Biblioteca digital
de la Universidad Catolica Argentina

Landro, Alberto H. ; González, Mirta L.

Acerca de los "Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad" de A. N. Kolmogorov

Documento de Trabajo Nº 33

Facultad de Ciencias Económicas

Escuela de Economía "Francisco Valsecchi"

Este documento está disponible en la Biblioteca Digital de la Universidad Católica Argentina, repositorio institucional desarrollado por la Biblioteca Central "San Benito Abad". Su objetivo es difundir y preservar la producción intelectual de la Institución.
La Biblioteca posee la autorización del autor para su divulgación en línea.

Cómo citar el documento:

Landro, A. H., González, M. L. (2011, marzo). Acerca de los "Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad" de A. N. Kolmogorov [en línea] (Documento de trabajo No. 33 de la Escuela de Economía "Francisco Valsecchi" de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Católica Argentina). Disponible en: http://bibliotecadigital.uca.edu.ar/repositorio/investigacion/acerca-fundamentos-teoria-probabilidad.pdf

(Se recomienda indicar fecha de consulta al final de la cita. Ej: [Fecha de consulta: 19 de agosto de 2010]).

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Pontificia Universidad Católica Argentina
"Santa María de los Buenos Aires"

Acerca de los "*Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad*" de A. N. Kolmogorov

Por

Alberto H. Landro y Mirta L. González

Facultad de Ciencias Económicas

Escuela de Economía "Francisco Valsecchi"

Documento de Trabajo Nº 33

Marzo de 2011

Los autores del presente artículo ceden sus derechos, en forma no exclusiva, para que se incorpore la versión digital del mismo al Repositorio Institucional de la Universidad Católica Argentina como así también a otras bases de datos que la Universidad considere de relevancia académica.

Acerca de los “*Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad*” de A. N. Kolmogorov *

Alberto H. Landro [a] **Mirta L. González** [b]

Resumen: Si bien la literatura sobre la probabilidad ha considerado tradicionalmente ciertos supuestos acerca de cuáles fueron los objetivos y los alcances de los “*Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad* (*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*)” en el desarrollo de la teoría de la probabilidad, un análisis detallado de la obra de Kolmogorov permite concluir que estas hipótesis son, en general, incorrectas y que estos errores de interpretación condujeron a desarrollos conceptuales y didácticos inadecuados.

1.- Introducción

Los libros de texto consideran, habitualmente, que los “*Grundbegriffe*” de Kolmogorov constituyeron un punto de inflexión en el desarrollo de la teoría de la probabilidad, cuya pretensión era: **i)** solucionar el problema de la falta de rigurosidad con que los matemáticos de los siglos XVIII y XIX y la primera mitad del siglo XX habían tratado los problemas de la probabilidad; **ii)** considerar a la probabilidad como una idea primitiva, independiente de cualquier interpretación acerca de la naturaleza del azar y **iii)** a partir de la concepción de la teoría de la probabilidad como un caso particular de una teoría matemática abstracta, definir una axiomática que actuara como sistema de referencia de las axiomáticas derivadas de las distintas interpretaciones de la noción de probabilidad.

Un análisis cuidadoso de la evolución del pensamiento probabilístico permite concluir que estas consideraciones, en general, son inexactas y que estos errores de interpretación sobre los fundamentos filosóficos de la axiomática, que constituye el núcleo de los “*Grundbegriffe*”, afectaron los alcances de los teoremas derivados y, en consecuencia, la enseñanza de la teoría de la probabilidad.

2.- Los antecedentes

Los primeros intentos de vinculación de la teoría de la medida de conjuntos e integración de Lebesgue con la cuantificación de la probabilidad fueron propuestos por Borel, E. (1905), iniciando un proceso que culminó con el sistema axiomático contenido en los “*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*” de Andrei Nikolaievitch Kolmogorov.

En 1909a, mediante la formulación de la conocida como ley fuerte de los grandes números, Borel logró formalizar esta relación entre la teoría de la medida, una interpretación geométrica de la probabilidad y el concepto de independencia en las sucesiones de eventos repetibles que constituye el núcleo de la teoría clásica de la probabilidad[1].

No obstante, si bien en su “*Élements de la théorie des probabilités*” (1909b) Borel insiste en la interpretación geométrica de la probabilidad y afirma que su ley de los grandes números puede ser obtenida formalmente utilizando la teoría de la medida, en la demostración deja de lado la medida de conjuntos y proporciona una demostración imperfecta utilizando generalizaciones a conjuntos numerables de los teoremas de la probabilidad total y de la probabilidad compuesta. Esta circunstancia puede ser atribuida a razones filosóficas relacionadas con su rechazo en aceptar la noción de probabilidades numerables, lo cual lo obligó a emplear argumentos que consideran la derivación de las probabilidades como límites de las sucesiones de repeticiones independientes. Fueron Faber, G. (1910) y Hausdorff, F. (1914) quienes enmendaron esta falencia obteniendo demostraciones rigurosas de la ley

* Este trabajo fue realizado en el ámbito del Instituto de Investigaciones en Econometría de la FCE (UBA).
a. Profesor Titular, UCA.
b. Profesora Protitular, UCA.

[1]. Como se verá en la Sec. 3, la diferencia fundamental entre la probabilidad y la teoría de la medida está dada por el concepto de independencia estocástica.

fuerte de los grandes números utilizando exclusivamente argumentos de teoría de la medida[2].

Las demostraciones de Borel, Faber y Hausdorff fueron generalizadas por Cantelli, F.P. (1916a)(1916b)(1917a)[3]. Posteriomente Kolmogorov, A.N. (1931)(1933) y Prokhorov, Y.V. (1956) establecieron las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la validez de la ley de los grandes números[4].

El resultado de todas estas generalizaciones fue una ley fuerte de los grandes números interpretable de acuerdo con dos versiones: una relacionada con los números reales y otra con la probabilidad. Siguiendo los cánones de la axiomatización de Sierpińsky de la medida de Lebesgue, Steinhaus, H. (1923)(1929)(1930a)(1930b) en sus trabajos sobre los teoremas en el límite[5], propuso una solución a esta dualidad mediante una axiomatización de la teoría de Borel. Denotando por A al conjunto de todas las sucesiones binarias infinitas, Steinhaus postuló los siguientes axiomas para una clase C de subconjuntos de A y una función real p que representa a las probabilidades de los elementos E de C: **i)** $p(E) \geq 0$ para todo $E \in C$; **ii) a)** para toda sucesión binaria finita $E*$, el subconjunto E de A formado por todas las sucesiones binarias infinitas que comienzan con $E*$, pertenecen a C; **b)** si dos de tales sucesiones binarias finitas, E_1^* y E_2^*, difieren solamente en un elemento, entonces $p(E_1) = p(E_2)$ (donde E_1 y E_2 denotan los subconjuntos de A que comienzan con las sucesiones E_1^* y E_2^*, respectivamente); c**)** $p(A) = 1$; **iii)** la clase C es cerrada bajo uniones finitas numerables de elementos disjuntos y la función p satisface una aditividad finita y una aditividad numerable; **iv)** si $E_1 \supset E_2$ y $E_1, E_2 \in C$, entonces todo subconjunto de E pertenece a C (debe tenerse en cuenta que, en este caso, cuando se verifica E_2, también se verifica E_1, en otros términos, si no se verifica E_1, E_2 no puede verificarse); **v)** si $E \in C$ y $p(E) = 0$, entonces todo subconjunto de E pertenece a C[6].

Otro antecedente importante en el proceso de construcción de los "*Grundbegriffe*" y, por lo tanto, de la formulación de la axiomática de Kolmogorov fue el trabajo de Slutsky, E. (1922)[7]. Su propuesta asumió como punto de partida la sustitución del término "probabilidad" por el de "*valencia*" ("лентноть")[8] (en su concepto, la probabilidad sería solamente una interpretación del cálculo de valencias) y la eliminación de la noción de eventos igualmente probables. Sustituyó el concepto de equiprobabilidad por el mero supuesto que, si determinados casos a los cuales se les asigna un número α son subdivididos, los números asignados a los sub-casos deberían sumar α (pudiendo ser los números asignados a los sub-casos iguales o no). De esta forma los teoremas de la probabilidad total y de la probabilidad compuesta pasaron a pertenecer a un cálculo (que no puede ser considerado como un cálculo de probabilidades) tan abstracto como la teoría de grupos[9]. Slutsky consideró además que, dado que las

[2]. Ver Doob, J.L. (1989)(1994), von Plato, J. (1994).

[3]. Los resultados obtenidos por Cantelli fueron de gran importancia, en la medida que impulsaron a otros autores al desarrollo de diferentes conceptos de convergencia estocástica.

[4]. El desarrollo de las teorías de la medida y de la integración a fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX ya ha sido estudiado exhaustivamente (ver, por ejemplo, Hawckins, T. (1970), Pier, J.P. (1994a en Pier, J.P. (ed.))(1994b). Por lo tanto, aquí se intentará solamente una breve reseña de aquellos trabajos que influyeron directamente en el contenido de los "*Grundbegriffe*".

[5]. Steinhaus utilizó en su solución las funciones de Rademacher, cuyas memorias de 1922 y 1923 dieron origen a la conocida como escuela polaca de funciones independientes, la cual realizó importantes aportes a la teoría de la probabilidad.

[6]**.** La axiomática de Sierpińsky, de la cual deriva la axiomática de Steinhaus incluye los axiomas **i)**, **iii)**, **iv)** y **v)** y un axioma (que Steinhaus demostró que es equivalente a su axioma **ii)**), según el cual el valor $p(J)$ de un intervalo J es su medida). Ver Holgate, P. (1997).

[7]. Kolmogorov, A.N. (1948): "*Slutsky fue el primero en dar una versión correcta del contenido puramente matemático de la teoría de la probabilidad*".

[8]. Laemmel, R. (1904) ya había utilizado el término alemán "*valenz*".

[9]. Slutsky, E. (1922) reconoció tres interpretaciones distintas del cálculo de valencias: **i)** en términos de la probabilidad clásica (con eventos igualmente probables); **ii)** a partir de las sucesiones empíricas finitas (que generan frecuencias relativas); **iii)** como límite de las frecuencias relativas.

sucesiones empíricas de repeticiones independientes poseen propiedades que trascienden la existencia de un límite, la probabilidad no podía ser asimilada al límite de una frecuencia relativa.

En su memoria de 1929, Kolmogorov adoptó este planteo de Slutsky consistente en concebir a la probabilidad como un caso particular de una teoría abstracta[10] y propuso una interpretación de la probabilidad relacionada con una función M (a la que denominó "*especificación de la medida*", "мероопрелеление") que asigna números no-negativos $M(E)$ (a los que denominó "*medida*", "мера") a cada elemento E de una clase de subconjuntos de un conjunto de atributos A y supuso solamente que dados dos elementos E_1 y E_2 disjuntos, entonces la función M asignará un número a dos cualesquiera de los tres conjuntos E_1, E_2 y $E_1 \cup E_2$, de modo que el número a asignar al tercer conjunto queda determinado por añadidura, verificándose que[11]:

$$M\left(E_1 \cup E_2\right) = M\left(E_1\right) + M\left(E_2\right)$$

El hecho de que las operaciones entre eventos pudieran ser identificadas con las operaciones entre conjuntos de tal modo que subsistieran las propiedades formales de estas últimas, permitió quitar a los eventos toda base material y considerarlos como entes matemáticos susceptibles de aplicarles procedimientos, razonamientos y deducciones propios de la lógica matemática. Debe tenerse en cuenta que la representación de los eventos mediante conjuntos constituye un arbitrio útil para facilitar su tratamiento matemático, pero no implica ninguna afirmación acerca de la naturaleza de los mismos. El concepto de evento posee un contenido intuitivo que no puede ser expresado por una estructura matemática.

Con respecto a la probabilidad de ocurrencia de E_2 condicionada por el supuesto de la ocurrencia de E_1, "*...por analogía con el concepto usual*"[12], Kolmogorov propuso la definición:

$$M\left(E_2 \,/\, E_1\right) = \frac{M\left(E_1 \cap E_2\right)}{M\left(E_1\right)}$$

En 1930, como una extrapolación lógica al caso de sucesiones infinitas de eventos, Kolmogorov demostró que las únicas probabilidades que satisfacen los axiomas de Steinhaus son las que se obtienen de un sistema isomórfico con la medida de Lebesgue en el intervalo $\left[0;1\right]$. Su extensión del alcance de estos axiomas incluyó a todas las sucesiones de variables aleatorias, aún las variables complejas, pero no trascendió el contexto geométrico y, por lo tanto, no consideró la noción de probabilidad en espacios abstractos. Esta tarea les correspondió a los matemáticos Stanislaw Ulam y Zbigniew Łomnicki[13].

Por su parte, Cantelli, F.P. (1932)(1933)(1935) introdujo su teoría abstracta de la probabilidad en la cual descarta el empleo de nociones empíricas como las de posibilidad, evento, probabilidad e independencia y que, sólo en cierta forma, conserva las reglas clásicas de la probabilidad total y compuesta. Denotando por $m(E)$ el área de

---

10. Debe tenerse en cuenta que, a partir de su trabajo de 1931 sobre procesos de Markov, Kolmogorov modificó este planteo y adoptó como fundamento de su análisis la teoría de Fréchet.

11. Obsérvese que estas condiciones coinciden con los axiomas **iii)** y **iv)** de Steinhaus, H. (1923).

12. Kolmogorov, A.N. (1929). Esta definición se basa en los resultados de Steinhaus, H. (1923) quien, como se mencionó más arriba, ya había formulado una axiomática isomórfica a la de Sierpińsky, W. (1918) para la medida de Lebesgue.

13. Estos autores, integrantes del Centro de Investigaciones en Matemática de Lwów, Polonia, dirigido por Steinhaus, demostraron en sus memorias de 1932 y 1934, que M es una medida de probabilidad sobre una σ-álgebra completa y que, a partir de una sucesión numerable de espacios, con dichas medidas de probabilidad se puede construir una medida de probabilidad que satisfaga las mismas condiciones en el espacio producto.

un conjunto E estableció: **i)** que, dados dos subconjuntos E_1 y E_2 disjuntos, se verifica que $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$; **ii)** que $0 \leq \frac{m(E_1 E_2)}{m(E_i)} \leq 1 \; (i = 1,2)$ (en particular, si se verifica que $m(E_1 E_2) = m(E_1) m(E_2)$, considera que los conjuntos E_1 y E_2 son "*multiplicables*") y **iii)** que aún las leyes de los grandes números de Bernoulli y del logaritmo iterado de Khinchin pueden ser tratadas con el mismo nivel de abstracción. Desarrolló, además, en forma independiente de Kolmogorov, un proyecto de combinación de la interpretación frecuencista de la probabilidad con este sistema axiomático abstracto. En su opinión el cálculo de probabilidades clásico para una clase particular de eventos que se caracterizan porque el mecanismo físico que genera la aleatoriedad incluye en forma simétrica a todos los resultados posibles, debía ser desarrollado (en forma circular) en tres etapas: La primera consistente en estudiar experimentalmente los casos igualmente probables (analizando si ocurren con la misma frecuencia) y de este modo justificar experimentalmente el empleo de las reglas de la probabilidad total y compuesta. La segunda etapa estaba dirigida a desarrollar, sin hacer referencia a su justificación empírica, una teoría abstracta basada exclusivamente en dichas reglas y la tercera consistía en deducir las probabilidades de dicha teoría abstracta y utilizarlas para predecir las frecuencias relativas.

Como una culminación del desarrollo experimentado por la teoría de la medida entre 1900 y 1930 por los aportes de los autores mencionados y fundamentalmente por la obra de Maurice Fréchet[14], se publicó "*Grundbegriffe der Wahrsecheinlichkeitsrechnung*" (1933)[15], cuyo objetivo, de acuerdo a lo mencionado por el autor en el prefacio, era "*...satisfacer una falencia en la literatura sobre la teoría de la probabilidad (incluyendo en dicha literatura el libro de Fréchet, que se encuentra en preparación) y brindar una presentación del sistema en su totalidad, libre de complicaciones superfluas*". La satisfacción de esa "*falencia*" implicaba extender la definición rigurosa de probabilidad también a eventos para los cuales el conjunto de resultados posibles era infinito (una generalización que implicaba, por añadidura, una extensión arbitraria del método de inferencia inductiva)[16].

Si se tiene en cuenta que en las 62 páginas de esta memoria (con características más retóricas y filosóficas que matemáticas) Kolmogorov logró introducir toda la matemática, sintetizada fundamentalmente en la obra de P.J. Daniell (en particular en lo relacionado con su teorema de consistencia es decir, con la construcción de probabilidades en espacios de infinitas dimensiones) y J. Radon y O, Nikodym (en lo referido a las probabilidades condicionadas y a los valores esperados), puede considerarse que los "*Grundbegriffe*" satisficieron plenamente el objetivo planteado en su prefacio[17].

Como núcleo de los "*Grundbegriffe*", adoptando una posición filosófica muy semejante a la justificación utilizada por Borel, E. (1939b) y Lévy, P. (1925) para la interpretación geométrica de la probabilidad[18] y en respuesta al sexto de la famosa colección de problemas propuestos por Hilbert, D. (1902), según el cual "*Debemos tratar mediante axiomas aquellas ciencias físicas en las cuales las matemáticas juegan un rol importante, en*

---

14. Fue Kolmogorov el primer en advertir que los resultados obtenidos por Fréchet constituían una base fundamental para la teoría de la probabilidad. En el prefacio de los "*Grundbegriffe*" (1933) expresa que "*Después de la investigaciones de Lebesgue, las analogías entre la medida de un conjunto y la probabilidad de un evento y la integral de una función y la esperanza matemática de una variable aleatoria quedaron claras. Estas analogías podrían ser extendidas dado que, por ejemplo, muchas propiedades de las variables aleatorias independientes son análogas a las correspondientes propiedades de las funciones ortogonales. No obstante, para basar la teoría de la probabilidad sobre estas analogías era necesario independizar a la teoría de la medida y a la integración de los elementos geométricos que aún figuraban en primer plano en la propuesta de Lebesgue. Este logro fue obtenido por Fréchet*".

15. Sergei Bernstein, Emile Borel, Paul Lévy, Antoni Łomniki, Evgeny Slutsky, Hugo Steinhaus, Richard von Mises y Maurice Fréchet forman el núcleo de la bibliografía de los "Grundbegriffe". A esta lista se deberían agregar los aportes de Henri Lebesgue, Wacław Sierpiński, Constantin Carathéodory, Johann Radon, Otton Nikodym, Percy Daniell y Norbert Wiener, cuya obra constituye la herencia filosófica y matemática que recibió Kolmogorov.

16. Fréchet, M. (1938b): "*El momento en el que se resumieron todos los elementos necesarios para formular explícitamente el cuerpo completo de axiomas de la teoría de la probabilidad (clásica modernizada) fue, precisamente, aquél en que el señor Borel introdujo esta nueva clase de aditividad en el cálculo de probabilidades -en 1909-. No basta con poseer todas las ideas 'in mente', se debe estar seguro que esa totalidad de ideas es suficiente, expresarlas en forma conjunta y asumir la responsabilidad de afirmar que no es necesario nada más para construir la teoría. Esto fue lo que hizo el señor Kolmogorov. Este fue su logro*".

17. Tal es la riqueza conceptual de este resultado que muchos autores consideran que los dos tomos de Fréchet, M. (1937-1938) pueden ser considerados como una nota de pie de página de los "*Grundbegriffe*".

18. Para un análisis de las ideas de Borel y Lévy sobre su justificación de la probabilidad geométrica, ver Knobloch, E. (1987).

particular, la teoría de la probabilidad y la mecánica", Kolmogorov formuló lo que, arbitrariamente, muchos probabilistas denominan la axiomática clásica.

3.- La axiomática

*** Axioma 1**: Los eventos forman una σ-álgebra s , es decir, una clase cerrada respecto de las operaciones de unión, intersección y negación de conjuntos numerables de eventos y del límite de sucesiones de eventos, es decir: **a)** si $E_j \in s \left(j = 1,2,\ldots\right)$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in s$ (como se verá en la próxima sección, la condición de que s sea cerrada con respecto a la unión infinita de eventos ha sido muy criticada por muchos probabilistas debido a que no surge de la aplicación de un razonamiento intuitivo); **b)** si $E_j \in s \left(j = 1,2,\ldots\right)$, entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in s$ (en realidad, dado que $E \cap E' = \left(E \cup E'\right) - \left[\left(E - E'\right) \cup \left(E' - E\right)\right]$, esta propiedad es una consecuencia del postulado **a)**); **c)** dada una sucesión de eventos $\left\{E_1, E_2, \ldots\right\}$, pertenecientes a s , entonces $\lim_{j \to \infty} E_j \in s$.

*** Axioma 2**: $\Omega \in s$

*** Axioma 3**: Asociado a cada evento $E \in s$, existe un número real no-negativo, $p\left(E\right)$, al que se denominará **probabilidad de ocurrencia del evento** E .

*** Axioma 4**: La probabilidad de que ocurra al menos uno de los eventos incluidos en el espacio muestral es igual a uno, $p\left(\Omega\right) = 1$.

*** Axioma 5 (de aditividad)**: Sean E_1 y E_2 dos eventos incompatibles, es decir, tales que no pueden presentarse en forma simultánea ($E_1 \cap E_2 = \varnothing$), entonces se verificará que:

$$p\left(E_1 \cup E_2\right) = p\left(E_1\right) + p\left(E_2\right)$$

(la primera formulación clara de este principio figura en el "*Ars conjectandi*" (1713) de J. Bernoulli).

*** Axioma 6 (teorema de continuidad)**: Dada una sucesión monótona de eventos, $E_i \subset E_{i+1} \left(i = 1,2,3,\ldots\right)$, se puede escribir:

$$E_i = E_1 \cup \left(E_1 \cap \overline{E}_2\right) \cup \ldots \cup \left(E_{i-1} \cap \overline{E}_i\right) \qquad \left(i = 2,3,\ldots\right)$$

De lo que resulta que:

$$p\left(E_i\right) = p\left(E_1\right) + \sum_{j=2}^{i} p\left(E_{j-1} \cap \overline{E}_j\right) \qquad \left(j = 2,3,\ldots\right)$$

Aplicando m. a m. el operador límite, será:

$$\lim_{i\to\infty} p(E_i) = p(E_1) + \sum_{j=2}^{\infty} p\left(E_{j-1} \cap \overline{E}_j\right) = p\left[E_1 \cup \bigcup_{j=2}^{\infty}\left(E_{j-1} \cap \overline{E}_j\right)\right] =$$

$$= p\left\{\lim_{i\to\infty}\left[E_1 \cup \left(\bigcup_{j=2}^{\infty}\left(E_{j-1} \cap \overline{E}_j\right)\right)\right]\right\} = p\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right)$$

Lo que demuestra que la probabilidad es una función continua respecto a cualquier sucesión monótona de eventos.

Por otra parte, si dicha sucesión es tal que $E_i \supseteq E_{i+1}$ $(i = 1,2,\ldots)$, entonces, se verificará que $\overline{E}_i \subseteq \overline{E}_{i+1}$ $(i = 1,2,\ldots)$ y, por lo tanto, dada la existencia del límite de la sucesión de las $p\left(\overline{E}_i\right)$, será:

$$\lim_{i\to\infty} p(E_i) = 1 - \lim_{i\to\infty} p\left(\overline{E}_i\right) = 1 - p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{E}_i\right) = p\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{\overline{E}}_i\right) = p\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right)$$

Dados los cinco primeros axiomas, se demuestra fácilmente que este sexto axioma (o teorema) de continuidad es equivalente a la condición de **aditividad completa** o **aditividad numerable** o σ**-aditividad** (que, obviamente, contiene a la aditividad simple como caso particular): Sea $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ un conjunto de eventos incompatibles de a pares (es decir, tales que $E_i \cap E_j = \varnothing\ (i \neq j; i, j = 1,2,\ldots)$). Por inducción, se demuestra que:

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) + E_{n+1}$$

Dado que cualquiera de los eventos E_j $(j = 1,2,\ldots)$ y E_{n+1} son incompatibles, será:

$$p\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) = p\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) + p(E_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} p(E_j)$$

De la misma forma, se puede escribir:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right)$$

y, como cada uno de los eventos E_j $(j = 1,2,\ldots)$ es incompatible con cada uno de los eventos E_j $(j = n+1, n+2, \ldots)$, se verificará que:

$$p\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)=p\left(\bigcup_{j=1}^{n}E_j\right)+p\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty}E_j\right)=$$

$$=\sum_{J=1}^{n}p\left(E_j\right)+p\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty}E_j\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}p\left(E_j\right)+\lim_{n\to\infty}p\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty}E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}p\left(E_j\right)$$

Debe tenerse en cuenta que los eventos $\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty}E_j\right)$ definen una sucesión decreciente, es decir que $\left(\bigcup_{j=n}^{\infty}E_j\right)\supset\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty}E_j\right)$. De modo que $\lim_{n\to\infty}\bigcup_{j=n+1}^{\infty}E_j=0$.

4.- Algunas consideraciones sobre el contenido filosófico

1) Si bien, como se mencionó en la Sec. 2, respecto de sus contenidos matemáticos fundamentales, las axiomáticas de Kolmogorov y Daniell son coincidentes (obsérvese que los seis axiomas de Kolmogorov pueden resumirse diciendo que $p(\bullet)$ es una función no-negativa, aditiva en el sentido de Fréchet, M. (1937-1938), con el agregado de la condición $p(\Omega)=1$), desde el punto de vista conceptual presentan diferencias radicales: **i)** contrariamente a la posición de Kolmogorov, Daniell nunca consideró la aplicación de su sistema axiomático a la teoría de la probabilidad (ni Wiener, ni Daniell pensaron, a partir de la formulación de un método general de representación de la teoría de la medida, en una teoría de la probabilidad como una rama conceptualmente independiente de la matemática); **ii)** al menos en términos formales, el resultado obtenido por Kolmogorov, en la medida que considera una cardinalidad arbitraria de los elementos del conjunto, es más general que el de Daniell, que considera una cardinalidad numerable (debe tenerse en cuenta que esta generalización es exclusivamente a nivel conceptual, no implica modificaciones matemáticas significativas, ni resulta relevante en las aplicaciones)[19] y **iii)** Kolmogorov incorpora el concepto de independencia estocástica de los eventos como un factor fundamental de diferenciación entre la probabilidad y la teoría de la medida.

2) Debe tenerse en cuenta que la teoría desarrollada por Kolmogorov, a excepción de los valores triviales 0 y 1, no considera la asignación de valores a las probabilidades. Esto pone en evidencia una característica fundamental de la teoría axiomática de la probabilidad: su capacidad para transformar valores de probabilidad de eventos simples en valores de probabilidad de eventos complejos y su incapacidad para determinar valores de probabilidad no triviales. La asignación de valores de probabilidad no triviales requiere una definición particular de probabilidad. Kolmogorov, a través de su aparente frecuencismo, adoptó una definición acorde con la interpretación propensionalista de K.R. Popper.

Una prueba indiscutible de la adopción de esta interpretación frecuencista-propensionalista por parte de Kolmogorov es su aceptación del principio de Cournot acerca de la aproximación de los resultados de un conjunto de condiciones repetibles al verdadero valor de la probabilidad, como nexo principal de la axiomática con el mundo real.

El conocido como **principio de Cournot** está relacionado con la existencia de eventos distintos de Ω que

[19]. Ver Shafer, G.; Vovk, V. (2001)(2005)(2006).

también tienen probabilidad igual a uno: son los denominados **eventos quasi-ciertos** o **ciertos-en probabilidad**[20]. La negación de un evento quasi-cierto define un evento que, no coincidiendo con el evento imposible, se comporta como tal en lo que se refiere a su probabilidad y se denomina **quasi-imposible** o **imposible-en probabilidad**[21]. Estos eventos poseen las siguientes propiedades: **i)** la unión de dos eventos imposibles-en probabilidad es un evento imposible-en probabilidad (propiedad generalizable a cualquier conjunto finito o infinito numerable de eventos); **ii)** sean E_I un evento imposible-en probabilidad y E un evento ni cierto ni imposible, entonces se verifica que $p\left(E_I \cap E\right)=0$ y que $p\left(E_I \cup E\right)=p\left(E\right)$; **iii)** sean E_C un evento cierto-en probabilidad y E un evento ni cierto ni imposible, entonces se verifica que $p\left(E_C \cap E\right)=p\left(E\right)$ y que $p\left(E_C \cup E\right)=1$ (Borel, E. (1912a)(1912b)(1930)(1939b), quien estudió estas probabilidades con especial interés, determinó el límite 10^{-1000} para la existencia de la quasi-imposibilidad).

Estas definiciones derivan de los conceptos de evento **moralmente imposible** y **moralmente cierto** formulados originalmente por Bernoulli, J. (1713). La **certeza moral probabilística** fue ampliamente discutida en el siglo XVIII. D'Alembert, J.B.L.R. (1761) (1767) planteó la necesidad de distinguir entre eventos "*metafísicamente imposibles*" y "*físicamente imposibles*"[22]. Al respecto, Buffon, G, L. (1777) consideró que la diferencia entre las certezas moral y física era una cuestión de grado de aproximación, según su apreciación un evento con probabilidad $\frac{9999}{10000}$ es moralmente cierto, en tanto que un evento con una probabilidad mucho mayor puede ser considerado como físicamente cierto[23].

Por su parte, Cournot, A.A. (1843), basándose en el concepto de probabilidad geométrica, planteó una formulación de la ley de los grandes números según la cual se puede asegurar que un evento moralmente imposible no ocurrirá (que es matemáticamente posible pero físicamente imposible) y como corolario, que es físicamente imposible que, dada una sucesión suficientemente larga de repeticiones, la frecuencia relativa de un evento difiera sustancialmente de su probabilidad.

Cournot consideró que este principio, que asimilaba una probabilidad infinitesimalmente pequeña a la imposibilidad de ocurrencia de un evento, proporcionaba un significado empírico a la probabilidad clásica[24]. Pero, debe tenerse en cuenta que existe una diferencia conceptual muy importante entre la afirmación de que un evento de probabilidad infinitesimal no ocurrirá y el supuesto de que, por sí sola, esa decisión de no-ocurrencia del evento proporcionará a la teoría clásica un significado empírico[25].

---

20. Markov, A.A. (1912): "*Cuanto más se aproxime a uno la probabilidad de un evento, mayor será la razón para esperar su ocurrencia y no esperar lo opuesto a su ocurrencia. En cuestiones prácticas, estamos obligados a considerar como ciertos aquellos eventos cuya probabilidad se aproxima a 1 y como imposibles a aquellos cuya probabilidad es pequeña. Consecuentemente, uno de los logros más importantes en la teoría de la probabilidad consiste en identificar aquellos eventos cuyas probabilidades son próximas a uno o a cero*".

21. Es decir, un evento cuya probabilidad, si bien no es efectivamente igual a cero, sólo posee un interés puramente metafísico.

22. Ver Daston, L. (1979).

23. Buffon, al igual que Butler y Price, utilizó el ejemplo del "amanecer". Partiendo del supuesto de que los dos resultados posibles ("amanecer" o "no amanecer") eran equiprobables y teniendo en cuenta que el resultado "amanecer" se había producido, sin excepción, todos los días de los últimos 5781 años, concluyó que la probabilidad del evento "que mañana amanezca" era igual a $1-\frac{1}{2^{n-1}}$, donde n denotaba el total de observaciones diarias desde la creación del mundo (debe tenerse en cuenta que, en 1777 y, de acuerdo con la cronología del Reverendo James Ussher, obispo de Armagh, la edad atribuida al planeta tierra era de 5781 años). Ver Loveland, J. (2001).

24. Cournot, A.A. (1843): "...*el evento físicamente imposible es, por lo tanto, aquél al que le corresponde un probabilidad infinitamente pequeña y esta sola observación es suficiente para proporcionar una sustancia objetiva fenomenal a la teoría de la probabilidad matemática*" (la expresión "*objetiva fenomenal*" se refiere a la distinción planteada por Kant entre el "*noumenon*", o cosa-en-sí-misma y el "*phenomenon*" u objeto de la experiencia). Ver Daston, L. (1994).

25. Boltzmann, L. (1866)(1871)(1872)(1877)(1887) utilizó el principio de Cournot para proporcionar una explicación estadística de la segunda ley de la termodinámica (los procesos disipativos son irreversibles porque la probabilidad de un estado con entropía lejos del máximo es infinitamente pequeña). Por su parte Poincaré, H. (1890) postuló en su teorema de recurrencia, que un sistema mecánico aislado limitado a una región acotada de su espacio de fase retornará eventualmente a un estado arbitrariamente próximo a su estado inicial, si dicho estado no es

Borel, E. (1906)(1909b)(1914)(1930)(1939b), utilizando a menudo un estilo más literario que matemático o filosófico, adoptó el tratamiento de los eventos con probabilidad infinitesimal como imposibles y estableció una clasificación de los mismos más refinada que la de Buffon, según la cual una probabilidad de 10^{-6} es despreciable "*a escala humana*", una probabilidad de 10^{-15} es despreciable "*a escala terrestre*" y una probabilidad de 10^{-50} es despreciable "*a escala cósmica*"[26].

En desacuerdo con lo que se podría denominar la filosofía ortodoxa de Laplace, von Kries, J. (1886) sostuvo que los probabilistas Laplacianos y los probabilistas franceses y rusos que formaron su sucesión comenzaron asumiendo una interpretación subjetivista intentando, luego, a partir de una interpretación equivocada del teorema de Bernoulli y del principio de Cournot, establecer la existencia de probabilidades objetivas mediante la aplicación de la ley de los grandes números. Utilizaron, sin una base conceptual válida, los postulados del teorema de Bayes para razonar acerca de las probabilidades objetivas en casos en los que se cuente con un número suficientemente largo de repeticiones[27].

A fin de resolver estos errores de interpretación, von Kries, J. (1886) propuso como condición necesaria para razonar acerca de probabilidades objetivas el **principio del "Spielraum"** según el cual las probabilidades objetivas pueden ser calculadas a partir de casos igualmente probables que cumplan las siguientes condiciones: **i)** las circunstancias que genera cada caso admiten el mismo "Spielraum", es decir, el mismo número de arreglos posibles y **ii)** además de éstas circunstancias no existe ninguna otra que afecte las expectativas acerca de cada caso. Con un razonamiento muy atinado von Kries concluye que aún cuando, de acuerdo con estas condiciones, se pueda asegurar que un evento puede poseer una probabilidad objetiva, de ninguna manera se puede asignar a la ley de los grandes números los alcances atribuidos por Hadamard y Lévy. Según von Kries, el teorema de Bernoulli postula solamente que un desvío significativo de la frecuencia relativa de un evento respecto de su probabilidad (suponiendo que, a partir de una interpretación determinística del comportamiento de los fenómenos fácticos, esta probabilidad exista) es simplemente tan improbable como cualquier otro evento improbable, dada una sucesión suficientemente larga de repeticiones[28].

Por el contrario, Hadamard, J. (1922), de acuerdo con una posición netamente determinística, sostiene que las nociones de eventos igualmente probables ("*perfectamente equivalentes*" según su nomenclatura) y de eventos muy improbables constituyen el fundamento de la teoría de la probabilidad y que el hecho que la equivalencia perfecta sea una condición matemática no verificable (en la práctica la equivalencia nunca es perfecta), no debe impedir la aplicación del principio de los eventos muy improbables.

Con respecto a la noción de eventos equiprobables, Lévy, P.P. (1925) coincidió en que puede ser considerada como un fundamento de la matemática de las probabilidades, pero admitió que si se la asume como única base de razonamiento, las probabilidades obtenidas serán meramente subjetivas. Sostuvo, además, que el concepto de evento muy improbable es el único que permite atribuir un significado empírico a los resultados de la teoría matemática[29]; que la combinación de esta noción con la ley fuerte de los grandes números permite una interpretación objetiva de la probabilidad como una constante física representada por la frecuencia relativa del evento. Como se verá inmediatamente, se puede concluir que una versión propensionalista de este postulado frecuencista fue adoptada por Kolmogorov en su "*Grundbegriffe*".

De las consideraciones realizadas precedentemente, se deriva que el principio de Cournot admite dos

---

excepcional (es decir, postuló que los estados para los cuales no se verifica la recurrencia son excepcionales, en la medida que están contenidos en subregiones cuyo volumen total es arbitrariamente pequeño).

26. Borel, E. (1939).

27. Al principio que indica que un evento con probabilidad de ocurrencia muy próxima a cero es imposible, von Kries, J. (1886) lo denominó "*el error de D'Alembert*".

28. Las críticas de von Kries al principio de Cournot ejercieron una notable influencia sobre los probabilistas alemanes, en particular sobre Czuber, E. (1903) (ver Menong, A. (1915), Kamlah, A. (1983)).

29. Debe tenerse en cuenta que, a partir de los trabajos de Wiman, A. (1900)(1901) sobre fracciones continuas, los matemáticos alemanes dirigieron sus esfuerzos a demostrar que existen conjuntos de medida nula y que estos conjuntos son imposibles, lo cual puso en evidencia el abismo que existe entre la probabilidad nula y la probabilidad infinitesimal (ver Bernstein, F. (1912)).

modalidades que se corresponden con las versiones fuerte y débil de la ley de los grandes números: **i)** una **forma fuerte** o estricta que considera que un evento con probabilidad pequeña o nula no ocurrirá en la repetición siguiente y que, combinada con los postulados del teorema de Bernoulli permite concluir que la probabilidad de un evento siempre puede ser aproximada por su frecuencia relativa a partir de una serie particular suficientemente larga de repeticiones independientes y **ii)** una **forma débil** que considera que un evento con probabilidad muy próxima a cero ocurrirá muy raramente en una serie de repeticiones y que, combinada con el teorema de Bernoulli, permite concluir que la probabilidad de un evento habitualmente puede ser aproximada por su frecuencia relativa a partir de una serie suficientemente larga de repeticiones independientes. Borel, Lévy y, en consecuencia, Kolmogorov adoptaron la forma fuerte, Chuprov y Castelnuovo la forma débil[30].

Es necesario destacar que de Finetti, B. (1937), a partir de la negación de las aproximaciones frecuencistas-propensionalistas mencionadas precedentemente, propuso una notable solución al problema de la quasi-imposibilidad, basada en la consideración de una "*jerarquía*" distinta entre las probabilidades nulas. Sean, por ejemplo, dos eventos, E_1 y E_2, ambos de probabilidad nula ($p(E_1)=0, p(E_2)=0$), y sea el evento suma ($E_1 \cup E_2$). De acuerdo con la interpretación subjetivista, tendría sentido realizar una evaluación de las probabilidades $p\left[E_1 / \left(E_1 \cup E_2\right)\right]$ y $p\left[E_2 / \left(E_1 \cup E_2\right)\right]$ las cuales deberán, de acuerdo con la condición de coherencia, cumplir la condición:

$$p\left[E_1 / \left(E_1 \cup E_2\right)\right] + p\left[E_2 / \left(E_1 \cup E_2\right)\right] = 1$$

Lo que permite concluir que una probabilidad nula puede ser "*infinitamente*" más grande o más pequeña que otra probabilidad nula, es decir, que pueden considerarse distintos "*grados de imposibilidad*"[31]. Supóngase un número X representable como un punto sobre una recta. Si a esta representación se le agregara otra dimensión, Y, la identificación del punto X requeriría, obviamente, la definición de dos condiciones, y si se agregara una tercera dimensión, las condiciones serían tres. Se tendrán, así, tres "ceros" ($0, 0^2$ y 0^3), cuya identidad aritmética no es válida desde el punto de vista de la probabilidad (en el primer caso la probabilidad sería 0, en el segundo 0^2 y en el tercero 0^3). La idea intuitiva básica que se desprende de este razonamiento es que, dados n eventos independientes con probabilidad nula, la probabilidad de su ocurrencia conjunta sería $0^n \neq 0$. De la misma forma, supóngase que el observador incorpore a su conjunto de información el conocimiento de la ocurrencia de un evento H al cual, "a priori", le asignaba una probabilidad nula. Dado, entonces, un evento E cualquiera, la probabilidad $p(E / H)$ estará dada por la relación entre el "cero" correspondiente a la probabilidad $p(E \cap H)$ y el "cero" correspondiente a la probabilidad $p(H)$.

4) Si bien es innegable que las propuestas de Lévy, P.P. (1925) y von Mises, R. (1931) y la obra de los probabilistas rusos Chuprov, A.A. (1910), Markov, A.A. (1912) y Slutsky, E. (1925) ejercieron una influencia significativa sobre el pensamiento de Kolmogorov, a partir de su interpretación del principio de Cournot, sintetizado en el siguiente párrafo de los "*Grundbegriffe*": "*Es posible asumir que a un resultado A de ocurrencia eventual bajo ciertas condiciones б, que no es nuestra intención analizar aquí, se le puede asignar un número real $p(A)$ que posee las*

[30]. En particular, Castelnuovo, G. (1919) ejerció una notable influencia sobre las posiciones adoptadas por Fréchet, M.; Halbwachs, M. (1924), Fréchet, M. (1938a)(1938b) y, por lo tanto, sobre Kolmogorov, A.N. (1933).

[31]. de Finetti, B. (1937). La nomenclatura utilizada habitualmente no es la más adecuada dado que sugiere que los valores de $p(E_1)$ y $p(E_2)$ son iguales, en la medida que ambas son iguales a cero, cuando, en realidad, de acuerdo con la interpretación subjetivista, puede no tratarse del mismo "cero".

siguientes propiedades: a) puede ser considerado como prácticamente cierto que, si el sistema de condiciones б se repite un número suficientemente grande de veces (n) y se verifica que el evento A ocurre m veces, entonces el cociente $\frac{m}{n}$ diferirá levemente de $p(A)$; b) si $p(A)$ es muy pequeño, entonces se puede considerar como prácticamente cierto que el evento A no ocurrirá en una repetición individual de las condiciones б", se puede concluir que, a pesar de su afirmación que "*...el autor*" (es decir, Kolmogorov hablando en tercera persona como el Diego) "*se ha basado, en gran medida, en el trabajo de von Mises*", en realidad, Kolmogorov formuló sus axiomas a partir de una definición propensionalista de la probabilidad basada en la propuesta de Popper, K.R. (1934)(1957b), consistente en asociar las probabilidades a los resultados de un sistema de condiciones б repetibles (no especificadas en el texto) y no a los colectivos de la interpretación frecuencista[32]. Como consecuencia de la adopción de esta interpretación, la vinculación de su axiomática abstracta con el mundo de la experiencia se materializa de acuerdo con principios no-operacionalistas según los cuales los conceptos teóricos fundamentales son asumidos habitualmente como indefinidos y se vinculan con la observación sólo en forma indirecta.

5) Si bien, como se expresó anteriormente, de acuerdo con Borel y Lévy, el principio "*...a un resultado A de ocurrencia eventual bajo ciertas condiciones б (...) se le puede asignar un número $p(A)$*" tal que "*a) puede ser considerado como prácticamente cierto que, si el sistema de condiciones б se repite un número suficientemente grande de veces (n) y se verifica que el evento A ocurre m veces, entonces el cociente $\frac{m}{n}$ diferirá levemente de $p(A)$*" puede ser deducido de la consideración conjunta del principio "*b) si $p(A)$ es muy pequeño, entonces se puede considerar como prácticamente cierto que el evento A no ocurrirá en una repetición individual de las condiciones б*" y del teorema de Bernoulli (el cual surge como un corolario de los axiomas), dado que el principio **a)** no sólo precede a los axiomas, sino que es utilizado para su formulación y que, por lo tanto, precede al teorema de Bernoulli, es obvio que para Kolmogorov asume un papel independiente. Indudablemente este planteo constituye la esencia del cambio filosófico producido por Kolmogorov en la teoría de la probabilidad: la sustitución de la condición de equiprobabilidad por los resultados de sucesiones de condiciones repetibles (resultados que dan origen al sistema axiomático) y una interpretación propensionalista del principio de Cournot como nexo principal con el mundo real.

6) En el primer capítulo de los "*Grundbegriffe*" Kolmogorov trata el problema de la aditividad finita y, si bien en el segundo capítulo adiciona a los cinco axiomas el teorema de continuidad que, como se vio, introduce la condición de la aditividad numerable[33], dado que (a pesar de que el argumento empleado por Fréchet para demostrar la σ-aditividad, puede ser deducido de la definición empírica propuesta por Fréchet, M.; Halbwachs, M. (1925)) esta propiedad trasciende lo que puede ser verificado empíricamente, manifiesta algunas reservas sobre su validez, pero la justifica en virtud de su utilidad en ciertos ámbitos de la investigación: "*Como el nuevo axioma sólo es esencial en ámbitos infinitos de probabilidad, contrariamente a lo que ocurre con los cinco primeros axiomas, es casi imposible adivinar su significado empírico. En la descripción de cualquier proceso estocástico observable sólo podemos obtener ámbitos finitos de probabilidad. Los campos infinitos de probabilidad sólo se presentan en modelos ideales de procesos estocásticos reales. No obstante, tomaremos en consideración los modelos que satisfacen el axioma 6, el cual resultó útil en ámbitos de investigación muy variados*".

7) La perspectiva histórica permite concluir que la filosofía de Kolmogorov fue menos influyente que sus axiomas,

32. Ver Sheynin, O. (1996).

33. Como se vio en la Sec. 2, la aditividad numerable fue introducida en la matemática pura por Borel, E. (1896)(1897) (1898) quien la convirtió en el tema central de la teoría de la probabilidad al demostrar su ley fuerte de los grandes números. Deben reconocerse, además, los aportes de Lebesgue, H. (1901)(1904), Radon, J. (1913), Fréchet, M. (1915a)(1915b)(1930a)(1930b), Daniell, P.J. (1918)(1919a)(1919b) (1920)(1921), Wiener, N. (1920)(1921a)(1921b)(1923)(1924), Steinhaus, H. (1923)(1930a)(1930b) y, obviamente, del mismo Kolmogorov.

posiblemente debido al fracaso de su intento de generalizarla a los procesos estocásticos[34]. Debe tenerse en cuenta que la primera y fundamental condición en el esquema de Kolmogorov es la repetibilidad ilimitada del sistema de condiciones б y que, si bien este precepto se satisface cuando se define un proceso estocástico en términos de sus probabilidades de transición[35], la cuestión se vuelve más comprometida cuando se analiza la distribución de probabilidades para los conjuntos de las trayectorias posibles, es decir, en los casos en los cuales sólo es posible acceder a una definición débil y, por lo tanto, se cuenta con una única trayectoria no repetible del proceso. Kolmogorov logró resolver esta restricción demostrando que, en particular, un proceso de Markov discreto en el dominio del tiempo[36] puede ser definido a partir de probabilidades simples, pero no logró extender este resultado a procesos continuos en el dominio del tiempo.

5.- Conclusiones

A partir de las consideraciones anteriores se puede concluir que: **i)** los "*Grundbegriffe*" no son sino la culminación natural del desarrollo experimentado por la teoría de la medida entre 1900 y 1930 a partir de los aportes de Bernstein, Borel, Lévy, Łomnicki, Slutsky, Steinhaus, von Mises, Fréchet, Carathéodory, Radon, Nikodym, Daniell y Wiener; **ii)** el aporte más importante de Kolmogorov consistió en la formalización del concepto de independencia estocástica como elemento diferenciador fundamental entre la probabilidad y la teoría de la medida; **iii)** el segundo aporte más importante consistió en la sustitución de la condición de equiprobabilidad por los resultados de sucesiones de condiciones repetibles; **iv)** el tercer aporte en orden de importancia consistió en obtener una justificación formal de la muy controvertida condición de aditividad numerable; **v)** no consideró, como afirma la literatura, a la probabilidad como un elemento abstracto carente de significado; **vi)** a pesar de la influencia de los trabajos de Fréchet y von Mises y de la aparente interpretación frecuencista, Kolmogorov formuló sus axiomas a partir de una definición propensionalista no-operacionalista de la probabilidad.

Bibliografía

- Bernoulli, J.: "*Ars conjectandi*". Thurnisiorum, 1713.
- Boltzmann, L.: "Über die mechanische Bedeutung des sweiten Hauptsatzes der Wármetheorie". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 1, 1866.
- Boltzmann, L.: "Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 1, 1871.
- Boltzmann, L.: "Weitere Studien über das w¨rmegleichewitch unter Gasmolekülen". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 1, 1872.
- Boltzmann, L.: "Bermerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmertheorie". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 2, 1877a.
- Boltzmann, L.: "Über die Beizehungen zwischen dern Huptsätze der mechanischen Wärmetheorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1877b). En Hasenhörl, F. (ed.): "*Ludwig Boltzmann, Wissenschaftliche abhandlungen*". Leipzig, 1909.
- Boltzmann, L.: "Über die mechanische Analogien des zweiten Hauptszases der Thermodynamik". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 3, 1887.

- Boltzmann, L.: "Über die mechanische Bedeutung des sweiten Hauptsatzes der Wármetheorie". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 1, 1866.
- Boltzmann, L.: "Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 1, 1871.
- Boltzmann, L.: "Weitere Studien über das w¨rmegleichewitch unter Gasmolekülen". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 1, 1872.
- Boltzmann, L.: "Bermerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmertheorie". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 2, 1877a.

---

34. Ver Cifarelli, D.M.; Regazzini, E. (1996), Landro, A.H.; González, M.L. (2009).

35. Ver Kolmogorov, A.N. (1931).

36. Ver Landro, A.H.; González, M.L. (2009).

- Boltzmann, L.: "Über die Beizehungen zwischen dern Huptsätze der mechanischen Wärmetheorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1877b). En Hasenhörl, F. (ed.): "*Ludwig Boltzmann, Wissenschaftliche abhandlungen*". Leipzig, 1909.
- Boltzmann, L.: "Über die mechanische Analogien des zweiten Hauptszases der Thermodynamik". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 3, 1887.
- Buffon, G.-L.: "Essai d'arithmetique morale". Supplément à la histoire naturelle, vol. 4, Imprimerie Royale, 1777.
- Cantelli, F.P.: "La tendenza ad un limite nel censo del calcolo delle probabilitá". Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, vol. 41, 1916a.
- Cantelli, F.P.: "Sulla legge dei grandi numeri". Atti Reale Academia Nazionale dei Lincei, Memorie C1.Sc.Fis., vol. 11, 1916b.
- Cantelli, F.P.: "Sulla probabilità como limite della frequenza". Atti Reale Academia Nazionale dei Lincei, Memorie C1.Sc.Fis., vol. 26, 1917a.
- Cantelli, F.P.: "Su due applicazioni d'un teorema di G. Boole alla statistica matematica". Atti Reale Academia Nazionale dei Lincei, Memorie C1.Sc.Fis., vol. 26, 1917b.
- Cantelli, F.P.: "Una teoria astratta del calcolo delle probabilità". Giornale dell'Istituto degli Attuari, vol. 3, 1932.
- Cantelli, F.P.: "Consideration sur la convergence dans le calcul des probabilités". Annales de l'Institut Henri Poincaré, vol. V, 1935.
- Cantelli, F.P.: "*Alcune memorie matematiche*". Giuffrè, 1958.
- Castelnuovo, G.: "*Calcolo delle probabilitá*". Albrighi-Segati, 1919.
- Cournot, A.A.: "*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*". Hachette, 1843. Reeditado en "*Cournot, A.A., Œvres complètes*". Vrin, 1973-1984.
- Czuber, E.: "*Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlersausgleichung, Statistik und Lebensverscherung*". Teubner, 1903.
- D'Alembert, J.B.L.R.: "Réflexions sur le calcul des probabilités". Opuscules Mathématiques, vol. 2, 1761. Reeditado en "*Oeuvres de D'Alembert*". Belin, 1821-1822.
- D'Alembert, J.B.L.R.: "Doutes et questions sur le calcul des probabilités". Mélanges de Littérature d'Histoire et de Philosophie, vol. 5, 1767.
- D'Alembert, J.B.L.R.: "*Opuscules mathématiques*", París, 1768.
- D'Alembert, J.B.L.R.: "*Reflexions sur le calcul des probabilités*", París, 1780.
- Daniell, P.J.: "A general form of integral". Annals of Mathematics, vol. 19, 1918.
- Daniell, P.J.: "Integrals in an infinite number of dimensions". Annals of Mathematics, vol. 20, 1919a.
- Daniell, P.J.: "Functions of limited variatio in an infinite number of dimensions". Annals of Mathematics, vol. 21, 1919b.
- Daniell, P.J.: "Further properties of the general integral". Annals of Mathematics, vol. 21, 1920.
- Daniell, P.J.: "Integral products and probability". American Journal of Mathematics, vol. 43, 1921.
- Daston, L.: "D'Alembert's critique of probability theory". Historia Mathematica, vol. 6, 1979.
- de Finetti, B.: "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives". Annales Institut H. Poincaré, 1937. Traducción al inglés en Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.)(1980).
- Doob, J.L.: "Kolmogorov's early work on convergence theory and foundations". Annals of Probability, vol. 17, 1989.
- Doob, J.L.: "The development of rigor in mathematical probability, 1900-1950". En Pier, J.P. (1994b). Reeditado en American Mathematical Monthly, vol. 103, 1996.
- Faber, G.: "Über stetige Funktionen". Mathematische Annalen, vol. 69, 1910.
- Fréchet, M.: "Définition de l'integrale sur un ensemble abstrait". Comptes Rendus Académie des Sciences, vol. 160, 1915a.
- Fréchet, M.: "Sur l'integrále d'une fonctionelle étendue à un ensemble abstrait". Bulletin Societé Mathematique de France, vol. 43, 1915b.
- Fréchet, M.: "Sur l'extension du théorème des probabilités totales au cas d'une suite infinie d'événements". Rendiconti Reale Istituto Lombardo di Sciences et Lettere, vol. 63, 1930a.
- Fréchet, M.: "Sur la convergence 'en probabilité'". Metron, vol. 8, 1930b.
- Fréchet, M.: "*Méthode des fonctions arbitraires, théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*". Gauthier-Villars, 1938a.
- Fréchet, M.: "Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités". Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 735. en Colloque consacré à la théorie des probabilités, Hermann, 1938b.
- Fréchet, M.: "*Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*". Gauthier-Villars, 1937-38. Esta obra constituye el primer volumen de Borel, E. (1939).
- Fréchet, M.; Halbwachs, M.: "*Le calcul des probabilités à la portée de tous*". Dunod, 1924.
- Hadamard, J.: "Les pincipes du calcul des probabilités". Revue de Métaphysique et de Morale, vol. 39, 1922.
- Hausdorff, F.: "*Grundzüge der Mengenlehre*". von Weit, 1914.
- Hawkins, T.: "*Lebesgue's theory of integration: Its origins and development*". University of Wisconsin Press, 1970.
- Hilbert, D.: "Mathematical problems". Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 8, 1902.
- Holgate, P.: "The influence of Huygens' work in dynamics on his contributions to probability". International Statistician, vol. 52, 1984.
- Knobloch, E.: "Emile Borel as a probabilist". En Krüger, L.; Daston, L.; Heidelberger, M. (eds.), 1987.

- Kolmogorov, A.N.: “The general theory of measure and the calculus of probability”. Collected works of the Mathematical Section, Communist Academy, Section for Natural and Exact Sciences, vol. 1, 1929 (original en ruso, traducción al inglés en Kolmogorov, A.N. (1992)).
- Kolmogorov, A.N.; “Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung”. Mathematische Annalen, vol. 104, 1931.
- Kolmogorov, A.N.: “*Grundbegriffe der Wahscheinlichkeitsrechnung*”. Springer, 1933a. Traducción al inglés: “*Foundations of the theory of probability*”, Chelsea, 1950.
- Laemmel, R.: “Untersuchungen über die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten”. Ph. thesis University of Zurich, 1904. Reeditado en Scneider, I. (ed.)(1988)
- Landro, A.H.; González, M.L.: “*Elementos de econometría de los fenómenos dinámicos*”. Ediciones Cooperativas, 2009.
- Lebesgue, H.: “Sur une généralization de l’intégrale définie”. Comptes Rendus Académie des Sciences, vol. 132, 1901.
- Lebesgue, H.: “*Leçons sur l’intégration et la recherche des fonctions primitives*”. Gauthier-Villars, 1904.
- Łomnicki, Z.: “Nouveaux fondements du calcul des probabilités (definition de la probabilité fondée sur la théorie des ensembles)”. Fundamenta Mathematica, vol. 4, 1923.
- Łomnicki, Z.; Ulam, S.: “Sur la théorie de la measure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités. I: Variables indépendantes”. Fundamenta Mathematica, vol. 23, 1934.
- Loveland, J.: “Buffon, the certainty of sunrise, and the probabilistic reductio ad absurdum”. Archive History of Exact Sciences, vol. 55, 2001.
- Markov, A.A.: “*Wahrscheinlichkeitsrechnung*”. Teubner, 1912.
- Nikodym, O.: “sur une généralization des intégrales de M.J. Radon”. Fundamenta Mathematica, vol. 15, 1930.
- Pier, J.P.: “Intégration et mesure 1900.1950" (1994a). En Pier, J.P. (ed.)(1994b).
- Pier, J.P. (ed.): “*Development of mathematics 1900-1950*”. Birkhäuser, 1994b.
- Popper, K.R.: “*The loogic of scientific discovery*” (1934). Sexta edición, Hutchinson, 1972.
- Popper, K.R.: “Probability magic or knowledge out of ignorance”. Dialectica, vol. 11, 1957a.
- Popper, K.R.: “The propensity interpretation of the calculus of probability and the quantum theory”. En Korner, S. (ed.)(1957b).
- Radon, J.: “Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen”. Akad. Wiss. Sitzugsber Kaiserl. Math-Nat.KL.122, 1913.
- Slutsky, E.: “On the question of the logical foundation of the theory of probability” (original en ruso). Bulletin of Statistics, vol. 12, 1922.
- Slutsky, E.: “Über stocastische Asymptoten und Grenzwerte”. Metron, vol. 5, 1925.
- Steinhaus, H.: “Les probabilités dénombrables et leur rapport à la theorie de la measure”. Fundamenta Mathematica, vol. 4, 1923.
- Steinhaus, H.: “Über die Wahrscheinlichkeit dafür daβ der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist”. Athematische Zeitschrift, vol. 31, 1930a.
- Steinhaus, H.: “Sur la probabilité de la convergence de séries”. Studia Mathematica, vol. 2, 1930b.
- Ulam, S.: “Zum Massbegriffe in Produkträumen”. Verhandlung des Internationalen Mathematiker-Kongress, Zurich, vol. 2, 1932.
- von Kries, J.: “*Die Principen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fine logische Untersuchung*”. Mohr, 1886.
- Wiener, N.: “The mean of a funcitonal of arbitrary elements”. Annals of Mathematics, vol. 22, 1920.
- Wiener, N.: “The average of an analytical functional”. Proceedings National Academy of Sciences USA, vol. 7, 1921a.
- Wiener, N.: “The average of an analytical functional and the Brownian movement!”. Proceedings National Academy of Sciences, vol. 7, 1921b.
- Wiener, N.: “Differential-space”. Journal of Mathematics and Physics, MIT, vol. 2, 1923.
- Wiener, N.: “The average value of a functional”. Proceedings London Mathematical Society, vol. 22, 1924.

Pontificia Universidad Católica Argentina
"Santa María de los Buenos Aires"

Facultad de Ciencias Económicas

Escuela de Economía "Francisco Valsecchi"

Documentos de Trabajo

Nº 1: Millán Smitmans, Patricio, *"Panorama del Sector de Transportes en América Latina y Caribe",* Noviembre de 2005.

Nº 2: Dagnino Pastore, José María; Servente, Ángeles y Casares Bledel, Soledad*,"La Tendencia y las Fluctuaciones de la Economía Argentina"*, Diciembre de 2005.

Nº 3: González Fraga, Javier A., *"La Visión del Hombre y del Mundo en John M. Keynes y en Raúl Prebisch"*, Marzo de 2006.

Nº 4: Saporiti de Baldrich, Patricia A., *"Turismo y Desarrollo Económico"*, Abril de 2006

Nº 5: Kyska, Helga, y Marengo, Fernando, *"Efectos de la Devaluación sobre los Patrimonios Sectoriales de la Economía Argentina"*, Mayo de 2006

Nº 6: Ciocchini, Francisco, *"Search Theory and Unemployment"*, Junio de 2006

Nº 7: Ciocchini, Francisco, *"Dynamic Panel Data. A Brief Survey of Estimation Methods"*, Junio de 2006.

Nº 8: Molteni, Gabriel, *"Desempleo y Políticas del Mercado Laboral. Análisis internacional de políticas públicas: Algunos casos exitosos"*, Julio de 2006.

Nº 9: Gentico, Fernando, *"Duración de los Sistemas de Tipo de Cambio: Bretton Woods, un punto de inflexión"*, Agosto de 2006.

Nº 10: O'Connor, Ernesto, *"Algunas Consideraciones acerca de la Eficiencia del IVA en la Argentina"*, Septiembre de 2006.

Nº 11: Millán Smitmans, Patricio, *"Modernización del Estado e Indicadores de Desempeño del Sector Público"*, Octubre de 2006.

Nº 12: Resico, Marcelo, *"Las Reformas Económicas y la Modernización del Estado"*, Noviembre de 2006.

Nº 13: Díaz, Cecilia, *"Universidades Indianas del Período Colonial"*, Noviembre de 2006.

Nº 14: Dagnino Pastore, José M., *"Los Efectos Económicos de la Promoción Regional"*, Marzo de 2007.

Nº 15: Valsecchi, Francisco, *"La Reconstrucción de la Ciencia Económica sobre el Fundamento Ético-Cristiano"; "El Sentido de la Escuela de Economía de la Universidad Católica Argentina". Prólogo de Patricio Millán*, Junio de 2007.

Nº 16: Ciocchini, Francisco y Molteni, Gabriel, *"Medidas alternativas de la pobreza en el Gran Buenos Aires 1995-2006"*, Julio de 2007.

Nº 17: Sabater, Javier, *" El financiamiento de la Educación Superior. Propuestas para Argentina"*, Julio de 2007.

Nº 18: Rodríguez Penelas, Horacio, *"Aportes del Cardenal Wyszynski en la gestación de Laborem Exercens. El tema de la espiritualidad del trabajo",* Agosto de 2007.

Nº 19: Giordano, Osvaldo, *"La Reforma de los seguros sociales en la Argentina",* Septiembre de 2007.

Nº 20: Saporosi, Claudia, *"Paralelo entre la crisis de 1890 y la de 2001 en Argentina"*, Octubre de 2007.

Nº 21: Millán Smitmans, Patricio, *"La necesidad de nuevas Políticas Públicas para disminuir las desigualdades regionales de la Argentina",* Diciembre de 2007.

Nº 22: Rubio, Alberto, "*La trama del presente",* Febrero de 2008.

Nº 23: García Bossio, Horacio, "*Génesis del Estado desarrollista latinoamericano: el pensamiento y la praxis política de Helio Jaguaribe (Brasil) y de Rogelio Frigerio (Argentina)*", Abril de 2008.

Nº 24: Carballo, Carlos Alberto, "*La política monetaria en los tiempos de la Caja de Conversión*", Mayo de 2008.

Nº 25: Llosas, Hernán, *"Reformas en el sistema presupuestario de los Estados Unidos de Norteamérica",* Junio de 2008.

Nº 26: Dagnino Pastore, José María, *"La riqueza en (y de) Argentina",* Agosto de 2008.

Nº 27: Coria, María Marta, *"Eficiencia técnica de las universidades de gestión estatal en Argentina",* Noviembre de 2008.

Nº 28: Ciocchini Francisco J., Gabriel R. Molteni y M. Elena Brenlla, *"Análisis de la Autopercepción de Felicidad en la Argentina, 2005-2007"*, Febrero de 2009.

Nº 29: Martiarena, Ana, *"La Empresa y sus alianzas intersectoriales en pos de la inclusión sociolaboral"*, Marzo de 2009.

Nº 30: Villanueva, Javier, *"El Desarrollo Económico en Juan Bautista Alberdi"*, Mayo de 2009.

Nº 31: Oberst, Tomás, *"El Pensamiento del Dr.Carlos Moyano Llerena. Hacia un Desarrollo basado en Valores",* Julio de 2009.

Nº 32: García-Cicco, Javier y Roque Montero, *"Modeling Copper Price: A Regime-Switching Approach"*, Febrero de 2011.