdas de estos silos son de gran capacidad unitaria, del orden de 400 a 1.000 t, a fin de almacenar cantidades masivas de cereales importados o exportados. Además, cada silo contiene en la mayoría de los casos, celdas de pequeña capacidad, que permiten el almacenamiento de cereales secundarios, tales como colza, cebada, etc.

Silos Industriales

Estos silos son de hormigón armado y metálicos. Deben ser particularmente robustos. En efecto, pueden ocurrir los hundimientos de bóvedas que se producen en la masa ensilada.

Estas bóvedas se formaban en la masa de cereales ensilados, pero esto era debido a la fermentación de los granos que se aglomeraban entre sí. La fermentación de cereales está actualmente combatida con éxito, gracias a la detección de calentamientos permisibles por las sondas eléctricas o los termómetros electrónicos y por la ventilación acertadamente garantizada de la masa ensilada.

Materiales como el coque, el carbón, la cal, cemento y fosfato no exigen las mismas precauciones, sin embargo, se forman bóvedas frecuentemente en las capas inferiores de la masa ensilada, bajo la presión transmitida por las capas superiores que las comprimen y aglomeran.

En algunos silos para carbón, a fin de permitir el escurrimiento de la masa ensilada, no se considera suficiente aislar el revestimiento interior y se vitrifican las paredes de las celdas, empotrando sobre las mismas, placas de vidrio.

Los silos inclinados son particularmente muy convenientes para el almacenamiento de productos industriales.

3.3.2 Composición y comportamiento estructural de un silo y sus componentes

A continuación, se mencionarán los elementos más comunes que forman parte de un silo de hormigón armado y se describirá *conceptualmente* el funcionamiento estructural de los mismos.

Elementos constitutivos

El tipo de silo tratado en el presente Trabajo, corresponde a uno compuesto por los siguientes elementos en particular:

- Cilindro: Es una cáscara cilíndrica que constituye el elemento contenedor del material ensilado.
- Tolva troncocónica: Es también una cáscara, pero con forma troncocónica invertida (cono truncado). Constituye el elemento que permite la descarga del material ensilado. Existen, como se verá más adelante, diferentes configuraciones de tolvas en cuanto a la posición del punto teórico de descarga de material con respecto a la geometría en planta del silo.
- Anillo: Es básicamente una viga de eje curvo. Constituye el elemento de transición o vínculo, entre el cilindro y la tolva.

Además, el silo deberá contar con estructuras soporte que pueden ser columnas, o bien muros circulares continuos. Sobre estas estructuras apoyará el silo a través del anillo.

Análisis estructural

Cilindro, tolva y anillo, tendrán un funcionamiento estructural en conjunto.

El desarrollo matemático correspondiente a la teoría de cáscaras expuesto en este Trabajo, vale, tal como fue comentado, para el caso de cáscaras cilíndricas, en donde la simetría de revolución permite simplificar de manera considerable el análisis de este tipo de estructuras.

Por tal motivo, dicho desarrollo matemático, aplica directamente al componente cilindro.

En el caso de la tolva, si bien su forma difiere de la del cilindro, puede ser contemplada bajo la teoría de cáscaras desarrollada para el caso cilíndrico, bajo la consideración de que, en lugar de tener radio constante (caso estudiado), en el caso de la tolva el radio será variable en el sentido del eje. Vale aclarar que esta aproximación será más o menos precisa, en función de la pendiente de la tolva. Cuanto más importante sea dicha pendiente, la similitud entre comportamiento de cilindro y tolva aumentará.

La aplicación al cálculo de un silo de hormigón armado del desarrollo matemático expuesto consistirá entonces en obtener las expresiones finales del punto 3.2.9 adaptadas al comportamiento estructural en conjunto entre los tres componentes del silo.

El desarrollo matemático de cáscaras desarrollado hasta el punto 3.2.7 inclusive, es análogo entre el cilindro y la tolva, con la salvedad de que, para esta última, el radio ya no es constante, sino que es función de la variable x .

Las diferencias aparecen en el punto 3.2.8, en donde, la aplicación del método de la fuerza, ya no es simplemente a un cilindro vinculado en su base, sino, a un cilindro, vinculado a un tronco de cono mediante un anillo. En este nuevo caso, en lugar de tener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, tendremos, uno de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. La situación es la siguiente:

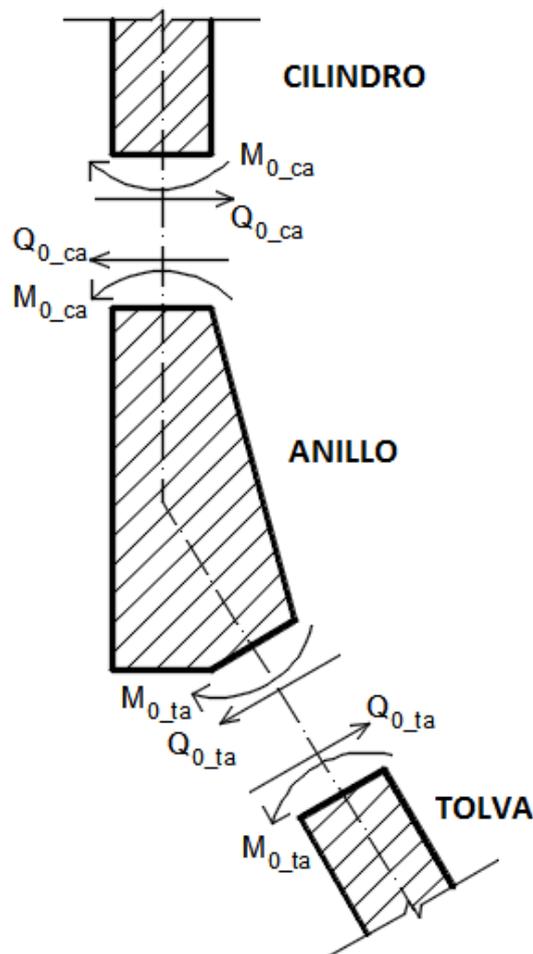


Figura 3.44 – Despiece estructural cilindro-anillo-tolva

Nomenclatura:

Q_{0_ca} : Corte Cilindro-Anillo;

M_{0_ca} : Momento Cilindro-Anillo;

Q_{0_ta} : Corte Tolva- Anillo;

M_{0_ta} : Momento Tolva- Anillo;

La expresión de aplicación del método de la fuerza para la determinación de las incógnitas Q_{0_ca} , M_{0_ca} , Q_{0_ta} , M_{0_ta} es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [86]$$

Donde:

$$\begin{aligned} x_1 &= Q_{0_ca} \\ x_2 &= M_{0_ca} \\ x_3 &= Q_{0_ta} \\ x_4 &= M_{0_ta} \end{aligned} \quad [87]$$

Son las incógnitas estáticas y,

a_{10} , a_{30} : desplazamientos debido a las cargas en el sistema fundamental.

a_{20} , a_{40} : giros debido a las cargas en el sistema fundamental.

Recordatorio de nomenclatura de los elementos de la matriz de flexibilidades:

a_{ij} : desplazamiento o giro asociado a la incógnita estática "i" debido a un valor unitario y positivo de la incógnita estática "j".

Los elementos de la matriz de flexibilidades constituirán desplazamientos relativos y giros relativos, en donde cada uno estará compuesto por sumas de desplazamientos absolutos y giros absolutos entre cilindro-anillo, y tolva-anillo. Los valores de los giros y desplazamientos ante cargas distribuidas de momento y corte para el elemento estructural anillo, es un problema estudiado en el ámbito de la estabilidad, por lo que se dispone de la solución de este problema.

$$\begin{bmatrix} a_{11c} + a_{11a} & a_{12c} + a_{12a} & a_{13c} + a_{13a} & a_{14c} + a_{14a} \\ a_{21c} + a_{21a} & a_{22c} + a_{22a} & a_{23c} + a_{23a} & a_{24c} + a_{24a} \\ a_{31a} + a_{31t} & a_{32a} + a_{32t} & a_{33a} + a_{33t} & a_{34a} + a_{34t} \\ a_{41a} + a_{41t} & a_{42a} + a_{42t} & a_{43a} + a_{43t} & a_{44a} + a_{44t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{0_ca} \\ M_{0_ca} \\ Q_{0_ta} \\ M_{0_ta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{0_ca} \\ \theta_{0_ca} \\ w_{0_ta} \\ \theta_{0_ta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [88]$$

Dada la característica estructural del problema en cuestión, algunos componentes *absolutos* de la matriz de flexibilidades tendrán valores nulos debido a que los desplazamientos y giros a un lado del anillo para cierto elemento (cilindro, tolva), no se ven afectados por la acción de las incógnitas estáticas del otro lado del anillo, dado que están desvinculados en el análisis presente. Resultando así:

$$\begin{bmatrix} a_{11c} + a_{11a} & a_{12c} + a_{12a} & 0 + a_{13a} & 0 + a_{14a} \\ a_{21c} + a_{21a} & a_{22c} + a_{22a} & 0 + a_{23a} & 0 + a_{24a} \\ a_{31a} + 0 & a_{32a} + 0 & a_{33a} + a_{33t} & a_{34a} + a_{34t} \\ a_{41a} + 0 & a_{42a} + 0 & a_{43a} + a_{43t} & a_{44a} + a_{44t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{0_ca} \\ M_{0_ca} \\ Q_{0_ta} \\ M_{0_ta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{0_ca} \\ \theta_{0_ca} \\ w_{0_ta} \\ \theta_{0_ta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [89]$$

Los desplazamientos y giros *absolutos* (de cada elemento), sea cilindro, anillo o tolva, dependerán de las rigideces *relativas* entre cilindro-anillo y anillo-tolva. Como se comentó anteriormente, la suma de dichos términos absolutos, constituirán los términos *relativos*.

3.3.3 Características del material ensilado

Los granos y los cereales que habitualmente se almacenan en silos, constituyen un medio pulverulento o pseudo-sólido sin cohesión, cuyas leyes de equilibrio están todavía mal definidas y para las cuales se ha buscado una solución exacta en la teoría del equilibrio de un medio elástico, homogéneo, isótropo e indefinido, extendido a un medio pulverulento por una trasposición apoyada en observaciones experimentales. Lamentablemente, ninguna de estas hipótesis concierne al medio pulverulento.

Además, esta transposición no toma en cuenta la mayoría de otro gran número de factores por considerar.

En efecto, para el equilibrio de una masa pulverulenta ensilada, aparecen, el factor tiempo, la velocidad de llenado, la forma en que los granos son acopiados, la altura de caída de los granos para el llenado de los silos, y la compresibilidad del material, que tienen una gran importancia, pues influyen sobre las características principales del medio pulverulento: *densidad aparente, ángulo de frotamiento interno, y coeficiente de frotamiento sobre las paredes*.

El problema expuesto por el equilibrio de una masa pulverulenta ensilada es, por lo tanto, de lo más complejo; *escapa a la teoría de la elasticidad* y no ha estado jamás completamente resuelto. Además, ante la casi imposibilidad de determinar directamente los empujes que se ejercen sobre las paredes, *hemos sido conducidos a estudiar los resultados experimentales integrados de los frotamientos de los granos sobre las paredes y a representarlos matemáticamente por una función que permita relacionar el conjunto de los fenómenos observados*, luego a deducir por derivación, el valor de los empujes sobre las paredes.

Las investigaciones suelen ser dirigidas sobre la determinación de la presión total sobre el fondo de los silos, puesto que, por diferencia con el peso conocido de la materia ensilada, esta presión da el valor de la *carga equilibrada por el frotamiento de los granos sobre las paredes*.

Para que los ensayos realizados sobre el material ensilado sean comparables entre sí y susceptibles de una interpretación suficientemente precisa, debe operarse siempre en las mismas condiciones de experimentación, y, para esto, se debe normalizar el llenado de los silos de ensayo en una velocidad constante con una altura de caída igualmente constante.

El *método de cálculo* que se deduce de los ensayos, resulta, de *la compensación matemática de hechos experimentales observados*, "disciplinando" los granos en el llenado de los silos. Pero en los silos industriales, la velocidad de llenado no es constante y la altura de caída de los granos tampoco, el medio no está "disciplinado" y hay que tenerlo en cuenta, poniendo en las fórmulas obtenidas para el medio disciplinado *los valores límites más desfavorables que pueden alcanzar las características principales de la materia*, precedentemente definidas.

Por otra parte, los valores límites inferiores y superiores de estas características son mal conocidos, pues la mayoría de las informaciones contenidas en los formularios están equivocadas o incompletas.

Esta laguna ha sido satisfecha en parte gracias a investigaciones sobre ciertos materiales que deben ser completadas para otros materiales pulverulentos susceptibles de ser ensilados.

Determinación De Las Principales Características Del Material Ensilado

Para cada material estudiado, se deben determinar las características siguientes:

Densidad

Ésta puede variar sensiblemente sobre la altura del silo, por el simple hecho de la compresión de las capas inferiores por las capas superiores. Esta compresión no es despreciable y, para dar una idea, daremos como ejemplo, el caso de un silo de 6 m de diámetro y 24 m de altura, destinado a almacenar trigo, cuya densidad aparente mínima es de 750 kg/m³. La presión sobre el fondo es aproximadamente de 3.000 kg/m². Hay, por lo tanto, una tensión de 300 g/cm² que experimentan los granos de las capas inferiores, que, al estar comprimidos, van a asentarse más o menos según su contextura. Se ha medido que la densidad de este grano puede entonces aumentar hasta sobrepasar los 800 kg/m³ y aún alcanzar 830 kg/m³.

Es por lo tanto necesario tener en cuenta en los cálculos este aumento de densidad, adoptando un valor medio entre la densidad mínima de las capas superiores y la densidad máxima bajo la tensión representada por la aplicación del peso de las capas superiores.

En el ejemplo mencionado recién, será prudente adoptar una densidad media igual, por lo menos a 800 kg/m³.

Frotamiento Interno

El frotamiento interno se encuentra modificado exactamente por la misma razón referida anteriormente a la densidad.

Es por lo tanto necesario determinar experimentalmente la variación. Pero hay que tener en cuenta, en ciertos casos, la variación debida a aquélla del porcentaje de humedad de la materia ensilada, que influye considerablemente sobre su frotamiento interno propio y su frotamiento físico de cada grano.

Las medidas del frotamiento interno y con los elementos de la pared se pueden realizar con un aparato de corte por torsión de Hvorsley, por aplicación de una carga normal ejercida por una palanca, variable entre 0.110 kg/cm² y 0.861 kg/cm². Al mismo tiempo, el volumen de la muestra aumenta del 3 al 4%. La resistencia al corte disminuye con algunas fluctuaciones procedentes de la dificultad de establecer un régimen permanente de corte.

Por lo tanto, para una misma presión se obtienen dos valores, mínimo y máximo, del frotamiento interno. Estos valores se representan en dos curvas independientes de un mismo gráfico. A continuación, se muestra como ejemplo, el gráfico correspondiente al trigo:

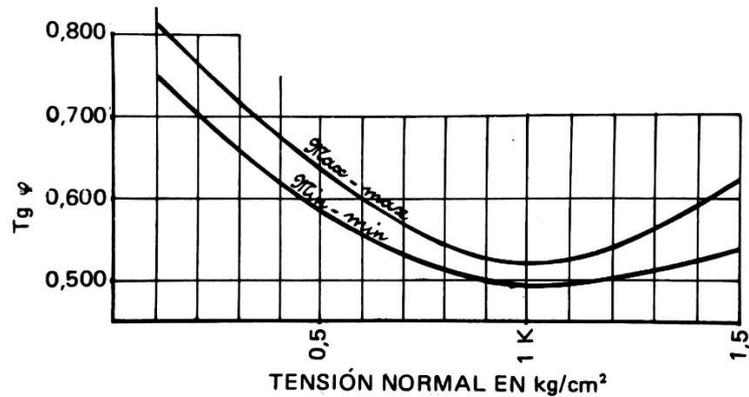


Figura 3.45 – Frotamiento interno en el trigo

Según la naturaleza del grano, las fluctuaciones del frotamiento interno varían en su forma. Cuando se estudian materiales pulverulentos, cuyas partículas son poco compresibles, se comprueba que los parámetros que intervienen son el frotamiento del material constitutivo de los granos, consigo mismo y el entrecruzamiento de los granos, que crece con la compacidad del medio.

En la práctica, este entrecruzamiento se modifica poco a consecuencia de las presiones estáticas, pero es muy sensible a las vibraciones.

En el caso de los cereales, dado su pequeño peso específico, la vibración tiene poco efecto, pero la compresibilidad de los granos es muy importante.

En las semillas oleaginosas interviene un parámetro suplementario que corresponde a la modificación del rozamiento recíproco de las superficies de contacto. En efecto, aún bajo presiones débiles, se desprende un líquido aceitoso que modifica el rozamiento recíproco de los granos. Así pues, los resultados obtenidos por medida directa del rozamiento de los ensayos de corte constituyen un término medio entre la disminución del rozamiento producido por los contactos más o menos lubricados, y el aumento de rozamiento debido a los impactos, a consecuencia de la compresibilidad global de los granos.

Frotamiento Sobre la Pared

Conviene proceder exactamente a la misma investigación que para el frotamiento interno, el frotamiento del material ensilado sobre la pared puede encontrarse modificado por las dos mismas razones: sobrecarga debida a las capas superiores y humedad o sino, simplemente, humidificación. Es oportuno, en efecto, recordar esta noción de la simple humidificación que puede ser provocada por el efecto de condensación sobre la cara interna de las paredes externas. La condensación que humedece localmente el material ensilado, arriesga a provocar la fermentación y la formación de placas.

Observación importante

Las variaciones de las características físicas de los productos ensilados tienen una incidencia *muy importante* sobre los cálculos de los esfuerzos engendrados por los mismos.

Es importante, pues, que los contratos suscritos entre acopiadores y los constructores fijen de una forma precisa estas características extremas (mínimas y máximas), a fin de que la construcción de los silos sea reglamentariamente suficiente para equilibrar los esfuerzos máximos cuya determinación evidentemente depende directamente de estas características.

Está claro que estas precisiones asegurarán a los acopiadores el tener los silos convenientes y a los constructores el no haber tomado los esfuerzos por defectos de minoración. Así muchas contrariedades y juicios serán evitados.

Esta determinación de las características del producto ensilado es fácil de hacer antes del pedido de los silos, por simple envío, por parte del futuro acopiador, de una muestra del producto a un laboratorio especializado. El acopiador puede, por otra parte, encargar esta investigación al constructor que ha elegido, el constructor podrá entonces transmitir a su cliente los resultados obtenidos, a fin de que las bases contractuales para el cálculo sean bien fijadas y respetadas entre ellos.

3.3.4 Cargas en silos

Pesos propios

Aquí se consideran los pesos propios del cilindro, anillo, tolva, losa de tapa, elementos de soporte, equipos de operación del silo y elementos de medición.

Acciones del material ensilado

El estudio de las presiones laterales y sobre el fondo, que aparecen en las paredes de los silos, es un tema que en el siglo XX se ha desarrollado considerablemente. Durante los últimos años del siglo XIX, se plasmaron las primeras teorías sobre presiones en silos y a lo largo del siglo pasado se han ampliado y mejorado.

En los últimos años del siglo pasado, se ha estudiado y experimentado mucho más sobre este tema que en los 90 años anteriores al mismo.

La causa de esta investigación han sido los serios problemas surgidos en infinidad de silos y prácticamente en todos los países del mundo. La mayoría de los silos presentaron problemas de deformaciones, grietas y roturas de paredes, por no ser tenidas en cuenta las sobrepresiones que aparecen durante el *vaciado de la masa ensilada*.

Las *presiones laterales* aparecidas en el almacenamiento de productos granulares varía dentro de límites muy amplios.

Igualmente, las *presiones sobre el fondo*, así como la *caída de bóvedas o arcos*, producen serios problemas en las tolvas y fondos.

Por último, el *rozamiento entre el grano y la pared de los silos*, producía fuertes esfuerzos de compresión sobre la misma, que, al no ser tenidos en cuenta, causaron serios problemas e incluso hundimientos en muchas instalaciones.

Componentes de empuje

Cuando se vierte una materia pulverulenta sobre un plano, esta se amontona en un volumen de forma cónica cuyas generatrices forman con la horizontal un ángulo Φ

determinado; este ángulo, propio a cada material, se llama *ángulo del talud natural de la materia*. Es el ángulo de frotamiento interno mínimo.

Si esta materia se vierte en un espacio cerrado como lo es un silo, ejerce, sobre las paredes y el fondo de éste, presiones cuya resultante es el empuje Q que, a consecuencia del frotamiento de la materia contra las paredes, es oblicuo en relación a la superficie de éstas. Este empuje admite, por lo tanto, dos componentes. Una, denominada bajo la letra N de *normal* a la pared considerada y otra, denominada bajo la letra T de *tangencial* o *paralela* a la pared.

La presión normal N, recibe el nombre de *empuje lateral*. Llamando Φ' al *ángulo de rozamiento del material ensilado contra las paredes*, el coeficiente de rozamiento correspondiente es $\text{tg } \Phi'$.

En función del empuje oblicuo Q ya definido, las dos componentes N y T son:

$$N = Q \cdot \cos \Phi'$$

$$T = Q \cdot \sin \Phi'$$

En las siguientes figuras se esquematiza lo comentado recientemente:



Figura 3.46 – Ángulo de talud natural y componentes de empuje.

Las curvas representativas de las presiones obtenidas, llevando sobre abscisas las profundidades y sobre ordenadas las presiones, tienen la forma de la curva de la siguiente figura, con una asíntota paralela al eje de abscisas y cuya ordenada corresponde a la *presión vertical máxima*. Hacemos la misma observación para la curva representativa del empuje lateral sobre las paredes y esta curva tiene una asíntota paralela al eje de abscisas y cuya ordenada corresponde al *empuje máximo*.

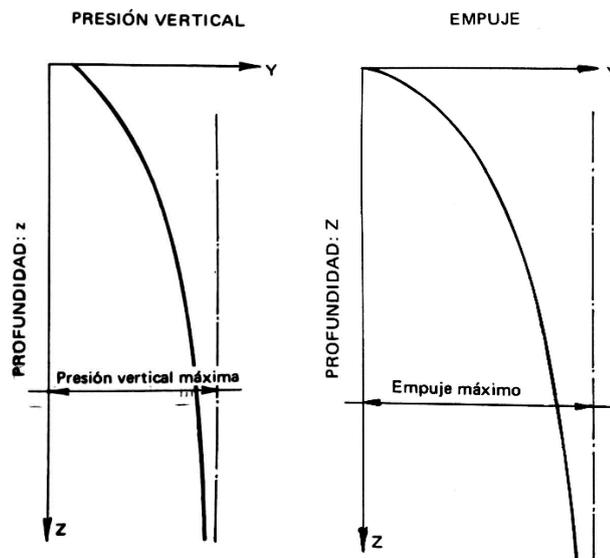


Figura 3.47 – Gráficos de Presión Vertical (T) y Empuje (N) vs. Profundidad (z).

Fricción sobre las paredes

Dadas las características del material ensilado, existe frotamiento o fricción entre el mismo y las paredes del silo.

La correcta determinación del coeficiente de rozamiento grano-pared es de gran importancia para la obtención analítica de las presiones actuantes en la pared del silo, así como para la interpretación de resultados obtenidos en la determinación experimental de presiones en silos.

El ángulo de rozamiento grano-pared puede ser *estático* o *dinámico* (llenado o vaciado, respectivamente). El rozamiento estático es mucho mayor que el dinámico, lo que ya indica que durante el vaciado aparecerá una sobrepresión horizontal provocada por esta disminución del ángulo de rozamiento grano-pared.

Varios investigadores han descrito ensayos para determinar este parámetro, principalmente basados en la utilización de un aparato de corte directo o similar. En estos casos, suele utilizarse una de las mitades que constituyen la caja de corte directo convencional, la cual se hace deslizar sobre una muestra de pared con las características deseadas. Aplicando diferentes cargas sobre la muestra de material almacenado, la resistencia que se genera en este deslizamiento suele ser medida mediante un anillo dinamométrico o similar (Jenike et al. 1960; Arnold et al. 1978). Cuando la muestra de pared de silo es lisa, el ensayo se puede llevar a cabo sin muchos problemas. Sin embargo, cuando la pared considerada es de tipo corrugada, el ensayo se dificulta en gran medida (Molenda et al. 2000). Muchas de las normas existentes para el cálculo de presiones en silos proponen algunos procedimientos analíticos para la determinación del rozamiento efectivo del grano con una pared corrugada. Basándose en que el plano de ruptura entre el material y la pared se encuentra en las proximidades de la pared. Dichos procedimientos proponen la obtención del valor efectivo del rozamiento como una función que depende del ángulo de rozamiento interno del material ensilado y del coeficiente de rozamiento grano-pared, este último bajo el supuesto de una pared lisa.

A una profundidad dada en el interior del silo, la carga sobre el fondo o la presión vertical total es la diferencia entre el peso total de la materia ensilada y la carga total equilibrada por el frotamiento de la materia contra las paredes.

Esta presión crece con la profundidad, pero a consecuencia del frotamiento de la materia contra las paredes, sólo es una fracción del peso de la materia ensilada, puesto que el frotamiento absorbe una parte de ella, y este frotamiento es tal que en las grandes profundidades la presión tiende a ser constante siendo entonces máxima.

Llenado o ensilado (Generalidades y Gráficos)

Los ensayos muestran que, de una experiencia a la otra, las curvas de presión presentan irregularidades a veces importantes, de acuerdo al modo adoptado de llenado y a la velocidad a la que se efectúa el ensilado.

Se sabe, en efecto, que el modo de llenado y las variaciones de la velocidad de ensilado provocan diferencias de densidad aparente y de ángulo de frotamiento interno de los granos.

Ahora bien, los silos industriales son llenados en una forma cualquiera y con velocidades de ensilado variables con el rendimiento de los equipos de manipuleo, hay, por lo tanto, lugar a calcular las paredes de los silos en *función de las presiones*

máximas correspondientes a los estados límites que pueden caracterizar al medio pulverulento.

Para resumir los cinco casos principales que se presentan en la práctica, se muestran a continuación las curvas resultantes de los ensayos de presiones ejercidas por la arena de Fontainebleau²² sobre el fondo de silos.

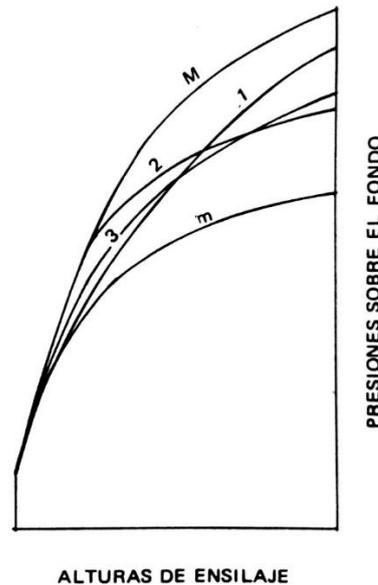


Figura 3.48 – Curvas de presiones sobre el fondo de un silo de paredes rugosas siguiendo diversos modos de llenado y diferentes velocidades de ensilaje.

- Curva 1: llenado rápido en chorro al principio, luego, fin del llenado en lluvia.
- Curva 2: llenado lento en lluvia al principio, luego, fin del llenado rápido en chorro.
- Curva 3: llenado continuo lento en chorro.
- Las otras dos curvas son aquéllas de casos límites.
- Curva M (presiones máximas): llenado continuo, lento en lluvia.
- Curva m (presiones mínimas): llenado continuo, rápido en chorro.

La curva M corresponde a la densidad máxima y ángulo de frotamiento interno máximo.

La curva m corresponde a la densidad mínima y ángulo de frotamiento interno mínimo.

Para el cálculo de presiones máximas, correspondientes a los estados límites que pueden caracterizar al medio pulverulento, se tendrá en cuenta la naturaleza de las paredes que clasificaremos en paredes lisas o rugosas.

Las paredes lisas son aquellas para las cuales el ángulo de frotamiento Φ' de la materia pulverulenta sobre las paredes es inferior al ángulo de frotamiento interno máximo de los granos.

²² La arena de Fontainebleau es un tipo de arena caracterizada como bien graduada, uniforme, sub-angular y con alto contenido de sílice, muy utilizada en ensayos.

Las otras paredes se las denomina *rugosas* y Φ' es, como mucho, igual al ángulo de frotamiento máximo de los granos. El deslizamiento se produce entonces, en la masa, a una pequeña distancia de la pared.

Por referencia a los estados límites se puede caracterizar al medio pulverulento; sabemos que las presiones laterales son las más fuertes cuando el llenado se efectúa rápidamente, y en este caso, la densidad aparente de los granos es mínima, así como el ángulo de frotamiento interno correspondiente.

Sabemos igualmente que las presiones verticales sobre el fondo son las más fuertes cuando el llenado se efectúa lentamente, con detenciones frecuentes, y en ese caso, la densidad aparente de los granos es máxima, así como el ángulo de frotamiento interno correspondiente.

Se tendrá entonces plena seguridad para la determinación de las presiones debidas al *llenado* calculando:

- a) *Los empujes laterales* sobre las paredes rugosas, en función de la densidad *mínima* debida al llenado *rápido* de los silos, del ángulo de frotamiento interno *mínimo* correspondiente, y del ángulo de frotamiento *mínimo* de los granos sobre las paredes.
- b) *Las presiones verticales* sobre el fondo, en función de la densidad *máxima*, debido al llenado *lento* y al asentamiento del ángulo de frotamiento interno *máximo* correspondiente y del ángulo de frotamiento *mínimo* de los granos sobre las paredes.

Vaciado

Generalidades.

El vaciado de los silos verticales es generalmente por *gravedad*. Una sola modificación de las características mecánicas del material ensilado puede comprometer este vaciado, a punto de invertirlo totalmente. Es así, como una toma de *cohesión* más o menos importante del material ensilado alcanza a neutralizar toda posibilidad de escurrimiento natural. Éste es el caso, por ejemplo, de silos para polvos, harinas, azúcar, etc. Para tales materias, los riesgos de modificación de las características mecánicas por toma de cohesión, resultan esencialmente de tres motivos.

- Las capas inferiores, sobrecargadas por el peso de las capas superiores, están *suficientemente comprimidas* para resultar *coherentes* (una cohesión de algunos granos es suficiente para hacer variar sensiblemente el ángulo de frotamiento interno).
- Las *migraciones de humedad* dentro de la masa, que, por una concentración más o menos importante, alcanza a permitir una aglomeración de partículas entre sí.
- El *calentamiento* del material ensilado, por defecto de una buena conservación.

Esfuerzos dinámicos y sobrepresiones.

La experiencia muestra que el vaciado de los silos constituye la fase más crítica de su utilización, pues provoca reacciones de la masa ensilada que pueden comprometer la estabilidad del silo.

Los esfuerzos que corresponden a estas reacciones, son función, a la vez, de las *características físicas y mecánica de los materiales ensilados*, de la *forma* de las celdas, de la *posición de orificios de vaciado*, y de la *esbeltez* del silo.

El cálculo de los empujes p_z sobre las paredes de los silos se efectúa de una forma satisfactoria en la fase de equilibrio estático de los materiales almacenados en reposo.

Pero la *complejidad* de los fenómenos debidos al vaciado de los silos desde el comienzo mismo del vaciado, durante la ruptura de este equilibrio, es tal que se impone la necesidad de recurrir a la *determinación experimental* de coeficientes de mayoración a aplicar a los valores de los empujes p_z para conocer los valores de los *empujes dinámicos*.

Este recurso se justifica, además, cuando se trata de determinar *sobrepresiones* debidas al *llenado* y *vaciado* simultáneo de los silos, que corresponden a las *acciones máximas* en todas las fases de uso de un silo, para el cual este último fenómeno no era por otra parte estimado, por no haber sido alguna vez investigado.

La práctica ha puesto en evidencia que los numerosos y más espectaculares accidentes que se produjeron y que se siguen produciendo aún en los silos, a pesar de las precauciones anteriores si bien formales, son debidos a los perniciosos efectos producidos por este *vaciado*.

Los constructores estaban, mientras tanto, muy informados de los perniciosos efectos debidos al *vaciado* de los silos, a través de publicaciones acerca del tema, pero, "*sea por rutina o por ignorancia, sea por espíritu de una economía mal entendida o demás razones de competencia comercial, y a riesgo de los graves inconvenientes que podrían resultar*", ciertos constructores continuaron calculando las paredes de los silos bajo el efecto de los empujes ejercidos debidos al *llenado solamente*, por los materiales ensilados, *sin tener en cuenta las presiones dinámicas y sobrepresiones* debidas al vaciado de los silos.

Es así, que se ha tenido que lamentar accidentes generalmente serios, que alcanzan hasta el colapso de los silos. Estos accidentes son tanto más numerosos, cuanto, como consecuencia del desarrollo del almacenamiento, en el transcurso del último siglo la capacidad de silos aumentó, (así como su altura) para una misma superficie de ocupación del suelo.

Además, la capacidad de manipuleo, elevada en las instalaciones de almacenamiento, impone una mucho mayor velocidad de llenado y de vaciado de los granos y obliga, así, a multiplicar los orificios de descarga, con todas las consecuencias que se derivan.

Vaciado Centrado

Cuando el vaciado es *centrado*, las presiones radiales son iguales sobre toda la periferia del silo. Este tipo de vaciado es menos rápido que el de un mismo silo con un vaciado *excéntrico*. La influencia de la excentricidad del vaciado es muy importante sobre el tiempo durante el cual se efectúa este vaciado. La diferencia de tiempo está en un rango del 30 al 60%.

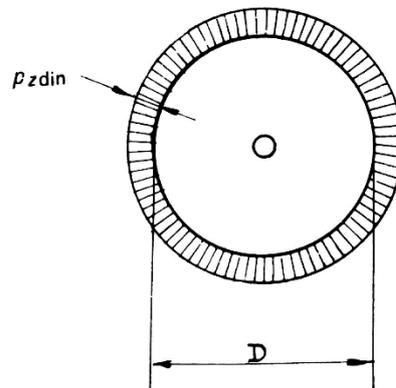


Figura 3.49 – Diagrama de presión en un silo con vaciado centrado.

Para el caso de vaciado centrado, se exponen como referencia los estudios realizados por *Janssen* y *Pleizner*, en Alemania en el año 1895:

Notación:

- w = Densidad del material almacenado en la celda, en kg/cm³
- h = Altura desde el borde superior de la celda al punto donde se calcula la presión, en metros.
- A = Área de la sección neta de la celda.
- U = Perímetro de la misma sección, en metros.
- R = A / U = Radio hidráulico medio de la sección, en metros.
- Φ = Ángulo de reposo del material almacenado, en grados.
- Φ' = Ángulo de rozamiento entre el material almacenado y las paredes de la celda.
- μ' = tg Φ'
- Ph = Presión horizontal en kg/cm²
- Pv = Presión vertical en kg/cm²
- k = Ph / Pv = (1 - sen Φ) / (1 + sen Φ)

Derivación de la fórmula

Janssen obtiene las presiones laterales de llenado en una celda mediante la consideración del equilibrio de una rebanada elemental de producto almacenado según la siguiente figura:

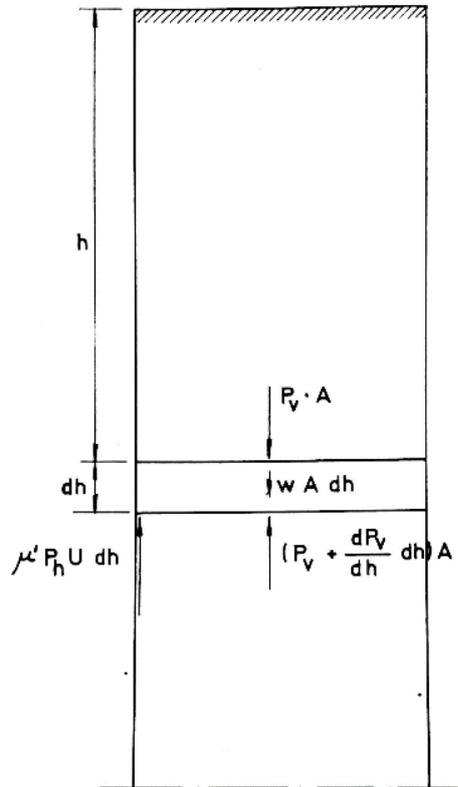


Figura 3.50 – Esquema con rebanada elemental del material ensilado

Se plantea el equilibrio de la siguiente manera:

$$P_v \cdot A + w \cdot A \cdot dh = \left(P_v + \frac{dP_v}{dh} \cdot dh \right) \cdot A + \mu' \cdot P_h \cdot U \cdot dh \quad [90]$$

O bien:

$$w \cdot A \cdot dh - A \cdot \frac{dP_v}{dh} \cdot dh - \mu' \cdot P_h \cdot U \cdot dh = 0$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, se llega al valor:

$$P_v = \frac{w \cdot R}{\mu' \cdot k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\mu' \cdot k}{R} \cdot h} \right) \quad [91]$$

$$P_h = k \cdot P_v = \frac{w \cdot R}{\mu'} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\mu' \cdot k}{R} \cdot h} \right) \quad [92]$$

$$k = \frac{1 - \sin \Phi}{1 + \sin \Phi} \quad [93]$$

Estos valores son proporcionales a $R = A/U$, muy conocido como radio hidráulico medio e igual $d/4$ para silos cilíndricos.

El coeficiente "K"

Janssen establece el coeficiente *K* igual a la relación entre las presiones horizontales y verticales:

$$K = \frac{P_h}{P_v} \quad [94]$$

A su vez, los resultados experimentales de *Pleizner indican:*

- 1 – La relación entre la presión lateral y la vertical es mayor para pequeñas alturas de grano;
- 2 – El valor de K varía en función del tipo de pared de la celda y rugosidad de la misma;
- 3 – La presión lateral a veces se dobla cuando se produce el vaciado del silo;
- 4 – En el caso de un vaciado excéntrico, la presión aparece en el lado opuesto a la boca de salida.

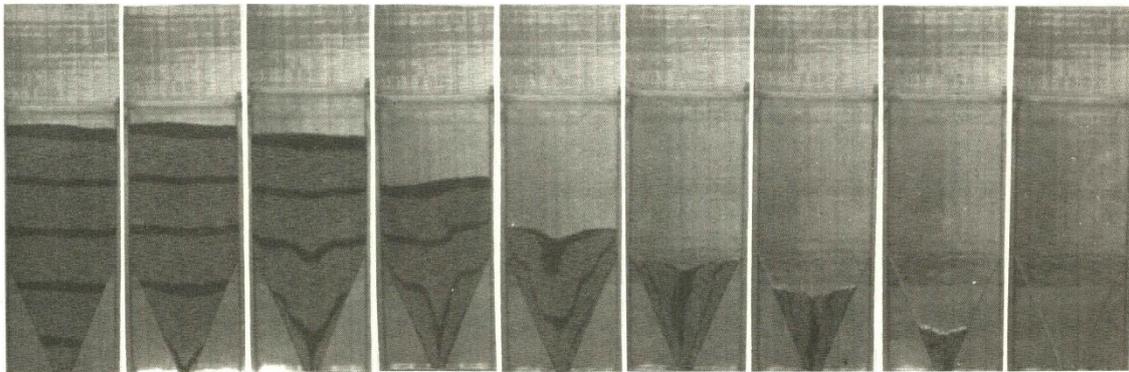


Figura 3.51 – Fotografías flujo de vaciado centrado, según Ravenet. Relación altura-lado igual a 2. Tolva de 70° de pendiente

Vaciado Excéntrico

En el caso del vaciado excéntrico, las presiones radiales sobre la pared del silo son desiguales, creciendo desde $p_{z \text{ din mín}}$ hasta $p_{z \text{ din máx}}$ sobre un eje diametral AB que pasa por el orificio de vaciado. Se admite que el crecimiento de las presiones sobre un radio intermedio OC (o su simétrico OD) es *proporcional* a la del ángulo AOC ó AOD.

Esta desigualdad de presiones origina en la pared momentos que pueden llevar a la ovalización del silo.

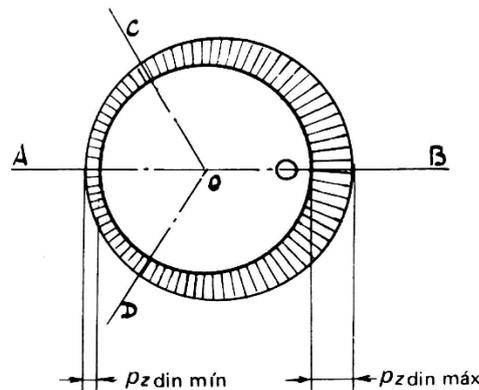


Figura 3.52 – Diagrama de presiones para vaciado excéntrico.

Sobre la siguiente figura se observa un silo con vaciado excéntrico. La figura corresponde a un corte horizontal de un silo con orificio de vaciado excéntrico "m".

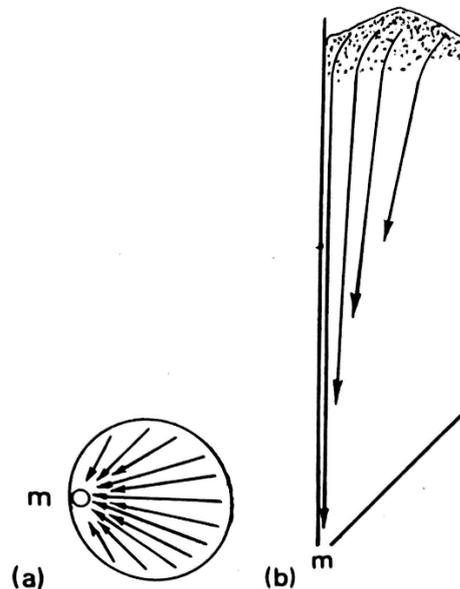


Figura 3.53 – Flujo del material ensilado en vaciado excéntrico.

Las flechas indican las direcciones de los granos en movimiento durante este vaciado. Los empujes que resultan son evidentemente *asimétricos*.

Un silo cilíndrico, por ejemplo, tiende a ovalizar su forma bajo la acción de estos empujes asimétricos. Es necesario, pues, reforzar las paredes para equilibrar estos esfuerzos asimétricos que es necesario determinar. Ahora bien, su determinación exacta para el cálculo es extremadamente compleja y aleatoria.

La norma DIN alemana para el cálculo de silos (tratada más adelante), propone un método de cálculo que es interesante y permite tomar las disposiciones indispensables en la ejecución de las paredes para permitirles resistir convenientemente a los esfuerzos asimétricos.

Para una buena apreciación del fenómeno, se presenta en las siguientes fotografías, las sucesivas fases del vaciado excéntrico de un silo-maqueta con pared de vidrio. Estas fotos, formando un conjunto, ilustran exactamente el fenómeno, así como se ha podido confirmar durante los ensayos de silos reales en el interior de los cuales se colocaron bolas de papel de diferentes colores. Las bolas de papel salieron, durante el vaciado, exactamente en el orden ya observado en la maqueta.

Los refuerzos en las paredes necesarios para paliar los efectos perniciosos del vaciado excéntrico, representan un precio importante, que aumenta sensiblemente el precio respecto de un silo del mismo volumen, pero de vaciado centrado.

Se ha diseñado un sistema que permite anular *totalmente* los esfuerzos asimétricos de vaciado, restableciendo un vaciado centrado, aún en el caso en que el orificio de vaciado está obligatoriamente excéntrico, lo que puede suceder en el caso de los silos proyectados en forma condicionada por las condiciones particulares de posición respecto al suelo o respecto a los elementos de mecanización.

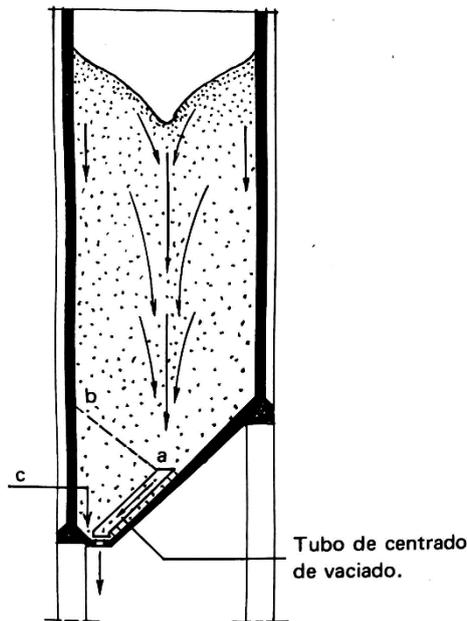


Figura 3.54 – Corte transversal en un silo de vaciado excéntrico, equipado de un tubo de centrado que permite el escurrimiento de los granos de las capas superiores por el centro, por lo tanto, sin efecto de excentricidad hasta el punto superior al del tubo de centrado, el escurrimiento del resto de la materia granular que queda en la tolva por debajo de la línea a-b, se efectúa por el espacio anular c en la parte inferior del tubo “sombbrero” que cubre el agujero de vaciado. Este espacio anular debe ser determinado en cada caso en particular en función de las características del grano ensilado y de la capacidad de vaciado.

Según los hermanos Reimbert, para contemplar los efectos *dinámicos* y de *sobrepresión* presentes en el *vaciado* o *vaciado y llenado simultáneos* se deberán multiplicar los esfuerzos estáticos del empuje p_z (los cuales son conocidos) por coeficientes que reflejen tales efectos. Se tiene entonces que para materiales pulverulentos en referencia a la arena como material de ensayo:

- Durante el *solo vaciado* del silo:

$$p_z \text{ din} = p_z \cdot k_d \cdot k_{a.1} \quad [95]$$

- Durante el *llenado y vaciado simultáneos*:

$$p_z \text{ din} = p_z \cdot k_d \cdot k_b \cdot k_{a.1} \quad [96]$$

Donde los coeficientes representan:

- k_d Coeficiente *dinámico*, a un nivel dado, relativo al *vaciado* del silo para el caso de la *arena*;
- k_b Coeficiente de *sobrepresión*, multiplicador de k_d , relativo al *llenado* y el *vaciado* sumultáneos del silo, para el caso de la *arena*;
- k_a Coeficiente de *materia*, particular para cada material pulverulento almacenado no cohesivo, *distinto de la arena*, tales como cereales, granos de levadura, etc;
- $k_{a.1}$ Coeficiente *multiplicador* de k_d , para obtener el coeficiente de mayoración de la presión p_z determinada a cada nivel para el *material almacenado considerado* en el caso de *vaciado solo*;
- $k_{a.2}$ Coeficiente *multiplicador* de k_b , multiplicado a sí mismo de k_d , para obtener el coeficiente de mayoración de la presión p_z calculada a cada nivel para el material ensilado considerado en el caso de *llenado y vaciado simultáneos*.

Los valores de los coeficientes mencionados se indican a continuación:

Material ensilado	Coeficientes	Niveles				
		0,8 H	0,6 H	0,4 H	0,2 H	0,1 H
Arena	$k_{a.1}$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	$k_{a.2}$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Azúcar	$k_{a.1}$	1,00	0,95	0,90	0,95	1,01
	$k_{a.2}$	1,00	0,95	1,00	0,90	0,95
Levadura química	$k_{a.1}$	1,80	1,65	1,45	1,20	1,10
	$k_{a.2}$	1,80	1,70	1,50	1,30	1,15
Mijo	$k_{a.1}$	1,35	1,35	1,50	1,30	1,15
	$k_{a.2}$	1,35	1,45	1,65	1,70	1,80
Trigo	$k_{a.1}$	0,90	0,95	0,95	0,95	1,05
	$k_{a.2}$	0,90	1,00	1,00	1,05	1,15
Avena	$k_{a.1}$	0,95	0,90	0,85	0,95	1,00
	$k_{a.2}$	0,90	0,95	1,00	0,95	0,95
Cebada	$k_{a.1}$	1,05	1,00	1,06	1,04	1,03
	$k_{a.2}$	1,05	1,00	1,10	1,05	1,04
Maíz	$k_{a.1}$	1,05	1,15	1,30	1,27	1,24
	$k_{a.2}$	1,06	1,10	1,25	1,25	1,16
Lino	$k_{a.1}$	0,90	0,85	0,90	0,92	1,00
	$k_{a.2}$	0,90	0,85	0,85	0,85	0,95
Girasol	$k_{a.1}$	1,10	1,16	1,15	1,15	1,07
	$k_{a.2}$	1,22	1,25	1,25	1,25	1,30
Sorgo (Colza)	$k_{a.1}$	0,95	0,97	1,07	1,11	1,07
	$k_{a.2}$	1,70	1,37	1,21	1,32	1,47
Soja	$k_{a.1}$	0,85	0,93	0,90	1,14	1,25
	$k_{a.2}$	1,05	1,51	1,36	1,07	1,06

Tabla 3.1 – Valores de coeficientes dinámicos y de sobrepresión en el vaciado para distintos materiales y distinta altura de ensilado.

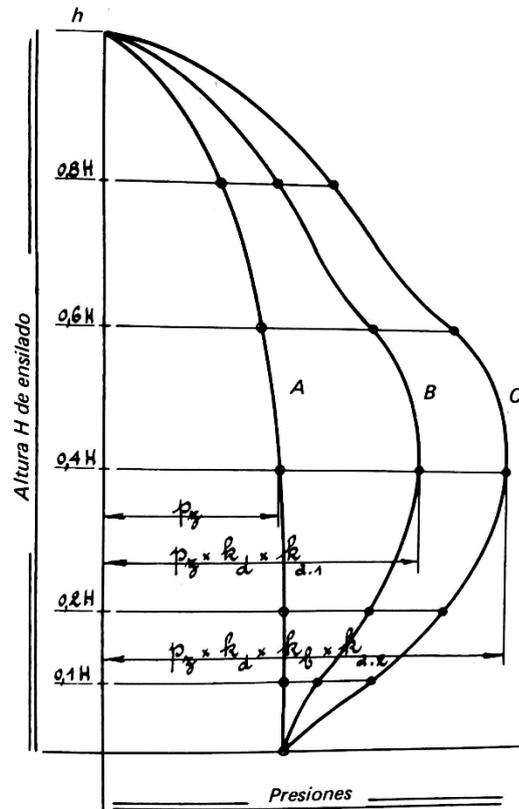


Figura 3.55 – Gráfico de Presiones vs. Altura de ensilado en función de los coeficientes dinámico y de sobrepresión.

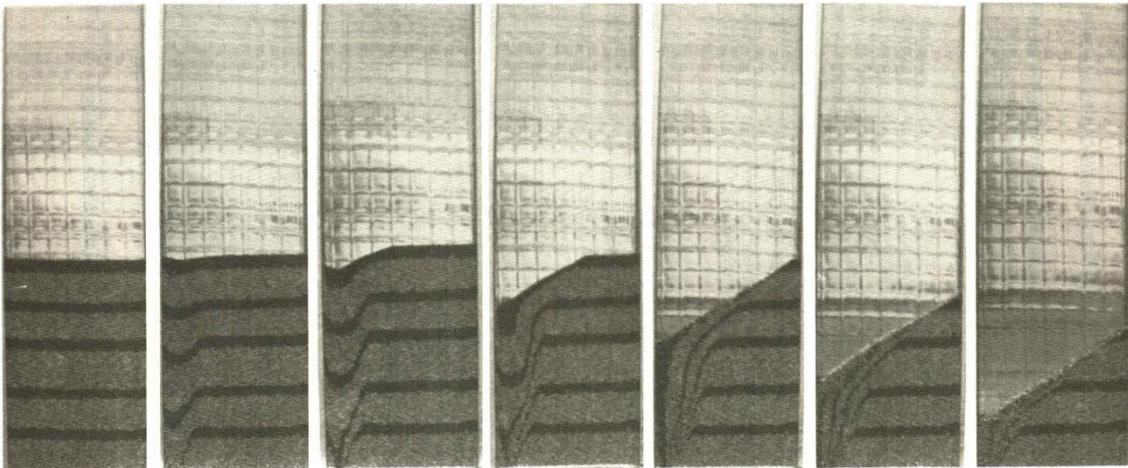


Figura 3.56 – Fotografías flujo de vaciado excéntrico, según Ravenet. Relación altura-lado igual a 1.5.

Impacto por derrumbe de arcos

El asentamiento máximo del material ensilado puede producirse, provocado por las vibraciones de la construcción, como consecuencia de trepidaciones de máquinas y de equipos de limpieza y manipuleo de granos.

Se han estudiado modelos reducidos acerca de cómo se comporta una masa pulverulenta ensilada y cuyo asentamiento fue acentuado al extremo por vibraciones de las paredes.

Se tienen entonces en el llenado con vibraciones presiones en las paredes mucho menos fuertes, y presiones verticales sobre el fondo mucho más grandes que en el caso de un llenado normal, sin asentamiento *provocado* por los granos.

Durante el vaciado, se puede observar fenómenos que explican los desprendimientos de tolvas, que se constatan de vez en cuando en los silos.

Desde el comienzo del vaciado, los granos escurren normalmente sin que la masa se ponga en movimiento, contrariamente a lo que se producía en el caso de los granos asentados naturalmente; luego de un cierto tiempo que varía con el grado de asentamiento de los granos, *la masa superior se desploma bruscamente provocando un golpe importante sobre el fondo*, a partir de allí el vaciado continúa normalmente como en el caso de un ensilado corriente.

Los fenómenos se pueden interpretar de la siguiente manera:

La masa pulverulenta parece tenerse en equilibrio por un tipo de *efecto de bóveda o arco*. En el momento del vaciado, la parte baja del silo fue evacuada en primer lugar y deja un espacio vacío bajo la bóveda inferior, sobre la que se apoya en parte la masa ensilada superior; luego se inicia una chimenea vertical, que rompe el equilibrio de la bóveda, y los granos de la parte superior son precipitados bruscamente hacia abajo para llenar la chimenea y el espacio vacío creado en la masa ensilada.

El efecto de choque o *golpe de ariete* hace que los aparatos de medición en los ensayos realizados se agiten bruscamente.

He aquí entonces un *efecto dinámico muy importante* que escapa en muchas ocasiones al cálculo.

Sargis S. Safarian. Año 1969 – Presiones de diseño de los materiales granulares en silos.

Safarian hace referencia a los estudios realizados por *Reimbert y Janssen*, y para el cálculo de presiones de vaciado aplica un coeficiente de corrección C_d que se encarga del aumento en magnitud de las presiones básicas, laterales y verticales debidas a las presiones dinámicas localizadas, resultantes de la fuerza de gravedad del material granular en silos.

El coeficiente tiene en cuenta la posible formación de arcos del material ensilado, el colapso de estos arcos, o bien, los aumentos de presión debido a la aireación.

Este coeficiente, no tiene en cuenta efectos de la temperatura del material al ser almacenado en caliente, tal como cemento, clínker, etc.; esta temperatura produce unas tensiones en las paredes de los silos que deberán ser calculadas y añadidas a las tensiones causadas por el material.

En la siguiente tabla, se dan los valores para el factor de corrección C_d ; los valores de uso con el método de *Janssen* han sido tomados del código soviético de silos CH-65 con pequeñas modificaciones.

Descripción del área de aplicación	Silos hormigón		Silos metálicos	
	REIMBERT	JANSSEN	REIMBERT	JANSSEN
1. Silos circulares y poligonales simples:				
Parte alta del silo H_1 . . .	1,00	1,35	1,10	1,50
2/3 de la altura inferior del silo $H/D = 1,5$	1,50	1,75	1,65	1,95
Para $H/D \geq 4,5$	1,75	1,75	1,95	1,95
2. Grupo de silos circulares, y poligonales unidos entre sí por pared común o tangencia de paredes:				
a) Celdas exteriores:				
Parte alta del silo H_1 . . .	1,00	1,35	1,10	1,50
2/3 de la altura inferior del silo y para $H/D=1,5$	1,50	1,75	1,65	1,95
Para $H/D \geq 4,5$	1,75	1,75	1,95	1,95
b) Celdas interiores:				
Parte alta del silo H_1 . . .	1,00	1,35	1,10	1,50
2/3 de la altura inferior del silo y para $H/D=1,5$	1,25	1,50	1,40	1,65
Para $H/D \geq 4,5$	1,50	1,50	1,65	1,65
3. Interceldas:				
Parte alta del silo H_1 . . .	1,00	1,35	1,10	1,50
2/3 de la altura inferior del silo $H/D = 1,5$	1,25	1,50	1,40	1,65
Para $H/D \geq 4,5$	1,50	1,50	1,65	1,65
4. Interceldas en un grupo de silos conectadas con las celdas mediante paredes:				
Parte alta del silo H_1 . . .	1,00	1,35	1,10	1,50
2/3 de la altura inferior del silo $H/D = 1,5$	1,75	2,00	1,95	2,20
Para $H/D \geq 4,5$	2,00	2,00	2,20	2,20
5. Silos en grupo y simples cuadrados y rectangulares:				
Parte alta del silo H_1 . . .	1,00	1,35	1,10	1,50
2/3 de la altura inferior del silo $H/D = 1,5$	1,25	1,50	1,40	1,65
Para $H/D \geq 4,5$	1,50	1,50	1,65	1,65

Los valores de C_d para el caso de REIMBERT, alturas comprendidas entre 1,5 y 4,5, pueden ser obtenidos por interpolación.

Tabla 3.2 – Valores del factor de corrección C_d

Relación dimensional entre tolva y grano para materiales gruesos.

Se define el parámetro m como la relación entre la dimensión de la boca de salida y la mayor dimensión de las partículas ensiladas.

$$m = \frac{D_{bs}}{D_{pe_max}} \quad [97]$$

Según ensayos realizados, dado un valor de m , se tendrá un tipo de flujo:

Caso $m \geq 4.0$, *flujo siempre estable* o *libre*, no presentándose arcos ni bóvedas que puedan interrumpir el caudal de vaciado.

Caso $2.0 < m < 4.0$, el flujo puede o no producirse, se denomina *flujo probable*. Los arcos o bóvedas son frecuentes y estables. El caudal de salida no solamente no es constante, sino que puede interrumpirse por la formación de bóvedas estables. Se pueden formar arcos sobre las paredes de la tolva y sobre las paredes verticales del silo. La rotura de estos arcos es continua, ya que no tienen consistencia suficiente para soportar el peso del material que gravita sobre ellos.

Caso $2.0 > m$, el flujo nunca se presenta y se denomina condición de *no flujo*.

3.3.5 Normativa para el cálculo de silos

Códigos de diseño de silos: sus limitaciones e inconsistencias

Con el fin de diseñar estructuralmente un silo, un ingeniero debe determinar todas las cargas que serán aplicadas sobre el mismo. Estas incluyen, entre otras, viento, sismo, externas, y cargas inducidas por el material sólido almacenado. Numerosos códigos y estándares especifican maneras de calcular las últimas cargas mencionadas (llamadas cargas inducidas por sólidos). Entre ellos, los de uso más generalizado internacionalmente son:

- British Standard BS EN 1991-4:2006 “Eurocode 1 – Actions on structures – Part 4: Silos and Tanks”
- American Concrete Institute ACI 313-97 “Standard practice for design and construction of concrete silos and stacking tubes for storing granular materials”
- American Society of Agricultural Engineers ANSI/ASAE EP433 DEC1998(R2011) “Loads Exerted by free-flowing grain on bins”
- Australian Standard AS 3774-1996 “Loads on bulk solids containers”

Podría pensarse que es una falencia el hecho que la orientación para el usuario sea distinta entre estos códigos. Sin embargo, es lógico que entre ellos existan diferencias. Lo realmente importante es que, cada Código de diseño de silos, sea consistente con el resto de los Códigos utilizados para la construcción de los mismos.

Una breve descripción de cada uno de esos códigos, sus limitaciones, y condiciones comunes de diseño no cubiertas son identificadas y tratadas en este apartado.

Cargas

Un punto crítico inicial cuando se diseña cualquier estructura involucra la determinación de las cargas que se espera que actúen sobre ella. Los contenedores y silos utilizados en el almacenamiento de sólidos a granel no son la excepción. (Suelen utilizarse varios términos de significado común para describir la estructura que contiene al granel sólido, estos son, compartimiento, silo, tanque, búnker, recipiente, etc.) Desafortunadamente, las cargas inducidas por sólidos que actúan en las paredes y el funcionamiento interno de estas estructuras no son de fácil determinación y comprensión. Como resultado, los silos y depósitos fallan con una frecuencia que es muy superior a la de muchos otros equipamientos industriales. A veces, la falla solo involucra distorsiones o deformaciones, las cuales, mientras sean poco significativas, no ocasionan pérdida de seguridad ni peligro operacional. En otros casos, la falla

involucra colapso completo de la estructura con acompañamiento de pérdida de uso e inclusive de vidas.²³

Dada la importancia en la determinación de las cargas en silos, una pregunta obvia es, “¿Por qué la falta de entendimiento del tema?”. Parte del problema radica en la falta de formación en esta materia. Muchos ingenieros cuando se enfrentan a la necesidad de analizar un contenedor de material sólido a granel, asumen erróneamente que dicho material se comporta como un líquido que fluye. Nada más alejado de la realidad. Las partículas sólidas pueden transferir esfuerzos cortantes entre sí mismas y entre ellas y las paredes de los silos, incluso si no hay movimiento relativo entre ellos. Además, la magnitud de ese esfuerzo de corte es, para la mayoría de los sólidos a granel, independiente de la velocidad del escurrimiento. Los sólidos a granel pueden formar una pila de superficies estables y a veces interrupciones en el flujo estable por la formación de arcos o bóvedas. Los fluidos no exhiben cualquiera de estos comportamientos. Por lo tanto, usando como aproximación comportamientos referidos a los fluidos, se está condenando al cálculo a la producción de valores irreales. Por ejemplo, un silo que contiene un fluido tendrá la mayor presión interna en sus paredes en la zona inferior, en cambio, el mismo silo almacenando un sólido a granel, generalmente tendrá su mayor presión sobre las paredes en algún lugar cerca de su altura media.

Aspectos históricos

Varios intentos se han hecho en los últimos 50 años para codificar las presiones inducidas por sólidos sobre las paredes de los silos. El primer código en prestar ayuda a reglas de diseño para cargas, a usar por el cálculo en ingeniería, fue desarrollado por extensos ensayos realizados por Pieper y sus colegas, quien produjo la norma alemana DIN 1055 Part 6 “Design loads for buildings: Loads in silo bins”. Esta norma, que tuvo su primera publicación en 1964, ha sido significativamente revisada y reeditada dos veces, una en 1987 y otra en 2005.

Otros grupos en otros países han codificado las presiones inducidas por sólidos a granel en las paredes de los silos, y este proceso continúa hoy en día. Varios términos son usados para describir estos documentos, como ser: Estándar, Código, directrices, prácticas recomendadas, prácticas de ingeniería. Documentos titulados como “Código” o “Estándar” requieren *conformidad*, mientras que los títulos “directrices”, “práctica recomendada” y “práctica de ingeniería” pueden considerarse solo como *recomendaciones*, no requieren *cumplimiento obligatorio*. Mientras que dicho cumplimiento sea cierto desde un punto de vista legal o jurídico, no exime al ingeniero de la responsabilidad de lo que debía ser su objetivo principal en el diseño: la *seguridad*, independientemente de la presión que puede provenir de clientes u otros. La **seguridad, funcionalidad, economía y durabilidad** deben determinar el diseño.

Para propósitos prácticos, “directrices”, “práctica recomendada” y “práctica de ingeniería”, pueden ser consideradas como *Estándares Mínimos Obligatorios*. En otras palabras, un ingeniero tiene el derecho a su juicio ingenieril independiente cuando crea un diseño. De cualquier manera, si un problema ocurre y le es requerido al ingeniero justificar su diseño, habrá una fuerte presunción en contra del ingeniero, si el mismo no ha considerado al menos las “directrices”, “prácticas recomendadas” o “prácticas de ingeniería”.

²³ J. W. Carson, Silos failures: Case histories and lessons learned, in Proceedings of the 3° Israeli Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids, Dead Sea, Israel (1), 2000, pp 4.1-4.11.

Los Códigos:

- *British Standard BS EN 1991-4:2006 “Eurocode 1 – Actions on structures, Part 4: Silos and Tanks”*

Adoptado por el Comité Europeo de Normalización (CEN) en octubre de 2005, este es el más moderno y completo código de diseño de silos en uso hoy en día. Es el comúnmente llamado “Eurocódigo”, a pesar de que como hace referencia a la Norma ASTM, es como si fueran uno sólo. La designación formal para la versión inglesa de este código, la cual fue publicada en mayo de 2006, es “*British Standard BS EN 1991-4:2006 “Eurocode 1 – Actions on structures – Part 4: Silos and Tanks” (BS 2006)*”. Una norma alemana fue producida como proyecto de norma al terminarse la correspondiente al Eurocódigo y fue publicada como DIN 1055-6:2005-03 “*Actions on structures – Part 6: Design loads for buildings and loads in silo bins*” en marzo de 2005. Está fue luego sustituida por la obligatoria DIN EN 1991-4 (2006), la cual es la traducción alemana de la norma británica.

La norma BS EN 1991-4:2006, explota la extensa investigación europea en silos de los pasados 30 años. Esta investigación fue intensamente revisada por especialistas de ingeniería civil, mecánica y química antes de que fuera adoptada y es conocida como el Estándar más avanzado de su tipo en todo el mundo.

Este Código divide a los silos en tres clases, desde *simples y pequeñas estructuras (Action Assessment Class 1)* hasta *grandes y/o complejas estructuras (Action Assessment Class 3)*. Esta distinción permite que procedimientos apropiados sean usados para ciertas condiciones dadas, y elimina los debates entre *complejidad versus peligros asociados a simplificaciones*. Los detalles de estas tres clases se muestran en la tabla siguiente:

Class	Description
3	>10,000 tonne capacity or > 1,000 tonne capacity if: <ul style="list-style-type: none"> • Eccentric discharge with eccentricity greater than 25% of cylinder diameter • Squat silo (cylinder height between 40 and 100% of cylinder diameter) with top surface eccentricity greater than 25% of cylinder diameter
2	All silos not in Class 1 or 3
1	Capacity < 100 tonne

Tabla 3.3 – *Action Assessments Classes (Evaluación de Clases de Complejidad)*

Los silos se clasifican en este Código, además, por la relación de aspecto h_c/d_c , donde h_c es la altura de la sección cilíndrica desde la intersección entre cilindro y tolva hasta el baricentro de la pila (cúmulo) superior y d_c es el diámetro del cilindro:

- Slender (Esbelto) si $h_c/d_c \geq 2$
- Intermediate slenderness (Esbeltez Intermedia) si $1 < h_c/d_c < 2$
- Squat (Bajo) si $0.4 < h_c/d_c \leq 1$
- Retaining (Conservador) si $h_c/d_c \leq 0.4$

Cada geometría tiene características especiales de carga con diferentes condiciones críticas de diseño, y cada clase se mezcla suavemente con la siguiente.

Las condiciones de diseño dependen de la geometría del silo, del material sólido a granel almacenado y de las condiciones de carga y descarga. Este es el primer Código de Diseño de Silos en identificar entre tantas condiciones y en regular acerca de cómo debe tratarse cada uno de estos aspectos. Esto permite identificar los requerimientos acordes a las implicancias de seguridad.

Este Código recomienda que las tres propiedades claves del material (μ – Coeficiente de fricción entre la pared del silo y el material sólido a granel almacenado, γ – densidad del material, k – relación de presión lateral) sean determinadas mediante ensayos, los cuales son detallados en el Anexo C. Reconociendo que las variaciones ocurren cuando el mismo material sólido es probado repetidamente, el Código recomienda un procedimiento por el cual los valores superiores e inferiores de las características pueden ser obtenidos.

Las cargas excéntricas son las que causan más fallas en los silos que cualquier otra condición, y este es el primer Estándar que provee tratamiento racional a este fenómeno, adoptando el simple modelo propuesto por Rotter²⁴. La complejidad del tratamiento depende de la *Clase de Complejidad de la Estructura (Action Assessment Class)*, con “patch loads” (cargas parciales) usadas para hacer frente a las pequeñas excentricidades.

Este es el primer Código en reconocer y dar tratamiento completo al hecho de las características de acción en diferentes partes del silo, que son controladas por diferentes valores extremos de distribución estadística de valores de propiedades del material ensilado.

Cuando se calculan presiones máximas laterales en un silo cilíndrico, una combinación de *mínimo coeficiente de fricción entre el material ensilado y la pared del silo, μ , con máxima relación de presión lateral, k* , es determinante. Este cálculo es lo que usualmente determina el espesor de la pared del silo cuando la tensión anular gobierna, por ejemplo, en un silo de pared gruesa. Por otro lado, si el pandeo vertical determina el espesor de la pared (tal como una pared delgada de un silo metálico), se utiliza una combinación del *máximo coeficiente de fricción en la pared con la máxima relación de presión lateral*, a partir de esto resulta la máxima fuerza de rozamiento. Como resultado, una significativa reducción en el factor de sobre-presión es posible.

- *ACI 313-97 “Standard practice for design and construction of concrete silos and stacking for storing granular materials”*

La actual versión de este Código estadounidense fue adaptada este año 2016 (ACI 313-16). La versión anterior, era de enero de 1997²⁵. A diferencia de EN 1991-4:2006, la cual tiene amplia aplicabilidad, este documento está enfocado a calcular presiones ejercidas en las paredes de silos de hormigón, aunque se podría argumentar que los métodos de cálculo (no los valores utilizados en las ecuaciones), deberían ser independientes del material de construcción del silo.

²⁴ J. M. Rotter, The Analysis of Steel Bins Subject to Eccentric Discharge, in Proc., Second International Conference on Bulk Material Storage Handling and Transportation, Institution of Engineers, Australia, 1986, pp. 264-271.

J. M. Rotter, Guide for the Economic Design of Circular Metal Silos, Spon, London, 2001.

²⁵ ACI 313-97, Standard practice for design and construction of concrete silos and stacking tubes for storing granular materials, American Concrete Institute, Farmington, MI, 1997.

En consistencia con EN 1991-4:2006, esta publicación reconoce correctamente que las tres propiedades claves del material ensilado casi siempre varían para un dado material sólido a granel, y esta variación deberían ser tomada en cuenta dependiendo de los cálculos que se están llevando a cabo. En todos los casos, la densidad del material ensilado, deben considerarse en su máximo valor, ya que los sólidos inducen presiones que varían linealmente con la densidad del material. El coeficiente de fricción de la pared del silo, μ , es determinado por ensayos o por referencia a valores tabulados.

En un intento por cubrir las muchas incógnitas cuando se calculan las presiones en las paredes de un silo, los redactores de esta publicación, especificaron el uso de un considerable factor de seguridad, específicamente:

4.4.2.2 Concentric flow – The horizontal wall design pressure above the hopper for concentric flow patterns shall be obtained by multiplying the initial filling pressure...by a minimum over-pressure factor of 1.5.

4.4.2.3 Asymmetric flow – Pressures due to asymmetric flow from concentric or eccentric discharge openings shall be considered.

Los comentarios proveen una pequeña guía adicional a cerca de este tópico:

R4.4.2.3 Asymmetric flow can result from the presence of one or more eccentric outlets or even from non-uniform distribution of material over a concentric outlet.

Methods for evaluating the effects of asymmetric flow have been published. None of these methods has been endorsed by the Committee.

A diferencia de EN 1991-4:2006, la cual incluye *cargas parciales* para cubrir la no uniformidad de las presiones sobre las paredes, que son tenidas en cuenta para el proyecto de silos inclusive con carga y descarga concéntrica,²⁶ ACI 313-97 no menciona casos de carga parcial.

Como la mayoría de los Códigos de diseño de silos, esta publicación incluye una tabla de ejemplo de las propiedades físicas comunes de material sólido a granel. Sin embargo, la Tabla 4-A en los comentarios, es más simplista y por consiguiente más peligrosa que la mayoría. Por ejemplo, el valor dado para el coeficiente de fricción para el carbón bituminoso contra acero es solamente 0.3. No hay indicaciones acerca del tipo de acero (por ejemplo, no hay indicaciones si es acero al carbono o acero inoxidable) o acerca de la terminación superficial (laminación en caliente, laminación en frío, pulido, corroído, etc.), ni sugerencia alguna acerca de la humedad del carbón, ceniza u otras variables que tienen algún efecto sobre la fricción en la pared. La nota al pie de dicha tabla dice:

“The properties listed here are illustrative of values which might be determined from physical testing. Ranges of values show variability of some materials. Design parameters should be determined by test and the values shown used with caution.”

Esta nota al pie se entiende para proporcionar una advertencia al lector, pero es fácil pasarla por alto.

²⁶ J. Y. Ooi et al, Systematic and random features of measured pressures on full-scale silo walls, in Engineering Structures, 12(2), 1990, pp. 74-87.

	Weight γ		Angle of internal friction ϕ	Effective angle of internal friction δ	Coefficient of friction μ'	
	lb/ft ³	kg/m ³			Against concrete	Against steel
Cement, clinker	88	1410	33	42-52	0.6	0.3
Cement, portland	84-100	1345-1600	24 to 30	40-50	0.40-0.80	0.30
Clay	106-138	1700-2200	15 to 40	50-90	0.2-0.5	0.36-0.7
Coal, bituminous	50-65	800-1040	32 to 44	33-68	0.55-0.85	0.30
Coal, anthracite	60-70	960-1120	24 to 30	40-45	0.45-0.50	0.30
Coke	32-61	515-975	35-45	50-60	0.50-0.80	0.50-0.65
Flour	38	610	40	23-30	0.30	0.30
Fly ash	50-112	865-1800	35-40	37-42	0.60-0.80	0.47-0.70
Gravel	100-125	1600-2000	25 to 35	36-40	0.40-0.45	0.29-0.42
Grains (small): wheat, corn, barley, beans (navy, kidney), oats, rice, rye	44-62	736-990	20 to 37	28-35	0.29-0.47	0.26-0.42
Gypsum, lumps	100	1600	38-40	45-62	0.5-0.8	0.38-0.48
Iron ore	165	2640	40-50	50-70	0.5-0.8	0.4-0.7
Lime, calcined, fine	70-80	1120-1280	30-35	35-45	0.5-0.7	0.4-0.6
Lime, calcined, coarse	58-75	928-1200	40	40-45	0.5-0.8	0.3-0.5
Limestone	84-127	1344-2731	39-43	45-80	0.6-0.8	0.55-0.70
Manganese ore	125	2000	40			
Sand	100-125	1600-2000	25 to 40	30-50	0.40-0.70	0.35-0.50
Soybeans, peas	50-60	800-960	23		0.25	0.20
Sugar, granular	53-63	1000	35	33-40	0.43	

*The properties listed here are illustrative of values which might be determined from physical testing. Ranges of values show the variability of some materials. Design parameters should preferably be determined by test and the values shown used with caution. See Commentary on Section 4.4.1.

Tabla 3.4 – Ejemplo de propiedades físicas de materiales granulares (Tabla 4-4 ACI 313R-97)

- ANSI/ASAE EP433 DEC1988 (R2011) “Loads exerted by free-flowing grain on bins”

La última versión de esta *Práctica de Ingeniería* fue adoptada por ASAE (American Society of Agricultural Engineers) en diciembre de 1988 y aprobada por ANSI (*American National Standards Institute*) en septiembre de 1991. Esta fue reafirmada anualmente por tres años y revisada editorialmente por ASAE en marzo del 2000. La versión actual fue reafirmada por ANSI en febrero de 2011²⁷.

Cómo el título lo indica, esta publicación fue desarrollada solamente para recipientes de almacenamiento en condiciones de flujo libre. Además, esta aplicación está limitada a flujo en silos (esto es, descarga) de patrón clásico denominado Funnel Flow (Flujo de Embudo), a pesar de que en esta publicación este término está restringido al flujo de embudo en el cual el canal de flujo no interseca la pared del cilindro. (El flujo de embudo es definido como un flujo patrón en el cual alguna parte del material a granel sólido almacenado permanece estacionaria, mientras el resto está en movimiento). Este estado de flujo patrón “ocurrirá normalmente en silos que tienen una relación H/D menor que 2.0”. (H es la altura total del material desde el punto más bajo de descarga, D es el diámetro del compartimiento o silo). Si la tolva o canal de flujo fuera abierto en más de aproximadamente 14° (a partir de la vertical), esto haría colisionar el material contra la pared del cilindro. Esta Práctica de Ingeniería llama a esta condición como *Plug Flow (Flujo de Tapón)* y especifica que un factor de sobre-presión, F, igual a 1.4, debe usarse cuando se calculan las presiones en las paredes de un silo.

Para el coeficiente de fricción entre el material y la pared, se incluye una simple tabla de valores, similar a la incluida en el ACI 313-97, pero los valores son diferentes, esto se muestra en la Tabla a continuación:

²⁷ ANSI/ASAE EP433 DEC 1998 (R2011), *Loads exerted by free-flowing grain on bins*, American Society of Agricultural, Physical and Engineering Sciences, Series A, 356(1747), 1996, pp. 2667-2684.

Wall surface	ANSI/ASAE EP433 2011 Table 1	ACI 1997 Table 4-A
Steel	0.30	0.26 -0.42
Concrete	0.40	0.29 – 0.47

Tabla 3.5 – Coeficientes de fricción para granos en dos tipos de superficies (Tabla 2 de ANSI/ASAE EP433 R2011)

Esta publicación está limitada a silos en condición centrada de carga y descarga, por lo que el caso de carga excéntrica no está incluido. Las cargas del tipo *parcial* tampoco se encuentran incluidas, aunque es bien reconocido que se desarrolla una presión no uniforme durante un llenado o vaciado simétrico.

- AS 3774-1996 “*Loads on bulk solids containers*”

La primera publicación australiana de presiones inducidas por sólidos en las paredes de silos fue titulada como “Directrices para la evaluación de las cargas en contenedores de productos a granel” (Guidelines for the assessment of loads on bulk solids containers). Esta fue publicada en 1986 por un grupo de trabajo de la Institución Australiana de Ingenieros (“*Australian Institution of Engineers, National Committee of Structural Engineering*”) dedicado a contenedores y silos. Este trabajo fue continuado por la Norma Australiana (Australian Standard AS 3774), la cual fue publicada por primera vez en 1990 y luego, revisada en 1996²⁸. Esta Norma puede ser considerada como uno de los precursores de la EN 1991-4:2006, dado que Michael Rotter fue el autor principal de ambos documentos.

A diferencia de la EN 1991-4:2006 esta Norma no incluye las “*clases de complejidad*” (*Action Assessment Classes*), pero incluye mayores y menores valores de parámetros característicos del material almacenado. Esta Norma incluye cuatro clasificaciones de cargas (carga muerta, carga normal de servicio, cargas ambientales, y cargas accidentales) y una tabla describiendo las combinaciones de carga que deben ser consideradas. Algunas acciones son pasadas por alto, como las desviaciones geométricas admisibles en las dimensiones del silo y efectos de flexibilidad en la pared.

A pesar de que incluye métodos para calcular las cargas de viento y cargas sísmicas, estos aspectos es quizá mejor manejarlos utilizando los Códigos Generales de Diseño más actualizados como el Código de Construcción Universal (Universal Building Code – UBC).

Condiciones de carga

La siguiente tabla resume varias condiciones de carga cubiertas por los 4 Códigos mencionados:

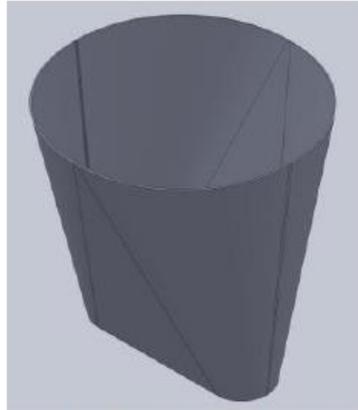
²⁸ AS 3774-1996, *Loads on bulk solids containers*, Standard Australia, Homebush, NSW, Oct. 1996.

Load condition	EN 1991-4:2006	ACI 313-97	ANSI/ASAE EP433-1988	AS3774-1996
Hopper geometry				
-Symmetric single cone	Yes	Yes	Yes	Yes
-Square pyramid	Yes	No	No	Yes
-Wedge with vertical end walls	Yes	No	No	Yes
Fill and discharge conditions				
-Patch loads	Yes	No	No	No
-Eccentric fill and discharge	Yes	Poorly	No	Yes
-Mass flow	Yes	No	No	Yes
-Funnel flow				
-Pipe flow	Yes	Yes	Yes	Yes
-Mixed flow	Yes	No	Yes	No
-Expanded flow	No	No	No	No
-Impact loads on filling	No	No	No	Yes
-Silo quaking	No	No	No	No
Internals	No	No	No	Yes
Thermal Ratcheting	Yes	No	Yes	Yes
Grain swelling	No	No	Yes	Yes
Effects of gas pressures				
-Completely Fluidized contents	Yes	Yes	No	Yes
-Partially fluidized contents	No	No	No	No
External equipment	No	No	No	Yes

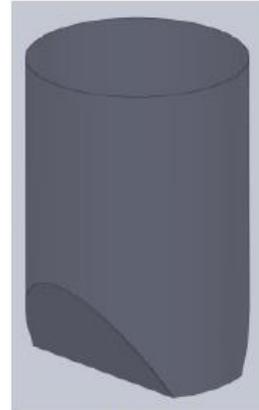
Tabla 3.6 – Condiciones de carga cubiertas por varios Códigos de diseño de silos.

Geometría de tolvas

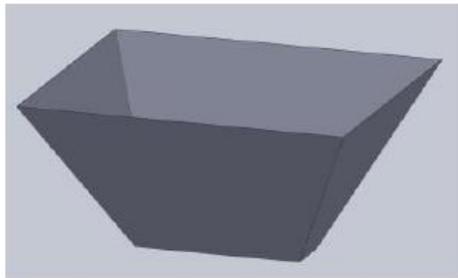
Sólo unas pocas y comunes geometrías de tolvas son cubiertas por los 4 Códigos estudiados. En la práctica industrial, muchas otras geometrías de tolvas son comúnmente usadas, incluyendo: transición, cincel, cuña con paredes convergentes, pirámide asimétrica, cono asimétrico, tolvas múltiples juntas (unidas) una con otra (por ejemplo, un cono debajo de otro cono, etc.). Ninguna de estas geometrías es cubierta por alguno de estos códigos. El Código EN 1991-4:2006 señala que hay problemas en algunos de estos casos, pero que simplemente requiere un análisis racional para tratar dichos problemas.



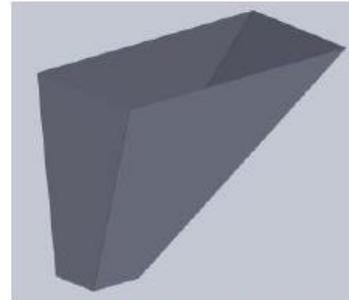
a) TRANSICIÓN (TRANSITION)



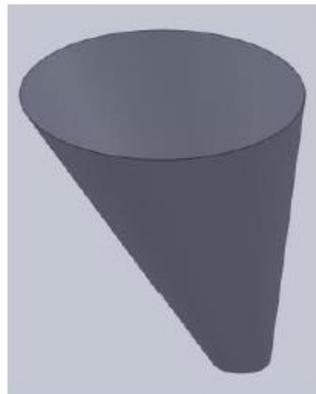
b) CINCEL



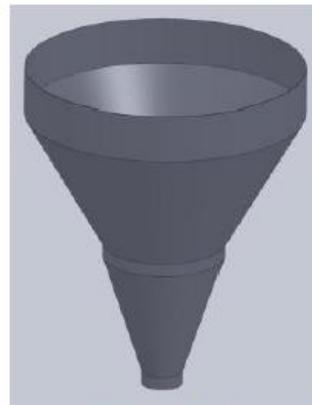
c) CUÑA CON PAREDES CONVERGENTES



d) PIRÁMIDE ASIMÉTRICA



e) CONO ASIMÉTRICO



f) TOLVA MÚLTIPLE

Figura 3.57 – Tipos de tolvas

Patch Loads – Carga Parcial

Aún el simple caso de carga o descarga simétrica envuelve asimetrías accidentales que pueden resultar en presiones no uniformes alrededor de la circunferencia del silo²⁹.

Patrón de flujo

Sólo dos de estos Códigos (EN 1991-4:2006 and AS 3774-1996) cubren el patrón de flujo llamado *Mass Flow (flujo masivo)*, el cual ocurre cuando las paredes de la tolva del silo, son lo suficientemente suaves y empujadas que todo el material está en movimiento cada vez que algo del mismo se retira.

El *Funnel Flow (flujo de embudo)* ocurre cuando hay menor suavidad en las paredes de la tolva, el cual resulta en una parte de material estancada, mientras que el resto fluye.

Los cuatro Códigos usan algunos términos diferentes para describir este flujo de embudo. EN 1991-4:2006 y AS 3774-1996 usan el término flujo mezcla para describir la condición en la que el canal de flujo choca la pared del silo (fenómeno comentado al analizar el Código ANSI/ASE EP433), mientras que ANSI/ASAE EP433 llama a este fenómeno *Plug Flow* (flujo de tapón). EN 1991-4:2006 y AS 3774-1996 usan el término *Pipe Flow* (flujo en tubo) para describir la condición en que el canal de flujo no colisiona contra la pared del silo. *Ninguno de estos Códigos cubre el **Expanded Flow** (Flujo Expandido), el cual es una combinación del Mass Flow y Funnel Flow.*

Estructuras internas

Ciertas estructuras son a menudo colocadas dentro de los silos para alterar el patrón de flujo, facilitando la introducción de gas en la masa ensilada para procesar, calentar, enfriar, etc., reducir la presión en las paredes del silo, o reducir las cargas en la región de salida. Estas estructuras incluyen los llamados *Chinese Hats (Sombreros Chinos)*, *Cone-in-Cone (Cono dentro de Cono)*, y *Cross Beams (Barras Cruzadas)*. Las cargas en tales estructuras internas pueden ser extremadamente altas, y muchas tienen fallas o causan fallas en los silos. También alteran la presión en las paredes del silo en el entorno de la pieza en cuestión, pero los cálculos son más bien simplistas y no incluyen los efectos de los componentes internos en la pared del silo. El Código EN 1991-4:2006 identifica estos problemas y requiere un análisis racional para abordarlos.

²⁹ - J. Nielsen, Pressures from flowing granular solids in silos, in Phil. Trans. Royal Society of London: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Series A, 356(1747), 1996, pp. 2667-2684.

- Z. Zhong et al, The sensitivity of silo flow and wall pressures to filling method, in Engineering Structures, 23(7), 2001, pp. 756-767.

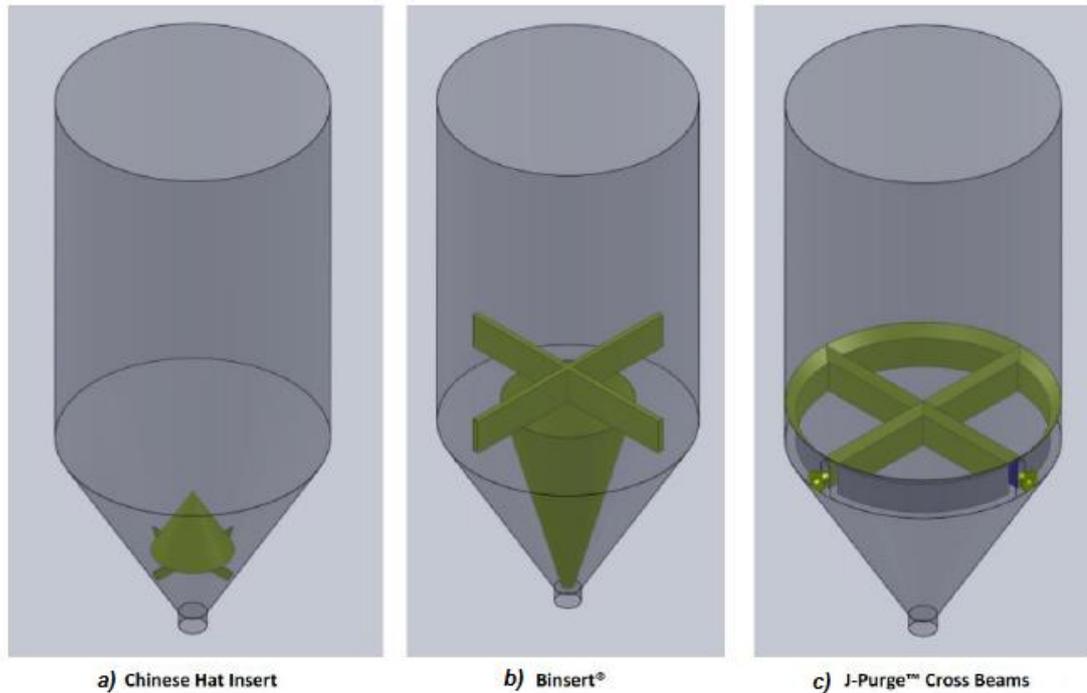


Figura 3.58 – Estructuras internas

Propiedades de materiales

Los cuatro códigos comienzan con la premisa de que el material sólido a granel almacenado está en condición de flujo libre. Desafortunadamente, la gran mayoría de los materiales sólidos ensilados, no están en esta categoría. Los Códigos EN 1991-4:2006 y AS 3774-1996 contemplan que dicha condición puede ser usada cuando el flujo libre dentro del silo, puede ser garantizado mediante condiciones de diseño. Tampoco el Código ACI 313-97 ni el ANSI/ASAE EP433 ofrecen orientación alguna sobre como diseñar silos de almacenamiento para condiciones de flujo *no* libre de sólidos a granel.

Los cuatro Códigos recomiendan que, de ser posible, las propiedades relevantes del material sólido a granel, sean determinadas mediante ensayos. Sin embargo, todos ellos proveen una tabla con valores típicos. Estas propiedades deben ser utilizadas con precaución, particularmente las tablas de ACI 313-97 y ANSI/ASAE EP433, tal como fue comentado anteriormente. Los cuatro Códigos advierten acerca del exceso de confianza de los valores tabulados, pero la advertencia puede ser fácilmente pasada por alto.

Hinchazón de granos

Esta es una conocida causa de fallas en silos. ANSI/ASAE EP433 contempla en el artículo 4.4.2.1 que *un incremento de humedad del 4% o más durante el almacenamiento, puede causar presiones laterales o incrementar varias veces las condiciones estáticas de carga*. Lo siguiente se denota en los comentarios:

“5.4.2 Los granos almacenados son higroscópicos; esto es, que ellos absorben humedad de las fuentes de líquido o de la atmósfera. Cuando los granos absorben humedad, se expanden. Cuando los granos están confinados en una estructura, la

expansión es restringida. La consecuencia es un incremento de presión en la pared del recipiente”

La información acerca de este asunto en la literatura, es limitada en número y alcance, pero algunos estudios han reportado que la presión lateral se incrementa en un factor de seis cuando la humedad del grano se incrementa en un 4%, y en un factor de diez para un 10% de incremento de humedad del grano.

El Código AS 3774-1996 cubre este fenómeno, pero ninguno de los otros dos códigos lo hacen.

Efecto de las presiones de gas

A veces, se incorpora gas al material almacenado a causa de reprimir reacciones químicas, frío o calor del material ensilado. Si se incorpora suficiente gas, puede desarrollarse una completa condición de fluidificación, y las presiones en las paredes cambian a una condición esencialmente hidrostática. ACI 313-97, EN 1991-4:2006 y AS 3774-1996 proveen directivas para esta condición.

Equipamiento externo

Equipamiento externo tales como vibradores eléctricos o neumáticos, vibradores de descarga, dispositivos localizados de aireación y cañones de aire imponen significativas fuerzas a la estructura del silo que deben ser tenidas en cuenta. Esto puede afectar al material sólido almacenado de tal forma que sus propiedades cambien, resultando diferentes cargas en el silo. El Código AS 3774-1996 provee unas limitadas directivas para este fenómeno. Los tres códigos restantes no cubren este tema en absoluto.

Conclusiones Normativas

El conocimiento de las cargas aplicadas sobre las paredes de los silos y los intervalos de aplicación (si los hay) son extremadamente importante. Tales cargas no deben ser ignoradas si se quiere diseñar un silo estable y seguro.

Muchos progresos se han logrado en los últimos 50 años en cuanto a la provisión de guías para la determinación de cargas en silos para la ingeniería estructural. EN 1991-4:2006 presenta un significativo avance sobre todos los códigos, pero el mismo, inclusive, no cubre muchos estados de carga.

Para los estados de carga no cubiertos por los códigos, en el diseño de la ingeniería estructural pueden contemplarse dos opciones:

- Ser extremadamente conservador en la estimación de las cargas aplicadas. Esta aproximación puede ser bastante costosa y aun así puede no ser lo suficientemente conservadora como para evitar la falla del silo.
- Consultar con ingenieros estructurales que tengan una considerable experiencia en el diseño de silos.

3.3.6 Situación reglamentaria actual en la Argentina

A partir del 1 de enero de 2013, entraron en vigencia los nuevos reglamentos CIRSOC (Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales para las Obras Civiles) e INPRES-CIRSOC aprobados por la *Resolución N° 247/2012, publicada en el Boletín Oficial del 4 de Julio de 2012.*

El anterior cuerpo reglamentario *CIRSOC* se basó en las normas *DIN* alemanas; el mismo con el correr del tiempo fue quedando paulatinamente desactualizado respecto al estado del arte, lo que motivó un profundo debate acerca de la necesidad de su actualización y la nueva línea Normativa a adoptar. Las dos posibles posturas fueron:

- La escuela europea a través de los Eurocódigos.
- La escuela estadounidense a través del Código ASCE/ACI/AISC

Mayoritariamente el consenso se inclinó por la escuela estadounidense, por lo que se tomó a la misma como base.

Reglamentos para estructuras de hormigón armado

Marco de aplicación del CIRSOC 201/82 (Basado en DIN 1045-78)

Este Reglamento aplica específicamente a las estructuras de edificios destinados a vivienda, locales públicos, depósitos e industrias, construidas con hormigón simple, armado o pretensado de densidad normal y contextura compacta.

También es de aplicación básica para otros tipos de estructuras como puentes, chimeneas, muros de contención, silos, etc., siempre que no existan otras reglamentaciones particulares u otras especificaciones.

No es aplicable en el caso de aquellas estructuras en que el hormigón se encuentre sometido a temperaturas mayores a 70 °C en condiciones normales de servicio.

Marco de aplicación del CIRSOC 201/05 (Basado en ACI 318-05)

Específicamente, el CIRSOC 201/05, es de aplicación a las Estructuras de Hormigón sin armar, armado y pretensado, cuya masa por unidad de volumen del material seco a masa constante se encuentre comprendido entre 2000 kg/m³ y 2800 kg/m³. Así mismo, se aclara que no es de aplicación a estructuras de Hormigón Liviano, Hormigón Masivo, Estructuras Mixtas de Acero-Hormigón y Estructuras que bajo condiciones de servicio se encuentran sometidas a temperaturas mayores a 70°C.

Criterios de seguridad estructural

La amplia mayoría de las variables que definen demandas y capacidades estructurales tienen un valor *incierto*, son de naturaleza *aleatoria*, y en teoría puede conocerse su función de densidad de probabilidades. Por lo que, se concluye que *el problema de la seguridad estructural es de tipo probabilístico*.

Si llamamos *Q* al efecto del conjunto de las variables que determinan las acciones sobre la estructura:

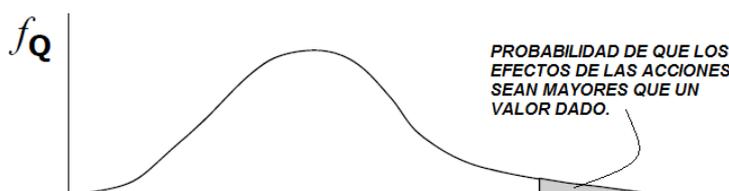


Figura 3.59 – Curva distribución-frecuencia para efectos de acciones

Llamando R a la *capacidad disponible*, obtenida considerando el conjunto de variables que determinan la resistencia:

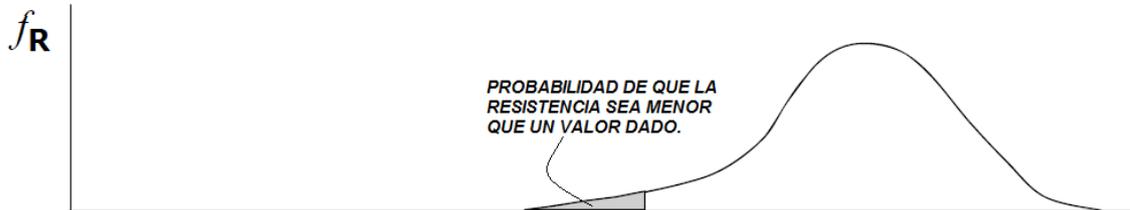


Figura 3.60 – Curva distribución-frecuencia para capacidades disponibles

Se define la *Falla* como la situación no deseada en la que se registran valores Q (*demanda*) que superan los valores de R (*capacidad*):

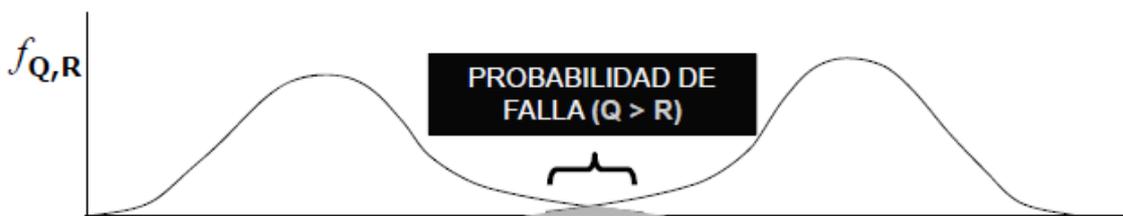


Figura 3.61 – Superposición de curvas distribución-frecuencia para efectos de acciones y capacidades disponibles

Se define como *Margen de Seguridad (MS)* a $(R - Q)$, la *Falla*, quedará definida por el evento $MS < 0$.

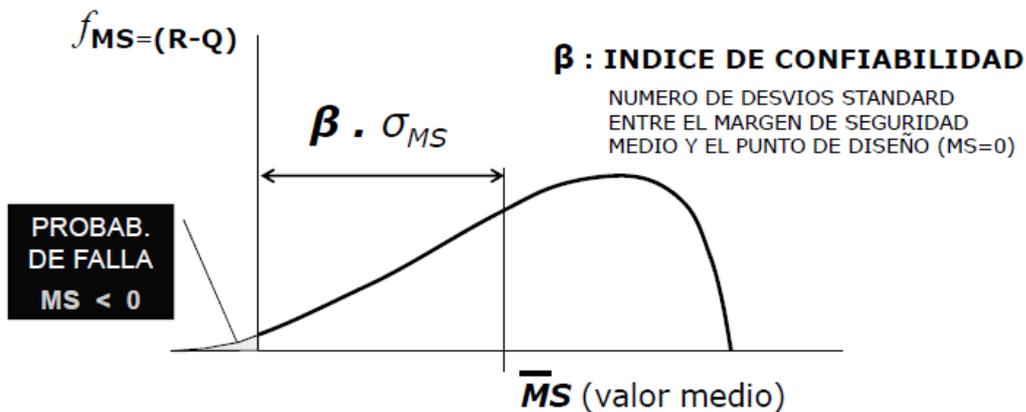


Figura 3.62 – Curva distribución-frecuencia para el margen de seguridad

Los valores de β varían de 3 a 4, en correspondencia con el orden de probabilidades de falla en seguridad estructural ($PF \approx 10^{-4}/10^{-5}$).

Por otra parte, los reglamentos, no pueden abordar la verificación de la seguridad de las estructuras proyectadas o existentes con un planteo probabilístico absoluto. Se recurre entonces a prescripciones *deterministas* (pasa / no pasa).

De manera indirecta, se hace intervenir la incertidumbre acerca de los valores de las variables (Planteo Semi-Probabilista).

Estados Límites

Un Estado Límite, es una condición que representa el límite de utilidad de una estructura o de una parte de ella. O sea, es aquél más allá del cual no quedan satisfechos los comportamientos requeridos por el proyecto. Tenemos dos tipos de Estados Límites. Unos denominados de *Resistencia* (o último), los cuales definen la seguridad contra las cargas extremas durante la vida útil de la estructura. Y otros, de *Servicio*, los cuales definen los requerimientos funcionales.

Reglamentos con factor de seguridad único

Este tipo de reglamentos, como el cuerpo CIRSOC 82, vigente hasta hace unos años, se basan en un *factor de seguridad único*, el cual abarca las incertidumbres referidas a capacidades y acciones, de, y sobre, la estructura, respectivamente. La relación representativa del método es:

$$R_U \geq \gamma \cdot Q_n \quad [98]$$

Bajo este criterio, la *Resistencia Última* de los elementos que componen la estructura debe ser mayor a la demanda sobre la misma, en donde esta demanda es el *efecto de las acciones incrementadas por un factor de seguridad*.

Bajo esta metodología, la estimación de la Resistencia Última tiene en cuenta *valores característicos de la capacidad de los materiales*, calculados de manera probabilista. Para estos valores, se toman cuantiles bajos, o sea valores relativamente pequeños de las resistencias. En cuanto a los *valores característicos de las acciones de diseño*, como lo es el caso del peso propio, las sobrecargas, el viento y el sismo; son calculados de manera probabilística a partir de datos estadísticos para ciertos valores de recurrencias. Para estos valores característicos con base probabilística, se toman cuantiles altos, o sea, valores relativamente altos de las cargas.

Bajo esta metodología de verificación de seguridad, solo se puede adaptar el valor de su factor o coeficiente de seguridad para *estados límites* con falla poco dúctil, o sin preaviso, como es el caso de la compresión en el hormigón.

Reglamentos con factores de carga y resistencia

Las incertidumbres en la determinación de las cargas y en la de sus efectos (resistencias requeridas), así como en las resistencias reales (resistencias de diseño) de los miembros, son distintas para cada tipo de carga, método de cálculo, tipo de elemento y sollicitación, tecnología de ejecución y grado de control de la misma, etc. Por ello, *con la adopción de un único coeficiente de seguridad, no es posible obtener una confiabilidad uniforme ni totalmente previsible*, para cada situación de carga de la estructura, ni para cada elemento o punto de la misma. Por ello, estos reglamentos basados en el método denominado L.R.F.D. (Load and Resistance Factor Design, Diseño por Factores de Carga y Resistencia), fijan factores distintos para cada tipo de carga y de resistencia, y plantean el proyecto por Estados Límites con condiciones mínimas acotadas, a cumplir por los modelos y procedimientos de cálculo.

Los elementos de la estructura se diseñarán para cumplir con el siguiente criterio:

$$\text{RESISTENCIA REQUERIDA} \leq \text{RESISTENCIA DE DISEÑO}$$

La Resistencia de Diseño, se estima analizando la *capacidad* de las secciones siguiendo los procedimientos indicados y prescriptos para cada elemento y tipo de sollicitación.

La Resistencia Requerida, se estima calculando las *solicitaciones* en la estructura cargada, con las acciones y combinaciones prescriptas y con los métodos de análisis indicados.

El método L.R.F.D., puede expresarse en general por la siguiente inecuación:

$$\sum \gamma_i \cdot Q_i \leq \phi \cdot R_n \quad [99]$$

En donde:

- Σ = Sumatoria;
- i = Tipo de carga; por ejemplo: carga permanente, sobrecarga útil, viento;
- Q_i = Efecto de la carga nominal i ;
- γ_i = Factor de carga correspondiente a la carga i que produce el efecto Q_i ;
- $\Sigma \gamma_i \cdot Q_i$ = Resistencia Requerida;
- Φ = Factor de resistencia correspondiente a R_n
- R_n = Resistencia nominal al efecto;
- $\Phi \cdot R_n$ = Resistencia de Diseño.

El miembro izquierdo de la inecuación anterior, es la *Resistencia Requerida* y es la suma de los efectos (solicitaciones de sección del mismo tipo) producidos en el elemento por las acciones supuestas en el estado de carga considerado, multiplicadas por sus respectivos *factores de carga* γ_i , la mayoría, *mayores o iguales a la unidad*, y calculados los efectos por el análisis estructural. El miembro derecho de la inecuación, es la *Resistencia de Diseño* a un efecto, provista por el elemento estructural en cuestión, y es la resistencia nominal basada en la teoría y en las propiedades nominales del material y de la sección, multiplicada por el *factor de resistencia* Φ , el cual es *menor o igual a la unidad*.

La Resistencia Nominal del elemento o estructura, se *reduce* por incertidumbres como lo son las propiedades de los materiales, falta en la precisión en las dimensiones del elemento al construir y el propio cálculo de la resistencia nominal.

Las Acciones sobre el elemento o estructura, se *umentan* por incertidumbres en los valores de las acciones durante la vida útil de la estructura y por la simultaneidad de acciones.

Con la Resistencia Nominal reducida y de las Acciones mayoradas, resulta la inecuación comentada.

Comentarios respecto del método L.R.F.D.

Los factores de combinación tienen en cuenta el nivel de conocimiento que se tiene acerca de las acciones, su actuación y recurrencia.

Los factores de combinación a su vez, son factores o coeficientes de simultaneidad. Al mayorar las acciones, no solo se está contemplando los conocimientos que se tienen acerca de la misma, sino también, la simultaneidad de actuación entre dichas acciones. Es por esto que se pueden encontrar valores de coeficientes menores a la unidad.

Las solicitaciones que resultan de las diferentes combinaciones son *equiprobables*. Por lo que se tendrá contemplada, una probabilidad de ocurrencia para las acciones mayoradas similar para todas las combinaciones (entre ellas).

Las combinaciones son independientes de los materiales estructurales. Se utilizan por lo general las mismas combinaciones de carga en reglamentos para distintos materiales. Esto es muy útil para aplicar en proyectos alternativos que utilicen diferentes materiales o en construcciones mixtas.

El método L.R.F.D. brinda confiabilidad uniforme para proyectos de tipologías estructurales muy distintas. Mediante el uso calibrado de los factores de carga y resistencia, se obtiene confiabilidad uniforme para diversas tipologías estructurales, funcionamientos y tipo de acciones.

Verificaciones de requerimientos en servicio se realizan con combinaciones de estados de cargas individuales sin mayorar. También para el caso de verificación de tensiones en el terreno bajo fundaciones (no se dispone de factores de carga y resistencia del suelo acorde al margen de seguridad al que aplica el método).

Combinaciones de acciones del CIRSOC 201 2005

El efecto de una o más cargas *no actuando simultáneamente* debe ser investigado por el Proyectista o Diseñador Estructural.

Las combinaciones que el Proyectista o Diseñador Estructural, debe contemplar, *como mínimo*, son:

$$\bullet \quad U = 1,4 (D+F) \quad (9-1)$$

$$\bullet \quad U = 1,2 (D +F+T) + 1,6 (L+ H) + 0,5 (L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) \quad (9-2)$$

$$\bullet \quad U = 1,2 D + 1,6 (L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) + (f_1 L \text{ ó } 0,8 W) \quad (9-3)$$

$$\bullet \quad U = 1,2 D + 1,6 W + f_1 L + 0,5 (L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) \quad (9-4)$$

$$\bullet \quad U = 1,2 D + 1,0 E + f_1 (L + L_r) + f_2 S \quad (9-5)$$

$$\bullet \quad U = 0,9 D + 1,6 W + 1,6 H \quad (9-6)$$

$$\bullet \quad U = 0,9 D + 1,0 E + 1,6 H \quad (9-7)$$

siendo:

$f_1 = 1,0$ para lugares de concentración de público donde la sobrecarga sea mayor a $5,00 \text{ kN/m}^2$ y para playas de estacionamiento y garages.

$f_1 = 0,5$ para otras sobrecargas.

$f_2 = 0,7$ para configuraciones particulares de cubiertas (tales como las de dientes de sierra), que no permiten evacuar la nieve acumulada.

$f_2 = 0,2$ para otras configuraciones de cubierta.

excepto en los siguientes casos:

- Quando la carga de viento W no haya sido reducida por un factor de direccionalidad (ver el Reglamento **CIRSOC 102-2005**), se permite utilizar $1,3 W$ en lugar de $1,6 W$, en las combinaciones (9-4) y (9-6).
- El factor de carga para H puede ser considerado igual a 0 en las combinaciones (9-6) y (9-7) si la acción estructural debida a H contrarresta o neutraliza la acción debida a W ó a E . Cuando la presión lateral del suelo contribuya a resistir acciones estructurales debidas a otras fuerzas, **la misma no se debe incluir en H** , sino en la **resistencia de diseño**.

En donde:

- D = Peso propio o carga permanente;
- L = Sobrecarga útil de ocupación y equipos;
- L_r = Sobrecarga útil de cubierta;
- S = Acción de la nieve;
- R = Carga de lluvia inicial o hielo;
- W = Acción del viento;
- E = Acción sísmica;
- F = Líquidos de presencia continuada y altura definida;
- H = Peso y empuje lateral del suelo;
- T = Autotensiones, soldadura, cedimientos de apoyo.

Factor de reducción de resistencia del CIRSOC 201 2005

El valor del factor de reducción Φ , para secciones que presenten una rotura dúctil (deformación específica neta de tracción en el acero más traccionado $\epsilon_t \geq 5\%$), es $\Phi = 0.90$. En general:

- Secciones controladas por tracción: $\Phi = 0.90$;
- Secciones controladas por compresión:
 - a) Elementos armados con zunchos: $\Phi = 0.70$;
 - b) Elementos armados con otro tipo de armadura: $\Phi = 0.65$;
- Corte y torsión: $\Phi = 0.75$;
- Aplastamiento en el hormigón excepto para zonas de anclaje de postesado y modelos de bielas $\Phi = 0.65$;
- Zonas de anclaje de postesado: $\Phi = 0.85$;
- Modelos de bielas, puntales, tensores, zonas nodales y de apoyo de estos modelos: $\Phi = 0.75$.

Conclusiones Respecto de la Aplicación de Reglamentos de Seguridad

El proyecto de estructuras en general, requiere la disposición de normativa que represente una guía para los siguientes aspectos:

Reglamentos de acciones y combinaciones. Tipificación y Cuantificación de la demanda a la que estará sujeta la estructura durante su vida útil.

Definición de los Estados Límites de Servicio. Criterios de diseño y construcción para lograr condiciones de servicio adecuadas a la funcionalidad y durabilidad necesarias.

Definición de los Estados Límites Últimos. Criterios de seguridad y especificación de los métodos que son necesarios aplicar para asegurar una probabilidad de supervivencia aceptable.

Reglamentos de Materiales. Métodos de dimensionado y verificación para materializar los puntos anteriores con diferentes materiales de construcción.

La aplicación del reglamento debe permitir conocer la verdadera performance esperable y la probabilidad de falla real de la estructura y deben ser representativos de las condiciones de uso. No interesa si dichas condiciones son más o menos exigentes, deben ser *reales* y *compatibles*.

Con respecto al método con coeficiente único de seguridad, se concluye que este ha quedado obsoleto y prácticamente ha dejado de usarse.

Otro aspecto importante es aplicar el reglamento dentro de los límites de su marco de aplicación.

“Es indispensable contar con un cuerpo reglamentario muy completo, integrado y coherente que se brinde al servicio de los ingenieros proyectistas y de la sociedad en general.”

3.3.7 Normativa para el cálculo de silos en el ámbito nacional

Dada la comentada situación reglamentaria actual de nuestro país, se plantea la posibilidad de optar entre dos tipos de normativa referida al proyecto y construcción de silos de hormigón armado. Por un lado, se tienen las normas IRAM (Instituto Argentino de Normalización y Certificación), 11705 y 11706; por el otro, tenemos el Código ACI 313-97, introducido brevemente en la sección 3.3.5.

En cuanto a las Normas IRAM, podemos decir, que su aplicación resultaría razonable si se considera que, dentro del ámbito nacional, son las únicas normativas específicamente referidas al proyecto y cálculo de silos de hormigón armado vigentes en la actualidad. Por otro lado, teniendo en cuenta la coherencia reglamentaria, no compatibilizan directamente con el actual reglamento CIRSOC 201 2005 dada sus diferencias de origen.

Respecto al Código ACI 313 97, en posición opuesta a las normas IRAM, no son oficiales a nivel nacional de nuestro país, sin embargo, se adapta coherentemente al reglamento CIRSOC 201 2005.

A continuación, se presentan los aspectos fundamentales de cada norma y luego se obtendrá una conclusión, acerca de cuál de ellas (según el autor) es recomendable adoptar.

Código ACI 313-97 y Comentarios (ACI 313r 97)

Esta normativa del ACI, proporciona los requerimientos de materiales, diseño y construcción para silos de hormigón, silos de duelas y estructuras tipo “stacking tubes”, utilizadas en el almacenamiento de materiales granulares. Esto incluye recomendaciones para el diseño y construcción de silos construidos in situ, silos prefabricados de hormigón armado, y postesados.

Las estructuras tipo “stacking tubes” mencionadas en el párrafo anterior, son un tipo de estructura utilizada para almacenar materiales sólidos a granel al aire libre. Consiste en un cilindro vertical relativamente esbelto de carga superior y con aberturas laterales que permiten que el material fluya hacia afuera formando una pila cónica que rodea el cilindro.



Figura 3.63 – Stacking Tube

Tanto los silos como los *stacking tubes*, son estructuras especiales que poseen problemas también especiales, no encontrados en el diseño normal de edificios. Mientras que esta norma hace referencia al Código ACI 318 para muchos requerimientos, también, contempla especiales requerimientos para distintos tipos de flujo de material a granel, consecuencia de las características del propio material y de la estructura que lo almacena.

Aspectos principales de la norma y sus comentarios.

Además de la breve introducción a este Código, realizada en comparativa con otros Códigos de diseño de silos expuesta en la sección 3.3.5, se mencionan a continuación los principales aspectos del Código y sus comentarios de manera descriptiva, referidos al proyecto y construcción de *silos cilíndricos de hormigón armado*, a los que se refiere el presente Trabajo. Para obtener valores específicos, se recomienda recurrir al propio Código.

Nomenclatura del Código ACI 313-97

Las referencias de algunas variables de la nomenclatura expuesta a continuación, están apuntadas a figuras presentes en ACI 313-97.

A	= effective tension area of concrete surrounding the tension reinforcement and having the same centroid as that reinforcement, divided by the number of bars. When the reinforcement consists of different bar sizes, the number of bars shall be computed as the total area of reinforcement divided by the area of the largest bar used.	q_y	= vertical pressure at a distance h_y below top of hopper. See Fig. 4-2.
D	= dead load or dead load effect, or diameter	s	= bar spacing, in.
E_c	= modulus of elasticity for concrete	v_n	= initial friction force per unit area between stored material and hopper surface calculated
L	= live load or live load effect	w	= design crack width, in. or lateral wind pressure
M_t	= thermal bending moment per unit width or height of wall (consistent units)	α	= angle of hopper from horizontal. See Fig. 4-2.
P_{nw}	= nominal axial load strength of wall per unit perimeter	α_c	= thermal coefficient of expansion of concrete
R	= ratio of area to perimeter of horizontal cross-section of storage space	γ	= weight per unit volume for stored material
T	= temperature or temperature effect	θ	= angle of hopper from vertical. See Fig. 4-2.
ΔT	= temperature difference between inside face and outside face of wall	μ'	= coefficient of friction between stored material and wall or hopper surface
U	= required strength	ν	= Poisson's ratio for concrete, assumed to be 0.2
V	= total vertical frictional force on a unit length of wall perimeter above the section in question	ϕ	= strength reduction factor or angle of internal friction
Y	= depth from the equivalent surface of stored material to point in question.	ϕ'	= angle of friction between material and wall and hopper surface
d_c	= thickness of concrete cover taken equal to 2.5 bar diameters, or less. See Fig. 4-3.	ρ	= angle of repose.
e	= base of natural logarithms	k	= p/q
f'_c	= compressive strength of concrete	p	= initial (filling) horizontal pressure due to stored material
f_s	= calculated stress in reinforcement at initial (filling) pressures	p_n	= pressure normal to hopper surface at a depth h_y below top of hopper. See Fig. 4-2.
h	= wall thickness	q	= initial (filling) vertical pressure due to stored material
h_h	= height of hopper from apex to top of hopper. See Fig. 4-2.	q_o	= initial vertical pressure at top of hopper
h_s	= height of sloping top surface of stored material. See Fig. 4-2.		
h_y	= depth below top of hopper to point in question. See Fig. 4-2.		

Capítulo 1: Generalidades

Introducción

Se indica inicialmente, que todas las presiones ejercidas por el material ensilado, independientemente del tipo de flujo, deberán ser calculadas por los métodos presentados en el propio Código. Por otra parte, todas las secciones del ACI 318 que puedan ser aplicables, deben efectivamente aplicarse.

Definiciones

El Código define al término *silo* haciendo referencia a todo contenedor vertical utilizado para el almacenamiento de materiales sólidos a granel.

Da nombres alternativos, como "*bins*" y "*bunkers*", que son usados en diferentes localidades, pero para el propósito del presente Código, todas estas estructuras son consideradas bajo el nombre de *silos*.

Se menciona la existencia de dos tipos de metodología constructiva. Un tipo denominado “*Slipformed*”, basado en el uso de encofrados típicos de 1.2 m de altura, los que se van desplazando hacia arriba a medida que la construcción avanza. Es básicamente un tipo de encofrado deslizante.

Otro tipo, denominado “*Jumpformed*”, basado en tres módulos típicos de encofrado de 1.2 m de altura, en donde el módulo inferior es trasladado hacia arriba, a medida que el hormigón va adquiriendo la resistencia correspondiente para soportar el peso propio y el avance de la construcción.

Se define un tipo de silo llamado “*Stave silos*”, los cuales son silos ensamblados con pequeñas unidades de hormigón prefabricadas, tipo duelas, y usualmente fijadas juntas mediante aros ajustables de acero. Dado que esta tipología constructiva no aplica directamente a este Trabajo, no se comentará demasiado al respecto.

Dibujos, especificaciones y cálculos

En este punto, se indica, que los dibujos y especificaciones del proyecto deberán incluir y mostrar, todos los detalles del trabajo, nombrando todos los materiales que se asume almacenará la estructura, y detallando sus propiedades. Se detallará también, el tamaño y ubicación de todos los componentes estructurales, conexiones y armaduras, la resistencia requerida para el tipo de hormigón y también, para el tipo de acero.

Comentarios al Capítulo 1

Los comentarios inician explicando el hecho de que las fallas en silos han alertado a los ingenieros de diseño acerca del peligro de diseñarlos solamente para presiones estáticas debido al material en reposo. Y que, tales fallas han inspirado extendidas investigaciones acerca de las variaciones de presión y flujo de materiales. Y que, por ellas, se ha establecido que las presiones durante el vaciado pueden ser significativamente superiores o significativamente inferiores respecto a las ejercidas cuando el material se encuentra en reposo.

Se define el exceso de presión por encima de la ejercida en reposo como “*overpressure*” (*sobre-presión*) y la disminución por debajo de dicha presión en reposo como “*underpressure*” (*baja-presión*). Se explica que, una de las causas del exceso de presión es el pasaje del estado activo al pasivo del material almacenado, que ocurre cuando el material comienza a moverse ante la descarga del silo. Además, la disminución de la presión puede producirse en un canal de flujo de material en contacto con la pared; e incrementos de presiones pueden ocurrir lejos de dicho canal de flujo y al mismo nivel. Disminuciones e incrementos de presión conviviendo, causan flexión circunferencial en las paredes.

Con respecto al llenado, se comenta que, el *impacto* durante la carga del silo, puede causar presiones que excedan las estáticas. Mientras que los excesos y disminuciones de presión son generalmente importantes en silos profundos, el *impacto*, es usualmente crítico solo en silos de poca profundidad, en los que grandes volúmenes de material son vertidos repentinamente. Obviamente, el diseño sin considerar excesos y disminuciones de presión e impacto pueden ser peligrosos.

En los comentarios de este apartado, se solicita que, de ser posible, las propiedades del material que se desea almacenar, deberán ser obtenidas de ensayos sobre el material propiamente dicho o de registros basados en material de

características muy similares. Se indica también que, las propiedades asumidas en el diseño deben ser fijadas en el proyecto.

Capítulo 2: Materiales

Código y Comentarios

Aquí se indica que todos los materiales y los ensayos practicados sobre los mismos, deberán estar sujetos al ACI 301 (Specifications for Structural Concrete).

En este capítulo, se especifican requerimientos y características, acerca de cementos, agregados, agua, aditivos, acero, elementos prefabricados de hormigón y ensayos de materiales. Se comentan también influencias de tales requerimientos y características en la construcción y performance de la estructura.

Capítulo 3: Requerimientos de construcción

Calidad del hormigón

En cuanto a la calidad del hormigón, se especifica que la resistencia a compresión del hormigón para construcción in situ, no deberá ser menor que 28 MPa a los 28 días.

Detalles y ubicación de la armadura

En esta parte, se establecen requerimientos de soporte de la armadura horizontal para cuidar a la misma de desplazamientos. También, se determina según el espesor de pared, la cantidad de capas de armaduras a colocar.

Se fijan, además, requerimientos de recubrimientos mínimos y características de los revestimientos con el objetivo de dar fluidez al material a ensilar y tampoco contaminar al mismo. También, se disponen aspectos constructivos a cerca de dichos revestimientos para asegurar su funcionalidad.

Comentarios al Capítulo 3

En los comentarios a este capítulo, se incluye un término adicional utilizado solo en el propio comentario, pero no en el Código, y es la resistencia promedio requerida a compresión f_{cr} . Su origen es una base estadística proveniente de promediar la resistencia a compresión de las probetas ensayadas, para así asegurarse de cubrir la resistencia específica a compresión f'_c . La cual, a su vez debe ser lograda en más del 90% de las probetas ensayadas.

Entre otros aspectos, se comenta acerca de ensayos de resistencia del hormigón, requerimientos y detalles de armado, funcionamiento de los encofrados, materialización de juntas de construcción, y curado del hormigón.

Capítulo 4: Diseño

Generalidades

Se especifican los tipos de cargas que deben tenerse en cuenta a la hora de proyectar la estructura del silo, separándolas según:

- a) Carga Muerta: Peso de la estructura y de los ítems adosados, incluyendo equipamiento soportado por la estructura.
- b) Carga Viva: Fuerzas del material almacenado (incluyendo sobrepresiones y bajopresiones debidas al flujo), cargas vivas en el fondo y techo del silo,

nieve, cargas de equipamiento, presión de aire positiva y negativa, viento, carga sísmica y fuerzas de la tierra o de materiales almacenados contra el lado exterior del silo.

- c) Cargas térmicas: incluyendo las debidas a las diferencias de temperatura entre el interior y el exterior de las paredes.

Se aclara que en lo que respecta al diseño y dimensionado de armadura, miembros de hormigón, como ser fundaciones, fondos, techos y estructuras similares no cubiertas en este Código, deberán diseñarse en concordancia con lo establecido en el ACI 318.

Se fija un espesor mínimo de la pared de un silo, el cual no deberá ser menor que 150 mm para construcción in situ.

El Código define una zona particular, denominada *zona de presión*, como la zona de la pared que es requerida a resistir las fuerzas del material almacenado incluyendo la tolva. Corresponde a la zona inferior del silo.

Factores de carga y resistencia

He aquí un ítem importante. En cuanto a los factores de carga para el diseño de silos, el Código establece que se deberá cumplir con lo especificado en el ACI 318. **El peso y las presiones debido al material ensilado deberán considerarse como carga viva o sobrecarga (L). Esto es un aspecto de vital importancia, dado que un ingeniero que necesite diseñar un silo, sin estar familiarizado con el cálculo de los mismos, no sabría en primera instancia, a qué tipo de carga (a utilizar en las combinaciones del método L.R.F.D.) asociar la carga del material ensilado. Podría, razonablemente considerar la carga de material ensilado, como carga de empuje lateral (H), lo cual sería erróneo.**

Dependiendo del tipo de encofrado, el Código indica multiplicar o no, los factores de resistencia dados en el ACI 318 por factores adicionales.

Detalles y ubicación de armaduras

Aquí se indican, disposiciones de armaduras tales como, zonas de continuidad de las mismas, separaciones, cuantías mínimas horizontales y verticales.

Cargas

En este punto, se establece que, de no utilizar el método de cálculo de presiones provistos por este Código, los resultados del método que se utilice, deberán estar dentro del mismo orden y ser comparables con los resultados de los métodos establecidos por el Código.

Para el cálculo de las presiones y cargas sobre las paredes, el Código utiliza el método de Janssen.

Según el Código:

- a) Presión inicial vertical a una profundidad Y debajo de la superficie libre de material almacenado:

$$q = \frac{\gamma \cdot R}{\mu' \cdot k} \cdot \left[1 - e^{-\frac{\mu' \cdot k \cdot Y}{R}} \right] \quad [4-1 \text{ ACI 313-97}]$$

- b) Presión inicial horizontal a una profundidad Y debajo de la superficie libre de material almacenado:

$$p = k \cdot q \quad [4-2 \text{ ACI 313-97}]$$

- c) La relación de presión lateral k :

$$k = 1 - \sin \Phi \quad [4-3 \text{ ACI 313-97}]$$

Donde Φ es el ángulo de fricción interna del material.

- d) La carga de fricción vertical por unidad de longitud en el perímetro de la pared y a una profundidad Y debajo de la superficie libre de material almacenado:

$$V = (\gamma \cdot Y - q) \cdot R \quad [4-4 \text{ ACI 313-97}]$$

- e) Donde γ , μ' , k , varían. Las siguientes combinaciones deberán utilizarse *con el máximo valor de γ* .

- Mínimo μ' y mínimo k para máxima presión vertical q .
- Mínimo μ' y máximo k para máxima presión lateral p .
- Máximo μ' y máximo k para máxima fuerza de fricción vertical V .

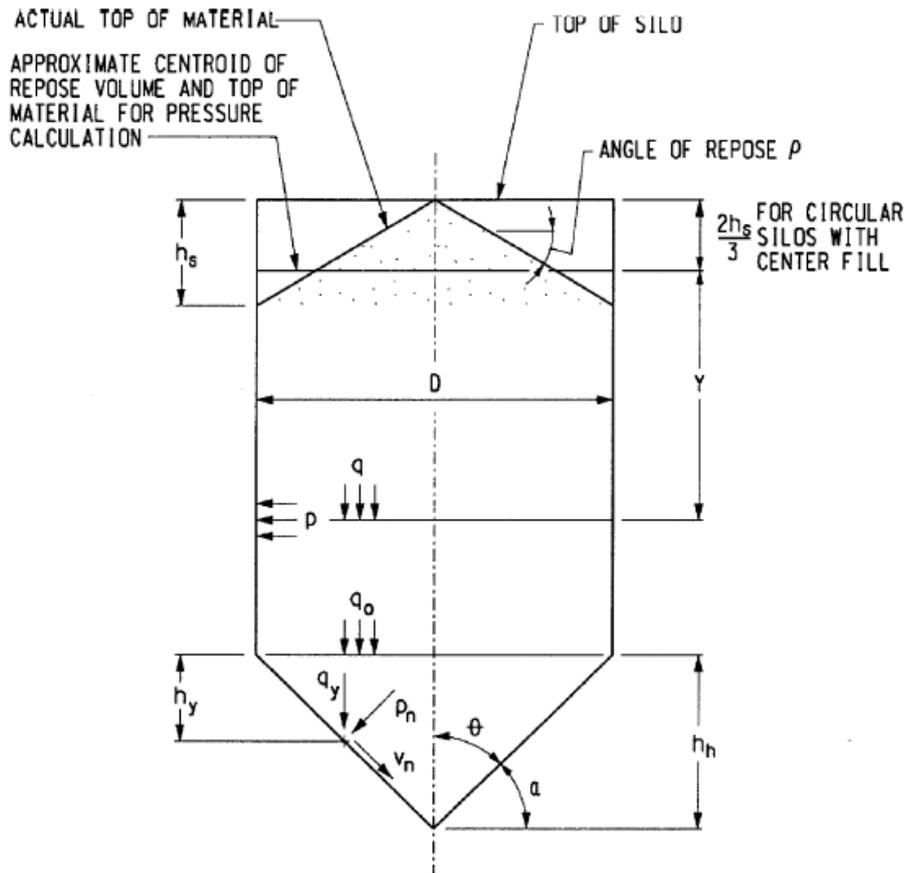


Figura 3.64 – Dimensiones de un silo para usar en el cálculo de las presiones y cargas sobre las paredes y tolvas

Se definen distintos tipos de flujos:

Flujo Concéntrico – La presión de diseño horizontal de la pared del silo encima de la tolva para condición de flujo concéntrico deberá obtenerse multiplicando la presión inicial horizontal por un mínimo factor de sobrepresión.

Flujo Asimétrico – Presiones debido a un flujo asimétrico para condición de carga centrada o excéntrica, deberán ser consideradas (aunque no indica como calcularlas).

Se definen presiones y cargas para tolvas. En donde, las presiones iniciales de llenado debajo del extremo superior de la tolva se calculan como:

- a) Presión inicial vertical a una profundidad h_y debajo del extremo superior de la tolva:

$$q_y = q_0 + \gamma \cdot h_y \quad [4-5 \text{ ACI 313-97}]$$

- b) Presión inicial normal a la superficie de la tolva a una profundidad h_y debajo del extremo superior de la tolva, deberá la mayor entre:

$$P_n = \frac{q_y \cdot \tan \theta}{\tan \theta + \tan \Phi'} \quad [4-6 \text{ ACI 313-97}]$$

$$P_n = q_y \cdot (\sin^2 \theta + k \cdot \cos^2 \theta) \quad [4-7 \text{ ACI 313-97}]$$

- c) Fuerza de fricción inicial por unidad de área en la superficie de la pared de la tolva:

$$V_n = p_n \cdot \tan \Phi' \quad [4-8 \text{ ACI 313-97}]$$

Cuando la expresión 4-6 del Código sea usada para calcular P_n . Y

$$V_n = q_y \cdot (1 - k) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad [4-9 \text{ ACI 313-97}]$$

Cuando la expresión 4-7 del Código sea usada para calcular P_n .

Según el patrón de flujo del material ensilado, el Código recomienda utilizar un factor de sobrepresión aplicado a las presiones calculadas con las expresiones anteriores y pone límites al valor de la presión de diseño vertical en el extremo superior de la tolva.

Se aclara también, que las presiones y fuerzas calculadas en los párrafos anteriores son debidas solamente al material almacenado. Los efectos de cargas muertas, de piso, de techo, nieve, temperatura, viento, sismo, presión interna de aire, empujes de suelo y fuerzas de material a granel alojado fuera del silo que generen empujes, también deberán ser consideradas en combinación con las cargas del material almacenado.

Acción del viento – El Código especifica que la acción del viento en silos deberá considerarse como generadora de una presión positiva y negativa actuando en conjunto. Se indica también que, las presiones no deberán ser menores que los límites establecidos por los Códigos de Edificación locales según las características de la zona en cuestión.

Acción sísmica – En el caso de la acción sísmica, el Código establece que, para silos localizados en zonas de considerable peligrosidad sísmica, deberán diseñarse y construirse con capacidad de resistir las fuerzas sísmicas laterales calculadas según el reglamento correspondiente. Pero, teniendo en cuenta que, el peso efectivo del material almacenado, se tomará como un porcentaje menor al 100% del peso real almacenado. Indica también que, a los efectos de los cálculos, el baricentro del peso efectivo deberá coincidir con el baricentro del volumen real. Y que, el período fundamental de vibración del silo deberá ser estimado mediante *análisis racional*.

Cargas térmicas – Con respecto a cargas térmicas, se indica que los efectos térmicos de la temperatura del material almacenado y del aire contenido deberá ser considerado. Se otorga una expresión de cálculo del momento flexor por unidad de altura de pared o ancho, para el caso de paredes circulares o porciones de paredes con total restricción al alabeo (como esquinas es silos rectangulares):

$$M_t = E_c \cdot h^2 \cdot \alpha_c \cdot \frac{\Delta T}{12} \cdot (1 - \nu) \quad [4-11 \text{ ACI 313-97}]$$

En donde, E_c (módulo de elasticidad del hormigón) puede reducirse para reflejar el momento de inercia reducido por fisuración (si asumir esta condición es compatible con la performance planeada para la estructura).

Diseño de las paredes

En lo que respecta al diseño de paredes, el Código indica contemplar las tensiones de tracción, esfuerzos de corte y momentos flexores a los que estarán sujetas las paredes. Y que, deben ser diseñadas teniendo en cuenta la resistencia requerida calculada mediante los factores de carga en las combinaciones estipuladas en el ACI 318. La siguiente expresión, contempla los efectos térmicos:

$$U = 1.4D + 1.4T + 1.7L \quad [4-12 \text{ ACI 313-97}]$$

Paredes circulares en la zona de presión

Se indica que, para flujo concéntrico, las paredes de un silo circular serán consideradas en tensión anular directa debido a las presiones cuyo cálculo se detalló en párrafos anteriores.

En el caso de flujo asimétrico, las paredes de un silo circular, serán consideradas en tensión de compresión combinada con flexión debido a la no uniformidad de las presiones.

Se especifica que, la resistencia nominal a compresión para carga axial por unidad de área de las paredes en las que el pandeo no juega un rol dimensionante es:

$$P_{nw} = 0.55\phi f'_c \quad [4-13 \text{ ACI 313-97}]$$

Donde el factor de reducción Φ vale 0.70.

Respecto al tema fisuración, el Código indica que, para paredes en la zona de presión, el espesor de las paredes y armaduras deberán estar dimensionadas de tal

manera que, bajo presión inicial de llenado, el ancho de fisura de diseño a una cierta distancia del centro de la barra más próxima a la superficie en cuestión, no supere un cierto valor.

El Código propone la siguiente expresión para calcular el ancho de fisura de diseño:

$$w = 0.0001 f_s^3 \sqrt{d_c \cdot A} \quad [4-14 \text{ ACI 313-97}]$$

Se indica que también que, la continuidad entre las paredes del silo y la tolva deberá ser considerada en el diseño, aunque no aclara como.

Diseño de la tolva

Para el tipo tolva suspendida, el Código las define como cáscaras en las que deberán considerarse sujetas a tensiones de membrana circunferencial y meridional.

Se fija un espesor mínimo de diseño.

Diseño de columnas

Para las columnas, se indica un valor de cuantía mínima.

Diseño de fundaciones

Respecto a fundaciones de la estructura, se estipula que, a no ser que se aclare lo contrario, las fundaciones de silos serán diseñadas en concordancia con el ACI 318.

Se comenta también que, sería permisible desestimar el efecto de la sobrepresión proveniente del material almacenado en el diseño de fundaciones. Aunque es recomendable, además, efectuar un análisis racional al respecto.

Comentarios al Capítulo 4

Los comentarios correspondientes a este capítulo inician con la introducción de nomenclatura adicional utilizada sólo en el presentes comentario y no en el Código. Las referencias de algunas variables de la nomenclatura expuesta a continuación, están apuntadas a figuras presentes en ACI 313r-97.

- A'_s = compression steel area. See Fig. 4-F.
- B = constant calculated from Eq. (4D)
- K_t = thermal resistance of wall. See Fig. 4-E.
- M_u = required flexural strength per unit height of wall
- T_i = temperature inside mass of stored material
- T_o = exterior dry-bulb temperature
- d = effective depth of flexural member. See Fig. 4-F.
- d', d'' = distances from face of wall to center of reinforcement nearest that face. See Fig. 4-F.
- e, e', e'' = eccentricities. See Fig. 4-F.
- n = constant calculated from Eq. (4B) or Eq. (4C).
- β = constant calculated from Eq. (4E)
- δ = effective angle of internal friction
- θ_c, θ_p = angle of conical or plane flow hopper with vertical. See Fig. 4-C.

Factores de Carga y Resistencia

Al respecto se comenta que, en el caso de los silos y a diferencia de estructuras tradicionales, se sabe hasta dónde llegará la sobrecarga, siendo esta, el material ensilado. El cual, a lo sumo completará la máxima capacidad del silo. Sin embargo, las presiones son sensibles a las variaciones en las características del material, por este motivo, se utiliza el mismo factor de carga de 1.7 utilizado en el ACI 318.

Detalles y ubicación de armaduras

Aquí, se explica que los momentos flexores en silos circulares son difíciles de evaluar adecuadamente, pero sin embargo existen como consecuencia de presiones no uniformes durante la descarga, diferencias de temperatura, continuidad estructural, o inclusive, material almacenado fuera del silo que provoque empujes.

Respecto a la tensión anular horizontal, se comenta que la misma, no desaparece abruptamente al terminar la zona de presión, sino que el fin de dicha zona se encuentra compatibilizada con la siguiente. Por tal motivo, la armadura debe continuarse más allá de la zona de presión en una distancia preestablecida.

Se expone que, la armadura vertical ayuda a distribuir las irregularidades en la carga lateral a lo largo de las distintas capas de armadura horizontal. La flexión vertical soportada por la armadura puede tener origen en:

- Cambios de temperatura en las paredes o impedimento de movimiento vertical en las mismas.
- Restricciones de la pared en techo y en fundaciones.
- Excentricidad de cargas.
- Cargas concentradas
- Diferencias de temperatura interior y exterior.

Se indican también, requerimientos de espaciamiento mínimo entre barras y posicionamiento de las mismas en influencia a la fisuración.

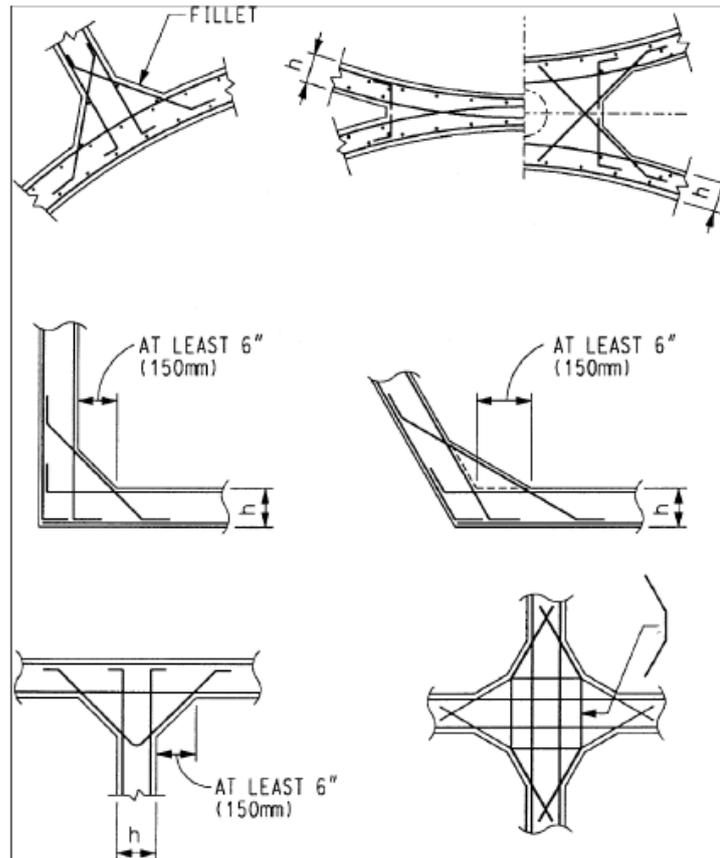


Figura 3.65 – Armado en encuentro de paredes

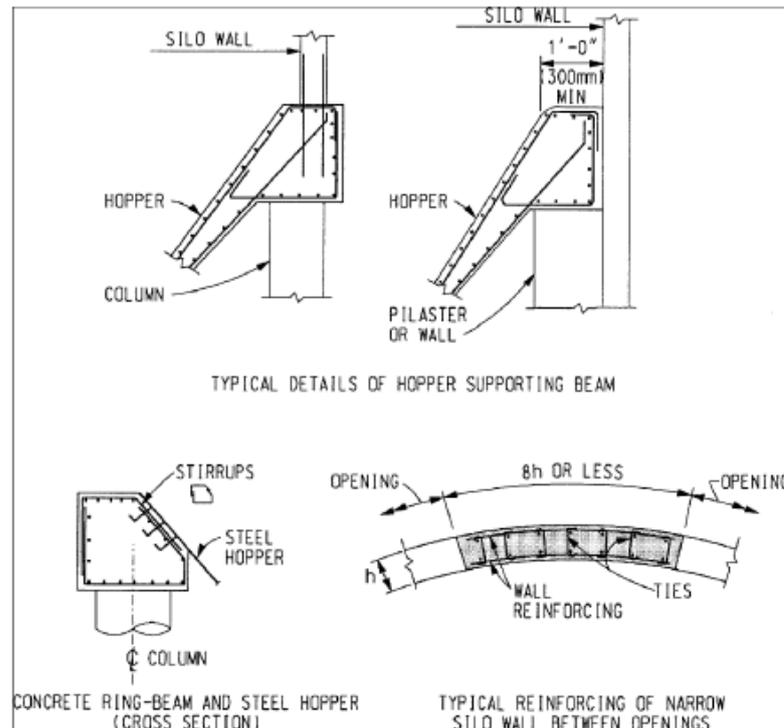


Figura 3.66 – Diversos detalles

Cargas

Al respecto, se expone que las presiones en las paredes y tolvas de los silos, dependen de la condición inicial de llenado y del patrón de flujo desarrollado durante la descarga. A tal fin, se exponen las siguientes definiciones que no están explicitadas en el Código.

- *Filling / Llenado*: El proceso de carga por gravedad, del material a ensilar.
- *Discharging / Descarga*: El proceso de descarga por gravedad, del material ensilado.
- *Flow channel / Canal de flujo*: Un canal de movimiento de material por encima de la apertura de descarga.
- *Concentric flow / Flujo concéntrico*: Un patrón de flujo, en el cual, el canal de flujo posee un eje vertical de simetría coincidente con la salida del silo o punto de descarga.
- *Asymmetric flow / Flujo asimétrico*: Un patrón de flujo en donde el canal de flujo no se encuentra ubicado centralmente.
- *Mass flow / Flujo en masa*: Un patrón de flujo en donde todo el material está en movimiento, cualquiera sea la forma de descarga.
- *Funnel flow / Flujo de embudo*: Un patrón de flujo en el cual, el canal de flujo se forma dentro del material.
- *Rathole / Ratonera*: Una configuración de canal de flujo en la cual, cuando se forma con material circundante estático, permanece estable después de que el contenido del flujo haya sido descargado. Es una especie de hueco tubular.
- *Expanded flow / Flujo expandido*: Un patrón de flujo en el cual, una tolva de flujo masivo es usada directamente sobre la salida para expandir el diámetro del canal de flujo.
- *Stable arch dimensión / Dimensión estable de arco*: La máxima dimensión hasta la cual un arco de material puede formarse y mantenerse estable.
- *Self-cleaning Hopper / Tolva auto-limpiante*: Una tolva con suficiente pendiente para lograr que el material que ha permanecido en reposo durante un flujo de embudo, se descargue.
- *Expanded flow silo / Silo de flujo expandido*: Un silo equipado con una sección de tipo tolva auto limpiante encima de otra sección con tolva de flujo masivo.
- *Tilted hopper / Tolva inclinada*: Una tolva con su eje inclinado respecto de la vertical.
- *Pyramidal Hopper / Tolva piramidal*: Una tolva poligonal con lados planos en pendiente.
- *Plane flow Hopper / Tolva de flujo plano*: Una tolva con dos lados planos y dos bordes verticales.
- *Transition Hopper / Tolva de transición*: Una tolva con planas y curvadas superficies.
- *Effective angle of internal friction / Ángulo efectivo de fricción interna*: Una medida de combinación entre fricción y cohesión del material, aproximadamente igual al ángulo de fricción para condición de flujo libre o material grueso, pero significativamente mayor para materiales cohesivos.

Presiones y Cargas en las Paredes

Aquí se comenta acerca de las combinaciones de valores máximos y mínimos de los parámetros del material almacenado, que producen presiones de diseño.

También, se expone que la expresión 4-1 del Código, referida a la presión inicial vertical, asume llenado centrado, y que, de no darse esta condición, se debe incorporar la variabilidad en función de la profundidad (Y).

Se menciona que, durante el llenado y la descarga, aunque ambos sean centrados, pueden ocurrir sobre y bajo presiones debidos a imperfecciones en la forma cilíndrica del silo, no uniformidad en el tamaño de las partículas y su distribución. Por lo que se recomienda un mínimo factor de sobrepresión que se multiplica también por el factor de carga (se usan ambos).

Presiones y Cargas en Tolvas

En este apartado, se hace referencia a que la determinación de las presiones en tolvas, constituye una mayor complejidad que hacer dicha determinación en las paredes. La variación de presión es más sensible a las propiedades del material. En el caso del presente Código se utiliza el método de Walker, al cual se lo define como aceptable.

A continuación, se presenta un gráfico, el cual esquematiza el proceso de selección del tipo de tolva.

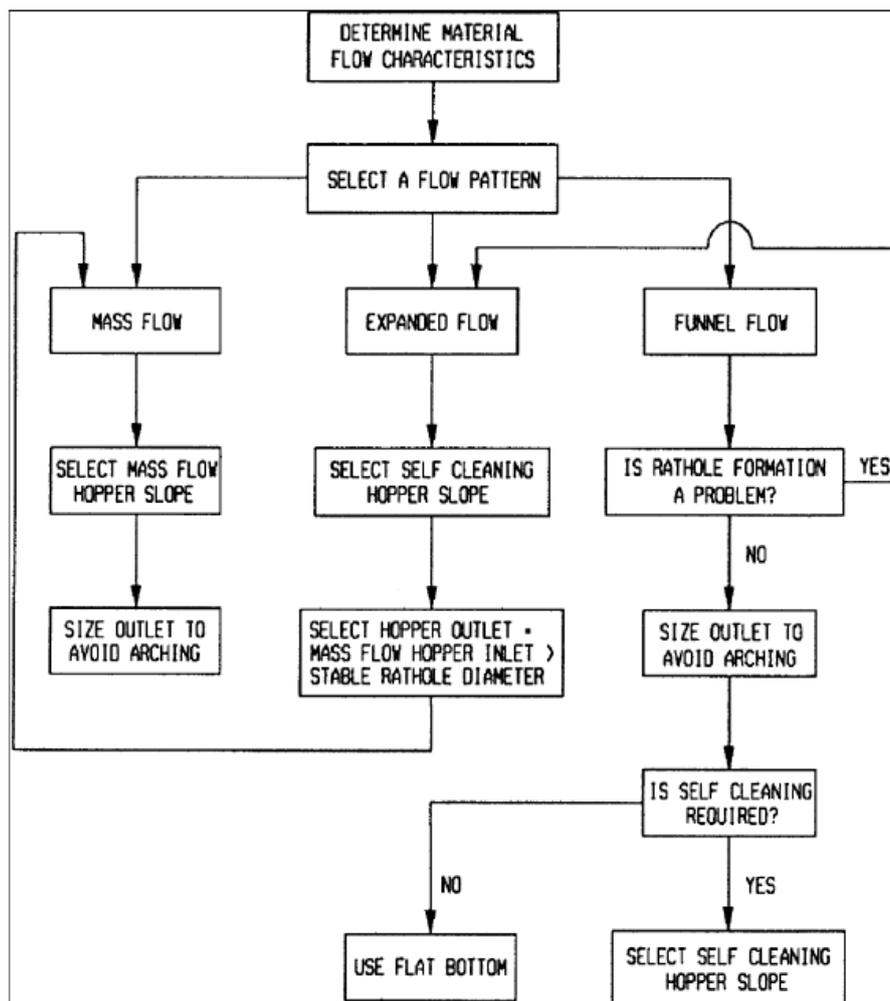


Figura 3.67 – Gráfico esquemático para determinar la configuración de la tolva.

Con respecto a las ecuaciones para el cálculo de tolvas, se hacen unas aclaraciones en los comentarios, y son las siguientes:

- Las ecuaciones 4-6 y 4-8 del Código, generalmente se adaptan a tolvas lisas y empinadas, donde la fricción material-tolva está totalmente desarrollada.
- Las ecuaciones 4-7 y 4-9 del Código, generalmente se adaptan a tolvas más bien llanas donde la fricción no se encuentra totalmente desarrollada.

Además, se comenta que el valor de k , es conservadoramente calculado por la ecuación 4-7 del Código. En suma, a causa de las incertidumbres inherentes a la estimación de las presiones en tolvas, durante el diseño se debería utilizar entre las ecuaciones 4-6 y 4-7 del Código, la que resulte en la mayor presión p_n .

Respecto a la *rotura de arcos*, se expone que pueden someter al silo a severas condiciones de impacto que causen daño estructural. Por lo que se requiere un análisis del tema y seleccionar una configuración de tolva que minimice la probabilidad de producción de tal fenómeno.

En los comentarios, respecto al diseño de tolvas, se dispone de gráficos para seleccionar la configuración de las mismas, provistos por *Jenike*. A continuación, se muestra el correspondiente a tolva cónica:

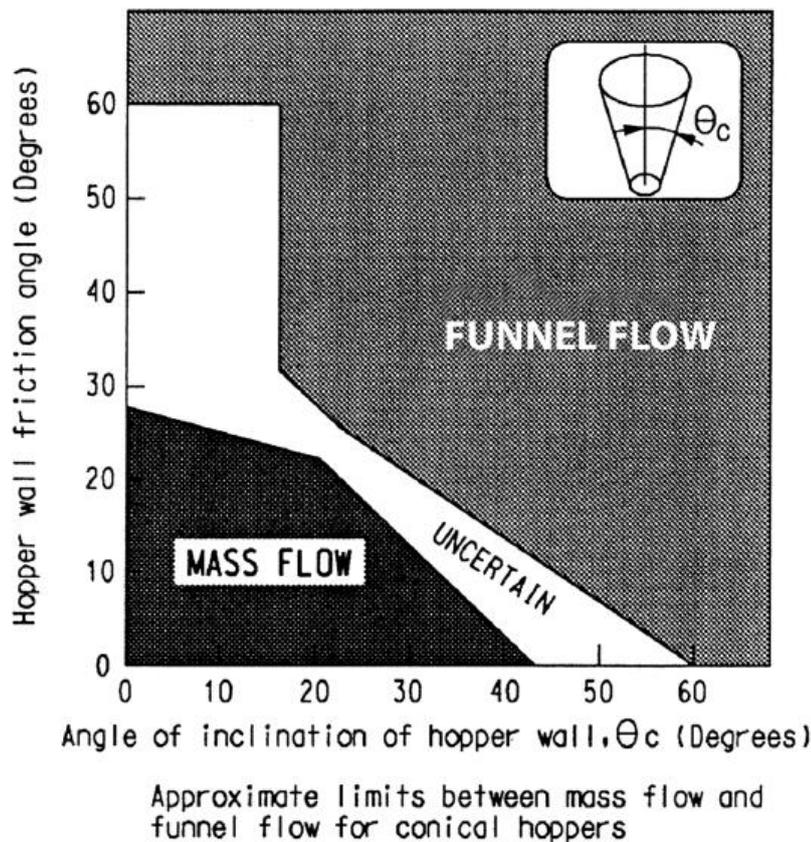


Figura 3.68 – Gráfico para diseño de tolva cónica.

Para condiciones de flujo masivo, se presentan en esta parte de los comentarios, ecuaciones para calcular presiones y fuerza de rozamiento.

Diseño de Paredes del Silo

Se dan indicaciones respecto a las armaduras que toman solicitaciones axiales, flexionales y de origen térmico.

También, se agregan comentarios acerca de la fisuras y control de las mismas.

NORMAS IRAM

Las Normas IRAM relacionadas al Proyecto de Silos de hormigón armado son las siguientes:

- IRAM 11705: *Silos de Hormigón Armado y Pretensado. Cargas y Sobrecargas de Diseño.* (Fecha de entrada en vigencia: 03/09/1982)
- IRAM 11706: *Silos de Hormigón Armado y Pretensado. Condiciones y requisitos para su construcción. Recomendaciones sobre la tecnología del proyecto y construcción.* (Fecha de entrada en vigencia: 07/12/1984)

Norma IRAM 11705

1 - Objeto

El objeto establecido por esta Norma es:

“Establecer la forma de obtener los valores de cargas estáticas y dinámicas, así como de sobrecargas que deben considerarse en el proyecto y cálculo de silos.”

2 – Campo de Aplicación

Su campo de aplicación es el siguiente:

- Las cargas cuyo cálculo establece esta norma, son aplicables en forma directa a silos con planta circular o rectangular, para cualquier relación entre la altura y la menor dimensión en planta del silo.
- Pueden considerarse otras formas de silos asimilándolas a las indicadas en el punto anterior.
- En el caso de materiales no granulares para la acción ejercida por el material ensilado, será de aplicación esta Norma, pero teniendo en cuenta lo indicado respecto a esta cuestión.
- Los silos fermentadores para forrajes, no están considerados en esta Norma, dadas sus características especiales.

3 – Definiciones

Se exponen las siguientes definiciones:

Silo: Contenedor vertical para almacenar materiales a granel.

Presiones y Esfuerzos de Servicio: Valores adoptados para el cálculo y proyecto de un silo. En esta norma llevan supraíndice “*”.

Coeficiente C_d de sobrepresión dinámica de vaciado: Factor de corrección que considera los incrementos de presión que tienen lugar durante la descarga de material, y permite pasar de las presiones estáticas a las de servicio o diseño.

Coeficiente C_i de sobrepresión dinámica de llenado, o de impacto: Factor de corrección empleado para considerar el incremento de presión debido al llenado del silo y que permite pasar de las presiones estáticas a las de servicio o diseño.

Radio Hidráulico: Relación entre el área interna de la sección transversal considerada del silo, o la de área equivalente adoptada y su perímetro respectivo.

4 – Simbología

En esta norma se utilizan los símbolos siguientes:

d	Espesor de pared del silo, en metros.
e	Excentricidad medida desde el centro del silo al centro de descarga, en metros.
p_h	Presión estática horizontal, en Pascal.
p_v	Presión estática vertical, en Pascal.
p_w	Presión estática friccional vertical, en Pascal.
p_a	Presión estática normal a las paredes inclinadas del silo, en Pascal.
p_h^*	Presión estática horizontal de servicio, en Pascal.
p_v^*	Presión estática vertical de servicio, en Pascal.
p_w^*	Presión estática friccional vertical de servicio, en Pascal.
p_a^*	Presión estática de servicio, normal a las paredes inclinadas del silo, en Pascal.
$p_{h,exc}^*$	Presión horizontal de servicio para silos con descarga excéntrica, en Pascal.
t	Temperatura, en grados Celsius.
t_i	Temperatura máxima del producto ensilado, en grados Celsius.
$(t_i)_{dis}$	Temperatura de diseño del producto ensilado, en grados Celsius.
t_s	Temperatura de bulbo seco de diseño para invierno, obtenida según la norma IRAM II 603, en grados Celsius.
C_d	Coeficiente de sobrepresión de vaciado.
C_i	Coeficiente de sobrepresión de llenado.
D	Diámetro interior del silo, en metros.
H	Altura del silo para el cálculo en metros, según se aclara en la figura 2.
h	Altura de la tolva, en metros.
K	Coeficiente de empuje, que relaciona las presiones horizontal p_h y vertical p_v , adimensional, definido por la expresión siguiente:

$$K = \frac{1 - \text{sen } \rho}{1 + \text{sen } \rho}$$

K_t	Razón entre la resistencia térmica de la pared sola y la resistencia térmica del material ensilado, pared y aire exterior combinados.
q_w	Esfuerzo vertical friccional estático, originado por el rozamiento del material ensilado contra la pared, expresado en kilonewton por metro. Se obtiene al integrar la presión de rozamiento p_w sobre el perímetro del silo en el nivel z .
q_w^*	Esfuerzo vertical friccional de servicio, en kilonewton por metro.
R_h	Radio hidráulico de la sección transversal del silo, en metros.
V	Volumen total de material que es capaz de contener el silo, en metros cúbicos.
ΔV	Volumen de material que se ensila en forma instantánea, en metros cúbicos.
Δt	Caída de temperatura dentro de la pared que corresponde a una porción K_t de la diferencia total de temperaturas, en grados Celsius.
γ	Peso unitario del material ensilado, en kilonewton, por metro cúbico.
ρ	Ángulo de fricción interna del material ensilado o bien, aproximadamente el ángulo de talud natural.
μ	Coefficiente de rozamiento o de fricción del material contra la pared.

5 – Cargas Generales

Aquí se aclara que las cargas establecidas por la Norma, deberán entenderse como valores mínimos de cargas de servicio, debiendo ser incrementadas si el proyectista lo considera necesario o conveniente.

Las cargas y sobrecargas están compuestas y clasificadas de la siguiente manera:

Peso propio: Peso de la estructura incluyendo el peso de los elementos sujetos y soportados por ella, afectado si corresponde, por el coeficiente dinámico.

Acciones ejercidas por el material ensilado: Aquí se aclara que las presiones a considerar en el proyecto incluyen no solamente las presiones estáticas, sino también deberá contemplarse presiones incrementadas debido al llenado, vaciado, formación y colapso de arcos del material ensilado, aireación y descarga excéntrica del material, así como las acciones que se producen en silos multicelulares.

Según esta Norma, las propiedades del material ensilado, de las que dependen las cargas de servicio son:

- Peso unitario
- Ángulo de fricción interna
- Coeficiente de rozamiento entre el material ensilado y las paredes del silo.

Acciones térmicas: Se adjudican estas acciones a diferencias de temperatura entre las paredes y el fondo del silo, o entre el material ensilado y el aire exterior cuando el material es almacenado en caliente.

Aquí se menciona que en ocasiones el producto a ensilar entra a una temperatura muy elevada, por lo que produce un momento en la pared del silo, debido a esta diferencia de temperatura entre la cara interior y la exterior de la pared.

La Norma establece un margen en donde no es necesario tener en cuenta este efecto en el cálculo, esto es hasta una diferencia de temperatura de hasta 45°C.

Consideraciones de Operación: Al respecto, la Norma establece que deberán considerarse factores tales como la velocidad de vaciado, que puede provocar un flujo másico, es decir, un movimiento simultáneo de gran parte del material ensilado, lo que origina presiones que pueden sobrepasar las calculadas sin contemplar este efecto.

6 – Cargas y Sobrecargas de Diseño

6.1 - Datos

Material a ensilar: Al respecto, se expone que, según sus características, el material a ensilar, debe estar comprendido en la clasificación de la tabla que a continuación se adjunta. Sobre estas propiedades, deben tenerse en cuenta variaciones de humedad, granulometría y angularidad de las partículas.

PROPIEDADES DE MATERIALES GRANULARES

MATERIAL	PESO UNITARIO	ÁNGULO DE TALUD NATURAL	COEFICIENTE DE FRICCIÓN CONTRA PARED DE	
	γ	ρ	μ	
	kN/m ³	(Grados sexagesimales)	Hormigón	Acero
clinker de cemento pórtland	14	33	0,6	0,5
cemento pórtland	13 a 16	24 a 30	0,35 a 0,45	0,3
cal (granos)	8 a 10	35 a 55	0,5 a 0,6	0,30
cal (molida fina)	9	35	0,5	0,30
cal (molida gruesa)	12	35	0,5	0,30
cal en polvo	7	35	0,5	0,30
coque	6	40	0,8	0,5
carbón bituminoso	8 a 10	32 a 34	0,50 a 0,60	0,3
carbón antracita	10 a 11	24 a 30	0,45 a 0,50	0,3
pedra caliza	16	40	0,5	0,3
grava	16 a 20	25 a 35	0,40 a 0,45	-
arena	16 a 20	25 a 40	0,4 a 0,7	0,35 a 0,50
arcilla	18 a 22	15 a 40	0,20 a 0,50	0,35 a 0,40
mineral de manganeso	20	40	-	-
harina	6	40	0,3	0,3
granos (pequeños): trigo, maíz, soja, cebada, arveja, habas, avena, arroz, centeno	7 a 10	23 a 37	0,29 a 0,47	0,26 a 0,42
azúcar granular	10	35	0,43	-
mineral de hierro	26	40	0,5	0,36

Tabla 3.7 – Propiedades del material a ensilar.

Radio Hidráulico: Se define a este valor en función de la forma del silo. Para silos circulares como es el caso del presente Trabajo, se tiene:

$$R_h = \frac{D}{4}$$

Siendo D, el diámetro interior del cilindro.

Se brindan también otras expresiones de cálculo para otra forma de silo.

Coefficiente Cd de sobrepresión de vaciado: Para este coeficiente, se dispone de una tabla, que proporciona (según Janssen por un lado, y Reimbert por otro) los valores mínimos a utilizar en función de la relación H/Rh y de la coordenada z.

Coefficiente Ci de sobrepresión de llenado: En este caso, también se brinda una tabla con los valores mínimos a considerar de este coeficiente en función de la relación $\Delta V/V$ (ver referencias de símbolos). El valor ΔV es considerado como un dato de proyecto, que tiene en cuenta la posibilidad de que pueda ingresar al silo, una cantidad apreciable de material en un corto período de tiempo.

6.2 – Cálculo

Peso Propio: Esta carga es evaluada, según las características geométricas de los elementos que constituyen el silo junto con el peso específico del material empleado, en este caso, hormigón.

Cargas del material ensilado: La Norma propone dos métodos distintos de cálculo, por un lado, el método de Janssen, y por otro, el método de Reimbert. Estos, pueden aplicarse indistintamente, pero una vez que uno es elegido, debe continuarse con su línea de cálculo.

Acciones sobre las paredes del silo - MÉTODO DE JANSSEN

- Presión estática horizontal (p_h) a un nivel z a partir del nivel superior que puede alcanzar el material si la cubierta es horizontal:

$$P_h = K \cdot p_v \quad [6.2.2.2.1 \text{ IRAM } 11705]$$

- Esfuerzo vertical friccional estático (q_w):

$$q_w = (\gamma \cdot z - 0.8 \cdot p_v) \cdot R_h \quad [6.2.2.2.2 \text{ IRAM } 11705]$$

Acciones sobre el fondo del silo - MÉTODO DE JANSSEN

- Presión estática vertical (p_v):

$$P_v = \frac{\gamma \cdot R_h}{\mu \cdot k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\mu \cdot k}{R_h} \cdot z}\right) \quad [6.2.2.3.1 \text{ IRAM } 11705]$$

Acciones sobre las paredes del silo – MÉTODO DE REIMBERT

- Presión estática horizontal (p_h) a un nivel z:

$$p_h = \frac{\gamma \cdot R_h}{\mu} \cdot \left(1 - \left(\frac{z}{A} + 1\right)^{-2}\right) \quad [6.2.2.4.1 \text{ IRAM } 11705]$$

Con:

$$A = \frac{R_h}{\mu \cdot k} - \frac{H_I}{3}$$

$$H_I = 4 \cdot R_h \cdot \tan \rho$$

- Esfuerzo vertical friccional estático (q_w):

$$q_w = (\gamma \cdot z - p_v) \cdot R_h \quad [6.2.2.4.2 \text{ IRAM } 11705]$$

Acciones sobre el fondo del silo - MÉTODO DE REIMBERT

- Presión estática vertical (P_v):

$$P_v = \gamma \cdot \left(z \cdot \left(\frac{z}{A} + 1 \right)^{-1} + \frac{H_I}{3} \right) \quad [6.2.2.5.1 \text{ IRAM } 11705]$$

- Presión estática normal a las paredes inclinadas del silo (p_α):

$$P_\alpha = p_h \cdot \sin^2 \alpha + P_v \cdot \cos^2 \alpha \quad [6.2.2.6 \text{ IRAM } 11705]$$

Siendo α el ángulo de inclinación de la pared respecto de un plano horizontal.

Adicionalmente, se comenta que, durante los períodos de carga y descarga del silo, la presión sobre el fondo no es constante, sino que varía desde cero en el centro del silo, a un valor máximo junto a las paredes.

Presiones y esfuerzos de servicio (p_v^ , p_h^* , p_α^* , q_w^*)*

Estos serán obtenidos multiplicando los correspondientes valores estáticos p_v , p_h , p_α , q_w por un coeficiente C_d de sobrepresión de vaciado o por un coeficiente C_i de sobrepresión de llenado, según sea el mayor de ambos.

Acciones térmicas

En cuanto a este tipo de acciones, la Norma brinda varias expresiones de cálculo, y son las siguientes:

- Temperatura del material ensilado:

$$(t_i)_{dis} = t_i - 45^\circ \quad [6.2.3.1 \text{ IRAM } 11705]$$

- Diferencia de temperatura entre la cara interior y exterior de la pared:

$$\Delta_t = [(t_i)_{dis} - t_o \cdot k_t] \quad [6.2.3.2 \text{ IRAM } 11705]$$

Donde el valor de k_t (transmitancia) para materiales granulares, está dado por la expresión:

$$k_t = \frac{0.0252 \cdot d}{4.09 + 0.0252 \cdot d} \quad [6.2.3.2 \text{ IRAM } 11705]$$

... y para materiales pulverulentos:

$$k_t = \frac{0.08 \cdot d}{4.09 + 0.08 \cdot d} \quad [6.2.3.2 \text{ IRAM } 11705]$$

... siendo d , el espesor de la pared en **centímetros**.

Momento flexor en las paredes debido a la variación de temperatura:

$$M_t = 11.9 \cdot E_c \cdot d^2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t \quad [6.2.3.3 \text{ IRAM } 11705]$$

Siendo: M_t el momento flexor debido al ensilado de productos a alta temperatura en kNm), E_c el módulo elástico del hormigón en kPa y cuyo valor se adopta igual al módulo elástico del acero 2.1×10^8 dividido por 8, d el espesor de la pared en metros, α_t el coeficiente de dilatación térmica de la pared de hormigón, e igual a 10.8×10^{-6} .

Método de predimensionado

Aquí, la Norma establece que la estabilidad se verificará con el silo vacío, bajo la acción de una presión dinámica del viento mínima de 1.72 kPa.

Otras sobrecargas

Al respecto, se especifica que, para el caso de escaleras y pasadizos por donde debe pasar sólo un hombre, se considerará una carga móvil vertical de 1 kN, y sobre las barandas y agarraderas, cargas de 0.4 kN en la dirección del esfuerzo probable. Para escaleras y pasadizos de mayor importante, se recomienda tener en cuenta las cargas establecidas por el Reglamento CIRSOC 101.

Aquí, se incorpora adicionalmente a la norma IRAM comentada, un punto interesante de la Norma IRAM 8015 llamada "Silos aéreos metálicos para almacenamiento de granos. Cilíndricos y desarmables". Dicho punto es el siguiente:

En el caso de que se coloquen cables suspendidos del techo del silo, que sostengan sensores para el control de temperatura y humedad del material ensilado, los cuales quedarán inmersos el mismo; las cargas para cada cable con las cuales se dimensionará la estructura del techo, responderán a las expresiones siguientes:

- 1) $T = 1.4 \cdot d \cdot \gamma \cdot \tan a_3 \cdot \left[0.84 \cdot L^2 \cdot \tan^2 \left(45^\circ - \frac{a_1}{2} \right) + 0.27 \cdot \frac{D \cdot L}{\tan a_2} \right]$; en kgf; para $L \leq L_1$
- 2) $T = \frac{1.4 \cdot 0.35 \cdot d \cdot \gamma \cdot \tan a_3 \cdot D^2}{\tan^2 a_2 \cdot \tan^2 \left(45^\circ - \frac{a_1}{2} \right)} \cdot \left[\pi \cdot \tan^2 \left(45^\circ - \frac{a_1}{2} \right) \cdot \tan a_2 \cdot \frac{L}{D} - 0.57 \right]$; en kgf; para $L \geq L_1$
- 3) $L_1 = \frac{D}{2 \cdot \tan a_2 \cdot \tan^2 \left(45^\circ - \frac{a_1}{2} \right)}$; en metros.

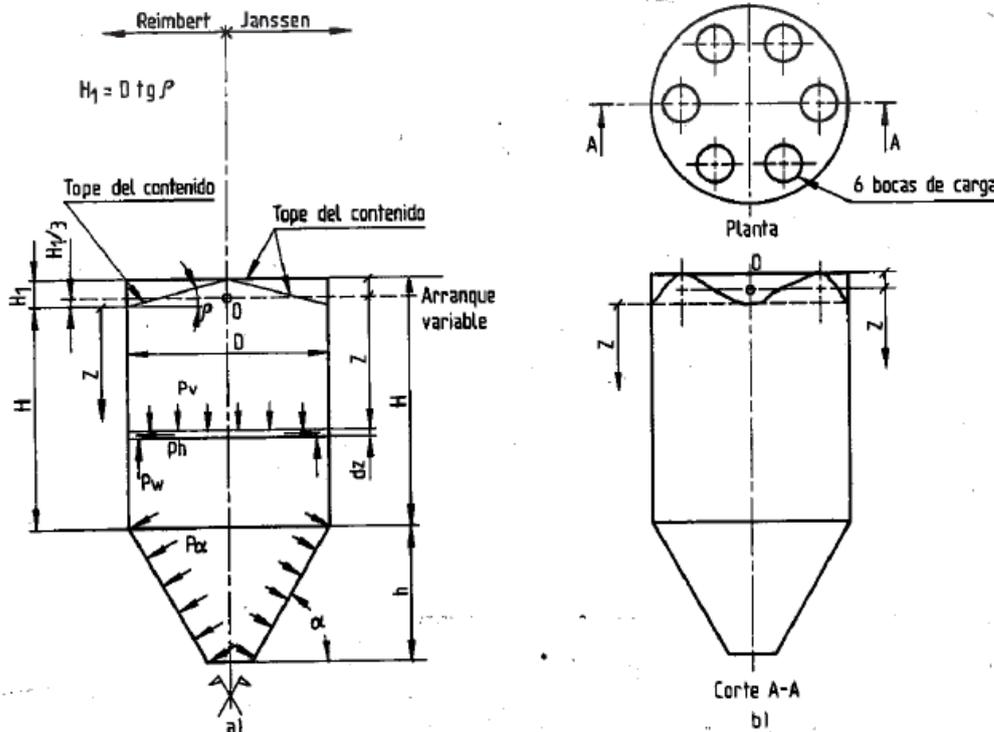
Siendo:

- T = la fuerza de tracción debido a los cables de medición en kgf;
- a_1 = el ángulo de rozamiento entre grano y grano;
- a_2 = el ángulo de rozamiento entre grano y pared;
- a_3 = el ángulo de rozamiento entre grano y tubo flexible plástico, se adopta 11° ;
- d = el diámetro del cable el metros;
- D = el diámetro del silo en metros;
- L = la longitud del cable inmerso en los granos, en metros;
- $1,4$ = un coeficiente que tiene en cuenta el efecto dinámico producido durante la descarga.

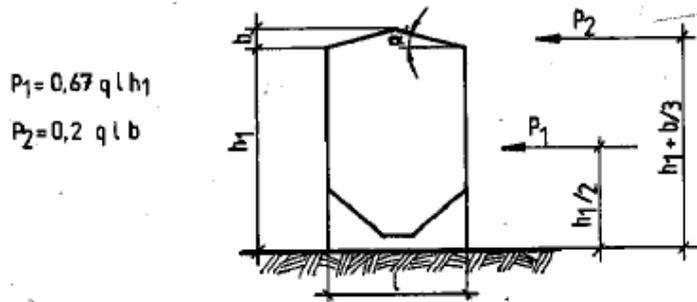
Antecedentes de la norma

- American Concrete Institute – ACI Standard 313 – 77 and Commentary. "Recommended practice for design and construction of concrete bins, silos and bunkers for storing granular materials" ACI Committee 313, 1997.
- DIN – Deutches Institut Für Normung – Norma DIN 1055/77 Pat 45 – Lasten – Annahme Für Bauten; Lasten in silozellen.

Esquemas finales



Símbolos de un silo, utilizados en las ecuaciones de Reimbert y Janssen



Volcamiento del silo vacío

Figura 3.69 – Esquemas IRAM

Norma IRAM 11706

1 – Objeto

Esta Norma expone como objeto, establecer las propiedades de los materiales, preparación y ejecución del hormigón, y los requisitos constructivos; como así enunciar las recomendaciones sobre la tecnología y prácticas constructivas a tener en cuenta en el proyecto y construcción de silos de hormigón armado y pretensado, destinados a contener materiales para su almacenamiento.

2 – Materias Primas

Aquí, se establecen condiciones a ser cumplidas en general por cementos, agregados, agua, aditivos y aceros. También se indican requisitos que deben cumplir los ensayos de materiales.

3 – Hormigón

Este capítulo inicia estableciendo requisitos de calidad, relación agua-cemento y asentamiento que debe cumplir el hormigón.

Hormigón Armado

Se indica que la resistencia a la compresión para hormigón armado, a los 28 días, no deberá ser inferior a los 21 MPa. Para elementos premoldeados, no deberá ser menor a 28 MPa.

Hormigón Pretensado

Se indica que la resistencia a la compresión para hormigón pretensado, a los 28 días, no deberá ser inferior a los 25 MPa. Para elementos premoldeados, no deberá ser menor a 30 MPa.

4 – Encofrados

Aquí se exponen condiciones a cumplir por lo encofrados en cuanto a dimensiones y características.

5 – Armaduras

Armadura Horizontal y Vertical

Se establecen requisitos de cuantía, armado y posicionamiento a cumplir por la armadura horizontal a lo largo del silo y específicamente en la zona inferior (zona de mayor presión).

Distribución

Se indican condiciones a cumplir por las armaduras tales como separación, alternancia y escalonamiento de empalmes. La longitud de los mismos, se referencia al CIRSOC 201.

Recubrimientos

Aquí se establecen recubrimientos mínimos a cumplir para el caso de hormigón in situ, premoldeado y pretensado.

6 - Colocación del hormigón

Al respecto, la Norma indica que la colocación del hormigón deberá ser una operación continua entre las juntas constructivas previamente proyectadas e indicadas en los planos.

Se requiere que el hormigón ejecutado in-situ sea cuidadosamente compactado mediante vibradores con una cierta frecuencia mínima.

Si la construcción se realiza con encofrados deslizantes, se indica que el movimiento de dichos encofrados debe ser simultáneo y lo más preciso posible. Se

requiere una velocidad de ascenso adecuada con respecto al tiempo de fraguado del hormigón.

La Norma también contempla la posibilidad de que el hormigonado se realice en clima frío o caluroso y se remite a las indicaciones del CIRSOC 201.

7 – Protección y curado del hormigón

Respecto a este tema, se remite al CIRSOC 201. A menos que, las superficies de las paredes permanezcan naturalmente húmedas por cinco días, donde no sería necesario tomar medidas para el curado.

Un factor importante destacado por la Norma es que, en el caso de utilizar producto de curado, este no deberá ser tóxico, tampoco debe producir escamas.

8 – Revestimientos

Aquí se indica la utilización de revestimientos interiores en las paredes para proteger a la misma de la abrasión ante el deslizamiento del material ensilado. A tal fin, se propone utilizar placas de acero inoxidable, ladrillos, plásticos, madera, etc.

9 – Tolerancias y discrepancias

Aquí se expone que las estructuras deben construirse con todo cuidado y precisión, respetando las posiciones, niveles y dimensiones indicadas en los planos. Cuando en estos, u otro documento no se indiquen tolerancias constructivas, se admitirán las fijadas para el hormigón. A tal efecto, se dan fórmulas para determinar la tolerancia en función de las dimensiones del elemento.

10 – Fisuración

Al respecto, la Norma apunta a limitar el ancho de fisura para paredes de silos, de manera de garantizar la durabilidad y buen comportamiento de la estructura en general. Remite al CIRSOC 201 en cuanto a las condiciones adecuadas de armadura, sus valores límites de cuantía, diámetros, tensión y condiciones de adherencia a fin de evitar la fisuración.

Se dan límites para el ancho de fisura según el tipo de material ensilado y naturaleza de las cargas

11 – Encofrados deslizantes

Para el uso de este sistema de encofrados, se dan valores de cargas a adoptar en plataformas de trabajo, además del peso propio. Estas cargas son para, entarimado y viguetas, y también para, vigas, armaduras y largueros.

Se da también, una expresión de cálculo para determinar la presión lateral del hormigón fresco determinante para el cálculo de los encofrados como condición mínima:

$$P_z = \gamma \cdot z$$

En donde: P_z es la presión lateral del hormigón fresco en kPa sobre el encofrado; γ es el peso específico del hormigón fresco en kN/m^3 , z es la distancia vertical a partir del borde superior del encofrado hasta el valor de $z = h/2$ en metros; siendo h , la altura del encofrado en metros.

Se comenta que la presión lateral máxima del hormigón fresco, será la correspondiente a la distancia $z = h/2$.

Se indica también, adicionar los esfuerzos horizontales incidentes, provenientes del análisis estructural de todo el conjunto ascendente.

Además, se establecen condiciones de flecha máxima en la plataforma de trabajo.

Anexos:

La Norma posee finalmente, dos anexos, los cuales son:

Anexo 1: Recomendaciones para el proyecto

Anexo 2: Recomendaciones para la construcción con encofrados deslizantes.

CONCLUSIONES RESPECTO A NORMATIVAS

Teniendo en cuenta lo expuesto hasta el momento acerca de normativas IRAM y ACI, se estima conveniente la aplicación del Código ACI 313-97 y sus comentarios (ACI 313r-97), por lo que se toma a la misma de referencia en el presente trabajo. Esta decisión está fundamentada en las siguientes pautas:

- ACI 313-97 data del año 1997, si bien no es actual (su última edición es del año 2016), corresponde a un estado del arte más avanzado que las IRAM de los años 1982 y 1984.
- ACI 313-97, compatibiliza mejor con CIRSOC 201-2005 que IRAM, dado que, como se comentó anteriormente, este último está basado en ACI 318. Esto es de vital importancia teniendo en cuenta lo dicho a cerca de *coherencia y compatibilidad reglamentarias*.
- Si bien, las normas IRAM 11705 y 11706 son de carácter nacional y están en vigencia, su mera aplicación, a pesar de la importancia de cumplir con normativa aún vigente, deja de lado la compatibilidad reglamentaria y el avance tecnológico.

En cuanto a la metodología de cálculo de presiones del material ensilado, puede decirse que la utilizada por ambos son muy similares. Tanto ACI como IRAM utilizan el método de Janssen, IRAM propone también el método de Reimbert.

Vale aclarar que, según lo expuesto, las normas IRAM 11705 y 11706, tienen como antecedentes el Código ACI 313-77 (edición anterior a la de 1997 tratada en este Trabajo) y la Norma DIN 1055-77. Por lo que, en esencia, guarda una cierta coherencia con ambas escuelas, la americana y la alemana.

En conclusión, sería recomendable tomar como referencia el Código ACI 313-97, aplicado junto con el cuerpo reglamentario CIRSOC 201-2005 y verificar que, además, se cumpla o queden cubiertos los lineamientos dispuestos por IRAM. En el caso de incompatibilidades, se podría efectuar un análisis racional con criterio ingenieril y privilegiando la seguridad.

3.3.8 Análisis de cargas según CIRSOC 201-05 y ACI 313-97.

A continuación, se expondrá un análisis de cargas conceptual descriptivo. Para ello, comenzaremos por los datos de partida:

Estructura Silo circular

- Radio externo (R);
- Radio interno (r);
- Espesor de pared ($h=R-r$);
- Altura (H);
- Geometría general;
- Geometría de la tolva;
- Material;
- Ubicación;

Material a ensilar

- Nombre, tipo y características del material;
- Peso por unidad de volumen (γ);
- Coeficiente de fricción entre el material y la superficie de la pared (μ);
- Ángulo de fricción interna (Φ);
- Estado del material al momento de ensilar;
- Tipo de carga y descarga;

A partir de los datos expuestos, se procede a calcular las acciones.

Estructura

Mediante un pre-dimensionado (Punto 3.3.9), se definen las dimensiones de la estructura. A partir de ellas, se obtendrán los siguientes pesos:

Peso propio del cilindro (g_{cil});

Peso propio de la tolva: (g_{tol});

Peso propio de la tapa: (g_{tap});

Peso de equipos de manipulación de material y otros: (g_{eq}), (estimado).

Viento

Dada la zona de emplazamiento de la estructura, se determina mediante el Reglamento CIRSOC 102-2005 la acción del viento. Se obtendrá una presión resultante $p_{wz}[N/m^2]$.

Sismo

Procediendo de la misma manera que para el viento, según la zona de emplazamiento de la estructura, se determina mediante el Reglamento CIRSOC 103-2005 la acción del sismo.

Material a ensilar

Para el Cilindro:

Cálculo de las presiones y cargas sobre las paredes según ACI 313-97:

Presión inicial vertical a una profundidad ($H - x$) debajo de la superficie libre de material almacenado:

$$q_{x,cil}(x) = \frac{\gamma \cdot R}{\mu' \cdot k} \cdot \left[1 - e^{-\frac{\mu' \cdot k \cdot (H-x)}{R}} \right]$$

Presión inicial horizontal a una profundidad $(H - x)$ debajo de la superficie libre de material almacenado:

$$p_{z_cil}(x) = k \cdot q_{x_cil}(x)$$

La relación de presión lateral k :

$$k = 1 - \sin \Phi$$

Donde Φ es el ángulo de fricción interna del material.

La carga de fricción vertical por unidad de longitud en el perímetro de la pared y a una profundidad $(H - x)$ debajo de la superficie libre de material almacenado:

$$V_{x_cil}(x) = [\gamma \cdot (H - x) - q_{x_cil}(x)] \cdot R$$

Donde γ , μ' , k , varían. Las siguientes combinaciones deberán utilizarse con el máximo valor de γ .

- Mínimo μ' y mínimo k para máxima presión vertical q .
- Mínimo μ' y máximo k para máxima presión lateral p .
- Máximo μ' y máximo k para máxima fuerza de fricción vertical V .

Para la Tolva:

Presión inicial vertical a una profundidad x debajo del extremo superior de la tolva:

$$q_{x_tol}(x) = q_0 + \gamma \cdot x$$

Donde, q_0 es la presión inicial a nivel superior de la tolva.

La *presión inicial normal* a la superficie de la tolva a una profundidad x debajo del extremo superior de la tolva, deberá ser mayor que:

$$P_{n_tol}(x) = \frac{q_{x_tol}(x) \cdot \tan \theta}{\tan \theta + \tan \Phi'}$$

$$P_{n_tol}(x) = q_{x_tol}(x) \cdot (\sin^2 \theta + k \cdot \cos^2 \theta)$$

Fuerza de fricción inicial por unidad de área en la superficie de la pared de la tolva:

$$V_{n_tol}(x) = p_{n_tol}(x) \cdot \tan \Phi'$$

$$V_{n_tol}(x) = q_{x_tol}(x) \cdot (1 - k) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

Donde la expresión 4-7 del Código, se utiliza para calcular $p_{n_tol}(x)$.

Determinadas las cargas, se procede a efectuar las combinaciones correspondientes. Cabe aclarar que las combinaciones requeridas por el CIRSOC 201 2005, son las combinaciones básicas. Quien proyecte la estructura, deberá plantear las mismas, más todas aquellas que surjan del análisis de las acciones sobre la estructura.

A continuación, se identifican las cargas según su naturaleza.

Para el Cilindro:

- Carga de presión *vertical* por Peso Propio del cilindro (*Carga muerta D*):

$$D_{gx_cil} = \gamma_H \cdot x$$

- Carga de presión *vertical* del material ensilado (*Sobrecarga L*):

$$L_{qx_cil} = q_{x_cil}$$

- Carga de presión *vertical* por presencia de equipos de manipulación de materiales y otros, ubicados en la parte superior del silo (*Sobrecarga L*):

$$L_{eqx_cil} = \frac{W_{eq}}{\pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

Con R y r, radios exterior e interior del silo, respectivamente;

- Carga de presión *horizontal* del material ensilado sobre la pared (*Sobrecarga L*):

$$L_{qz_cil} = p_{z_cil}$$

- Carga por unidad de área por fricción *vertical* del material ensilado sobre la pared (*Sobrecarga L*):

$$L_{vx_cil} = V_{x_cil}$$

- Carga de presión *vertical* por peso propio de tapa del cilindro (*Carga muerta D*):

$$D_{gx_tap} = \frac{\gamma_H \cdot e_{tap} \cdot A_{tap}}{\pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

- Carga de presión *vertical* por sobrecarga de mantenimiento sobre la tapa (*Sobrecarga L*):

$$L_{qx_tap} = \frac{SC_{tap} \cdot A_{tap}}{\pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

Para la Tolva:

- Carga de presión *vertical* por Peso Propio de la tolva (*Carga muerta D*):

$$D_{gx_tol} = \gamma_H \cdot x$$

- Carga de presión *vertical* del material ensilado (*Sobrecarga L*):

$$L_{qx_tol} = q_{x_tol}$$

- Carga de presión *horizontal* del material ensilado sobre la pared (*Sobrecarga L*):

$$L_{qz_tol} = p_{n_tol}$$

- Carga por unidad de área por fricción *vertical* del material ensilado sobre la pared (*Sobrecarga L*):

$$L_{vx_tol} = V_{n_tol}$$

Combinación de acciones

Para cada combinación de cargas planteada, se tendrá para cierto elemento estructural (Cilindro, Anillo y Tolva) un grupo de solicitaciones asociado a dicha combinación. Las distintas solicitaciones de dicho grupo, irán variando con las distintas combinaciones, en donde cada una tomará su valor máximo en correspondencia con una cierta combinación. El dimensionado para cada solicitación se hará para la solicitación máxima entre todas las combinaciones, pero acompañada de las solicitaciones de su propio grupo, y no de las máximas. A continuación, un ejemplo que aclara lo comentado:

Combinación de carga	Grupos de solicitaciones según elemento estructural		
	Base del Cilindro	Anillo	Encuentro Tolva-Anillo
Combinación 1	$M_x, M_\phi, T_x, T_\phi, Q_x$	M_f, M_t, Q, N	$M_x, M_\phi, T_x, T_\phi, Q_x$
Combinación 2	$M_x, M_\phi, T_x, T_\phi, Q_x$	M_f, M_t, Q, N	$M_x, M_\phi, T_x, T_\phi, Q_x$
⋮	⋮	⋮	⋮
Combinación "n"	$M_x, M_\phi, T_x, T_\phi, Q_x$	M_f, M_t, Q, N	$M_x, M_\phi, T_x, T_\phi, Q_x$

Tabla 3.8 – Combinaciones de carga.

Referencias:

- M_x : Momento Flexor según eje "x"
- M_ϕ : Momento Flexor según eje " ϕ "
- T_x : Esfuerzo Membranal según eje "x"
- T_ϕ : Esfuerzo Membranal según eje " ϕ "
- Q_x : Esfuerzo de Corte según eje "x"
- M_f : Momento Flector del anillo
- M_t : Momento Torsor del anillo
- Q : Esfuerzo de Corte en el anillo
- N : Esfuerzo Normal en el anillo

Tomando como ejemplo el cilindro en su base, si para la combinación número 2 se tiene el máximo M_x , se dimensionará la armadura para dicho momento, acompañado este por las restantes solicitaciones de dicha combinación. Si luego, se obtiene el máximo corte Q para la combinación n, se dimensionará la armadura de corte, contemplando las restantes solicitaciones de la combinación n.

En ningún caso se deberán combinar los valores máximos de cada solicitación en un único estado dimensionante, ya que dichos valores máximos no son simultáneos.

3.3.9 Predimensionado del espesor de la pared de un silo.

El cálculo de las paredes verticales de los silos cilíndricos no presenta dificultades particulares.

Además de su peso propio y de las cargas que pueden tener que sufrir durante la construcción, las paredes están solicitadas por dos esfuerzos principales:

El *empuje horizontal* debido al material ensilado que mediante esfuerzos de *tracción* tiende a abrir el cuerpo cilíndrico del silo según sus generatrices, y

la *fuerza de rozamiento* vertical debida al rozamiento de la materia con las paredes, que da lugar a esfuerzos verticales de *compresión*.

Conocidos los esfuerzos ejercidos por la *masa pulverulenta ensilada*, así como los momentos flectores y esfuerzos de tracción que solicitan las paredes del silo, se da a continuación, una metodología aproximada propuesta por *Reimbert* para un predimensionado del espesor de la pared.

Sea p_{z_cil} el empuje lateral y R el radio interior del silo, la pared debe calcularse para resistir a un esfuerzo de tracción igual a:

$$\sigma_{\max_trac} = R \cdot P_{z_cil}$$

En el sentido vertical, el espesor de la pared determinado en función del esfuerzo de tracción, suele ser más que suficiente para resistir a los esfuerzos de compresión así definidos, pero en el caso particular de silos de gran altura, debe hacerse la comprobación correspondiente.

La fuerza de frotamiento del material ensilado con las paredes, por metro lineal de perímetro a la profundidad $H-x$, según *ACI 313-97* es:

$$V_{x_cil}(x) = [\gamma \cdot (H - x) - q_{x_cil}(x)] \cdot R$$

Según *CIRSOC 201-2005*, la resistencia a tracción del hormigón en condición no fisurado es:

$$f_r = 0.625 \cdot \sqrt{f'_c}$$

Por consiguiente, el espesor de la pared resultará:

$$e \geq \frac{R \cdot P_{z_cil}}{f_r}$$

Se contempla como caso de análisis un *silo cilíndrico circular de hormigón armado de 6.00 m de diámetro y de 24.00 m de altura* para almacenamiento de **trigo**. Por lo que se fija:

$$R_{int} = 6.00 \text{ m}$$

$$H = 24.00 \text{ m}$$

Las características principales del trigo son:

<i>Densidad mínima aparente</i> (γ_{min}):	= 7300 N/m ³
<i>Densidad máxima aparente</i> (γ_{max}):	= 8400 N/m ³
<i>Ángulo mínimo de rozamiento interno</i> (Φ_{min}):	= 21°30'
<i>Ángulo máximo de rozamiento interno</i> (Φ_{max}):	= 31°
<i>Ángulo de frotamiento del trigo con el hormigón</i> (Φ'):	= 31°
<i>Ángulo de talud natural del trigo</i> (ρ):	= 25°

Se recuerda lo mencionado anteriormente acerca de la variabilidad de las propiedades del material ensilado y su consideración al respecto:

Los valores de γ , μ' , k , varían. Las siguientes combinaciones deberán utilizarse con el máximo valor de γ .

- Mínimo μ' y mínimo k para máxima presión vertical q .
- Mínimo μ' y máximo k para máxima presión lateral p .
- Máximo μ' y máximo k para máxima fuerza de fricción vertical V .

Se tiene entonces:

Coeficiente mínimo de frotamiento con las paredes (correspondiente al frotamiento interno mínimo):

$$\mu' = \tan 21^{\circ}30' = 0.394$$

$$\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{21^{\circ}30'}{2} \right) = 0.462$$

Altura del cono superior de ensilado:

$$h = \frac{6.00}{2} \cdot \tan 25^{\circ} = 1.398 \text{ m}$$

El espesor de la pared se determinará en función del empuje lateral máximo. Considerando entonces la correspondiente expresión para el empuje:

Relación de presiones k . Máximo ángulo de rozamiento Φ_{max} interno para mínimo k .

$$k_{min} = 1 - \sin \Phi = 1 - \sin 31^{\circ} = 0.485$$

$$q_{x_{cil}}(x) = \frac{\gamma \cdot R}{\mu' \cdot k} \cdot \left[1 - e^{\frac{-\mu' \cdot k \cdot (H-x)}{R}} \right]$$

$$k_{máx} = 1 - \sin \Phi = 1 - \sin 21^{\circ}30' = 0.642$$

$$p_{z_{cil}}(x) = k \cdot q_{x_{cil}}(x)$$

Mediante la elaboración de una tabla de valores para las distintas presiones según la profundidad se tiene:

x	qx_cil(x)	Pz_cil(x)
[m]	[N/m ²]	
0	126809,58	81411,75
2	120436,76	77320,40
4	113503,32	72869,13
6	105959,92	68026,27
8	97752,90	62757,36
10	88823,90	57024,94
12	79109,38	50788,22
14	68540,26	44002,84
16	57041,34	36620,54
18	44530,83	28588,79
20	30919,73	19850,47
22	16111,24	10343,42
24	0,00	0,00

Tabla 3.9 – Variación de la presión con la profundidad.

Si graficamos los valores de la tabla anterior para dar una idea gráfica de la variación correspondiente de la presión horizontal según la profundidad, se tiene:

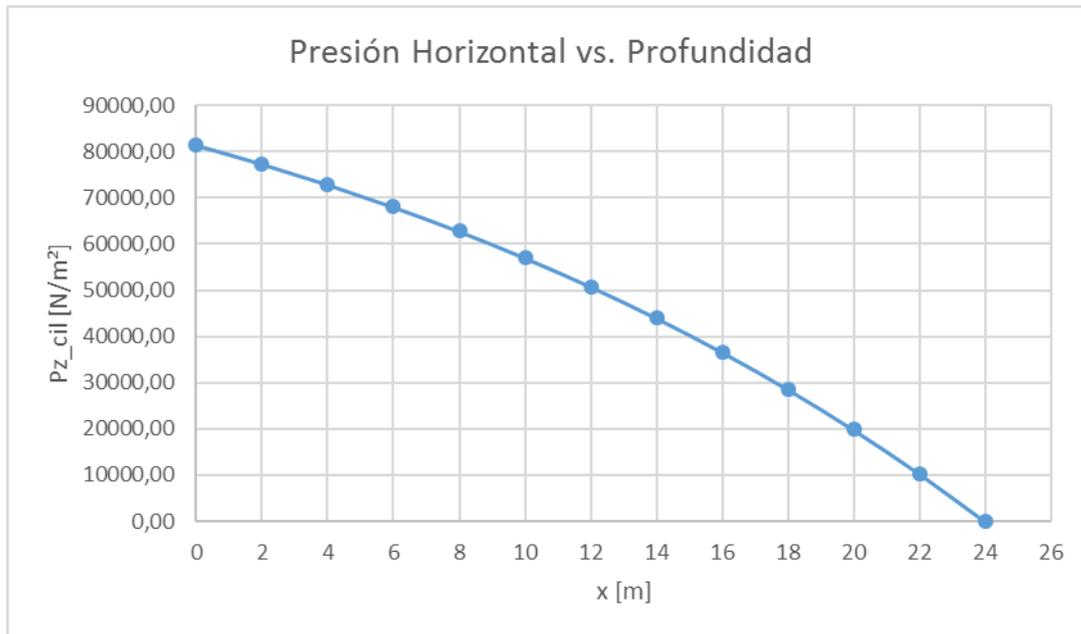


Figura 3.70 – Gráfico Presión vs. Profundidad.

Según la anterior fórmula de dimensionamiento para el espesor, se determina qué, para la presión máxima de la tabla, correspondiente al fondo del silo ($x = 0$), resulta un *espesor teórico* de 13.125 cm. Este espesor, no cumple con el espesor mínimo de 15 cm requerido por el ACI 313-97.

MÉTODO DE LA CPA (Cement Portland Association)

Como método opcional de predimensionado de las paredes de silos de hormigón armado se presenta el método la CPA, el cual consiste en una ecuación para determinar el espesor mínimo de pared.

$$h_{min} = \left[\frac{m \cdot E_s + f_s - n \cdot f_{c,ten}}{f_s \cdot f_{c,ten}} \right] \cdot p_{des} \cdot \frac{D}{2}$$

Donde:

- f_s = Tensión admisible del acero
- f_y = Tensión de fluencia del acero
- $f_{c,ten}$ = Tensión admisible del hormigón a tracción
- f'_c = Resistencia característica a compresión del hormigón
- E_s = Módulo de elasticidad del acero
- E_c = Módulo de elasticidad del hormigón
- n = Relación modular E_s/E_c
- m = Coeficiente de contracción del hormigón
- p_{des} = Presión de diseño lateral calculada según Reimbert o Janssen

Tomando los siguientes valores de las variables:

- E_s = 2.1×10^{11} N/m²
- E_c = 3.4×10^{10} N/m²
- f_y = 4.2×10^8 N/m²
- f_s = 2.4×10^8 N/m²
- $f_{c,tec}$ = 3.125×10^6 N/m²
- f'_c = 2.1×10^7 N/m²
- n = 6,20
- m = 0.0003
- P_{des} = 68356 N/m²

Se obtiene un espesor teórico mínimo de 15.50 cm, el cual cumple con el mínimo establecido por el ACI 313 97.

Por lo tanto, se sugiere adoptar como espesor inicial de diseño 16 cm.

3.3.10 Dimensionamiento estructural.*Verificación de la resistencia a compresión del hormigón*

Teniendo predimensionado el espesor de la pared, se está en condiciones de calcular la fuerza total vertical por unidad de longitud de la pared:

$$F_{vu} = 1.4 \cdot (D_{gx_{cil}} + D_{gx_{tap}}) + 1.7 \cdot (L_{qx_{cil}} + L_{vx_{cil}} + L_{qx_{tap}} + L_{eq_{cil}})$$

Calculada la carga última vertical por unidad de longitud de pared, se debe verificar que esta no exceda el máximo valor de resistencia a compresión permitido por el ACI 313-97, el cual es:

$$P_{nw} = 0.55 \cdot \phi \cdot f'_c$$

Verificación del espesor adoptado, para presencia simultánea de cargas verticales y horizontales

La carga lateral debido a viento o sismo (la que sea peor), deberá ser considerada en combinación con las cargas verticales. En este caso, se utilizarán diferentes factores de carga. Según ACI 313-97, el espesor adoptado deberá ser tal que P_{nw} no debe ser superado por alguna de las siguientes combinaciones de carga:

$$\frac{0.75 \cdot (1.4D + 1.7L + 1.7W)}{1.4D + 1.7M + 1.7L}$$

$$0.75 \cdot (1.4D + 1.7M + 1.7 \cdot 1.1E)$$

Donde D es carga muerta, L es carga viva, W es carga de viento, M es carga del material ensilado, y E es carga sísmica.

Si bien como se destacó anteriormente, la carga de material ensilado es interpretada por el ACI 313-97 como sobrecarga L, aquí, se hace una distinción con la letra M para separar a la misma de las demás, pero su factor de mayoración es el mismo que para las otras sobrecargas.

Cálculo de armaduras

Según ACI 313-97 (Art. 3.4.3), dependiendo del espesor de la pared del silo, será la necesario colocar una o dos capas de armadura. Para un espesor mayor o igual a 230 mm, se colocarán dos capas de armadura tanto horizontal como vertical, una exterior y otra interior. Caso contrario, se colocará una única capa de armadura.

Deberá respetarse siempre el recubrimiento mínimo según el ambiente al que esté expuesta la estructura. El mismo, se determinará como el valor más grande entre los mínimos establecidos, por un lado, según ACI 313-97, y por otro, según CIRSOC 201-05. ACI 313-97 establece como recubrimiento mínimo el valor de 1 pulgada.

Armadura para esfuerzo de tracción anular

Obtenido el máximo esfuerzo último de tracción anular $T_{\phi}^u(x)$ (Resistencia Requerida) por aplicación de la Teoría de Cáscaras, se procede a calcular la resistencia nominal a tracción:

$$T_n = \frac{T_{\phi}^u \max(x)}{\phi}$$

Luego, se determina la armadura a distribuir en una o dos capas (en función del espesor de la pared), según:

$$A_s = \frac{T_n}{f_y}$$

Deberá compararse este valor de armadura con la resultante de considerar la cuantía mínima para armadura horizontal requerida por ACI 313-97:

$$\rho_{min}^H = 0.0025$$

Armadura para momento flexor

Obtenido el máximo momento flexor último³⁰ $M_{x_u}(x)$ (Resistencia Requerida) por aplicación de la Teoría de Cáscaras, se procede a calcular la Resistencia Nominal a Flexión:

$$M_n = \frac{M_{x_u}^{max}}{\phi}$$

Luego, se determina el momento reducido m_n y el coeficiente k_a :

$$m_n = \frac{M_n}{0.85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2} \quad ; \quad k_a = 1 - \sqrt{(1 - 2 \cdot m_n)}$$

Se tendrá una armadura mínima por metro:

$$\frac{A_{smin}}{b_w} \geq \frac{1.40 \cdot d}{f_y} \geq \frac{\sqrt{f'_c} \cdot d}{4 \cdot f_y}$$

$$k_{amin} = \frac{A_{smin} \cdot f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d}$$

Donde:

$$d[m] = h - c_c - \frac{d_b}{2}; b_w = 1 \text{ m}$$

Con:

c_c : recubrimiento;

d_b : diámetro de la barra inicialmente adoptada.

Finalmente, se determina la armadura:

- a) Si $k_a > k_{amin}$ entonces: $\frac{A_s}{b_w} = 0.85 \cdot f'_c \cdot k_a \cdot \frac{d}{f_y} \left[\frac{cm^2}{m} \right]$
 b) Si $k_a < k_{amin}$ entonces: $\frac{A_s}{b_w} = A_{smin} = 0.85 \cdot f'_c \cdot k_{amin} \cdot \frac{d}{f_y} \left[\frac{cm^2}{m} \right]$

Cabe aclarar, que la armadura de flexión podrá ser reducida con la altura dado que el momento flexor se amortigua rápidamente con el incremento de la misma. Sin embargo, dicha reducción será posible sólo hasta el valor de armadura mínima.

Deberá tenerse en cuenta la cuantía mínima para armadura vertical requerida por ACI 313-97:

$$\rho_{min}^V = 0.0020$$

Sin embargo, respecto a cuantía mínima para secciones comprimidas, el CIRSOC 201-05, establece:

$$\rho_{min}^{comp} = 0.010$$

Por lo que deberá ser tenida en cuenta también.

³⁰ Se espera que la máxima flexión ocurra en la zona de empotramiento.

4 CONCLUSIONES Y APORTES

Se ha podido elaborar un desarrollo teórico de amplitud que estimo razonable, acerca de los elementos estructurales en superficie. Incluyendo temas que no son tratados en los programas de los cursos de grado de la carrera, como ser el caso de membranas, cáscaras, bóvedas y cúpulas.

En cuanto a desarrollo matemático se refiere, respecto al tema cáscaras pudo establecerse una base teórica razonable como introducción al tema y un punto de partida a partir del cual poder seguir avanzando en la investigación de tales contenidos, en la medida que la necesidad o la curiosidad lo requieran.

En cuanto a la aplicación práctica, lo tratado acerca de silos de hormigón armado, muestra lo interesante y amplio del tema, tanto desde el punto de vista de las acciones involucradas como del diseño. Al respecto, también se ha podido desarrollar una base teórica de alcance razonable que pone en evidencia las características mencionadas.

Humildemente espero haber podido brindar un aporte desde este Trabajo: en general, a los estudiantes que todavía no han tomado contacto con los temas aquí tratados, y en particular, a quienes conocen del tema y necesiten diseñar un silo de hormigón armado (normativa existente, criterios de diseño, de seguridad y de funcionalidad contenidos en la misma).

Por último, y a modo de cierre, dado que la presentación de este Trabajo Final es mi último requisito a cumplir para la obtención del título de Ingeniero Civil, creo interesante compartir una cita del Ingeniero Enrique Butty, extraída de su libro “*¿Qué es el Ingeniero?*”; la cual procuraré me sirva de guía en mi carrera profesional:

“El ingeniero no sólo tiene por misión construir obras y manejar máquinas; debe además desempeñar un rol importante en la sociedad, un rol económico, un rol político; debe entrar de lleno en las esferas dirigentes y gubernativas, no sólo para proyectar y construir tal puente o tal puerto, sino también para contribuir con su acción al progreso del país. Y para ello, debe tener una sólida cultura general, que le permita seguir todas las manifestaciones de la vida, tanto del punto de vista artístico y literario, como del punto de vista político, como del punto de vista económico.

Se debe ser, en una palabra, hombre, y hombre culto, antes que ingeniero” (Enrique Butty, *¿Qué es el Ingeniero? Y otras conferencias, Buenos Aires 1961.*)

5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Belluzi, Odone (1970). *Ciencia de la Construcción* (Vol. 3). Madrid: Aguilar
2. Carson J. & Craig D. (2015). *Silo Design Codes: Their limits and inconsistencies*. Elsevier/Procedia Engineering. Tyngsboro, MA: ScienceDirect.
3. Fioravanti M. y Del Carril, T. (1984). *Curso de Placas Planas*. Buenos Aires: Atec.
4. Henio, Engel (2001). *Sistemas de Estructuras*. Barcelona: Gustavo Gili.
5. Pflüger, Alf (1964). *Estática Elemental de las Cáscaras*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.
6. Ravenet, Juan (1977). *Silos: Teoría, Investigación, Construcción* (Vol. 1). Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
7. Ravenet, Juan (1978). *Silos: Deformaciones, Fallas, Explosiones, Prevención de Accidentes* (Vol. 2). Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
8. Ravenet, Juan (1983). *Silos: Flujo de Vaciado de Sólidos, Formación de Bóvedas, Efectos* (Vol. 3). Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
9. Reimbert, M. y A. (1977). *Silos: Teoría y Práctica* (Vol. 1). Buenos Aires: Americalee.
10. Reimbert, M. y A. (1979). *Silos II: Presiones y Sobrepresiones de Vaciado en Silos Verticales. Estudio de los Empujes en Silos Horizontales y Muros de Contención* (Vol. 2). Buenos Aires: Americalee.
11. Timoshenko, S. & Goodier J. (1951). *Theory of Elasticity*. York, PA: Mc Graw-Hill.
12. Timoshenko S. & Krieger W. (1959). *Theory of Plates and Shells*. Tokyo: Mc Graw-Hill.
13. Torroja Miret, Eduardo (1957). *Razón y Ser de los Tipos Estructurales*. Madrid: Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y el Cemento.
14. Zill, Denis (1998). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Thomson Editores.