

NOTAS DE INVESTIGACIÓN

Esta sección tiene por objetivo divulgar artículos breves escritos por economistas del Banco Central de Chile sobre temas relevantes para la conducción de las políticas económicas en general y monetarias en particular. Las notas de investigación, de manera frecuente, aunque no exclusiva, responden a solicitudes de las autoridades del Banco.

MODELO Y PRONÓSTICO DEL PRECIO DEL COBRE: UN ENFOQUE DE CAMBIO DE REGÍMENES*

Javier García – Cicco**
Roque Montero***

I. INTRODUCCIÓN

Los precios de las materias primas generalmente sufren cambios grandes y persistentes, con períodos de relativa estabilidad y tiempos de alta volatilidad. El precio del cobre no es una excepción a esta caracterización general, tal como puede apreciarse en el gráfico 1, donde se muestra el logaritmo del precio contado del cobre en frecuencia mensual. Dada esta caracterización, el objetivo de este trabajo es estudiar si la evolución del precio del cobre puede ser apropiadamente capturada por un modelo univariado de cambio de regímenes de Markov (es decir, un modelo en que los parámetros pueden cambiar en el tiempo y donde ese cambio está determinado por un proceso de Markov no observado), comparando estos modelos con otras alternativas de parámetros constantes. La idea básica es comprender en qué dimensiones estos modelos pueden mejorar el análisis que proveen los modelos más estándares, y en qué aspectos todavía hay espacio para mejoras.

El análisis está dividido en dos partes. Por un lado, analizamos las virtudes de un modelo autorregresivo de Markov (MSAR) dentro de la muestra, usando varias especificaciones alternativas para este modelo y comparándolas también con modelos univariados como los ARMA y GARCH. En particular, comparamos las diferentes alternativas en cuanto a criterios de información, describiendo también los parámetros

Gráfico 1

Precio del cobre^a



Fuente: Estadísticas Financieras Internacionales, FMI.

a. La serie es el logaritmo del precio mensual de contado del cobre (en dólares, en La Bolsa de Metales de Londres, desde enero de 1975 hasta enero de 2010).

* Agradecemos a Pablo Pincheira, Alberto Naudón y a un árbitro anónimo y a los editores por sus comentarios y sugerencias. El análisis y las conclusiones presentadas en el artículo son exclusivas de los autores y no reflejan la opinión del Banco Central de Chile o de sus consejeros.

** Gerencia de Análisis Macroeconómico, Banco Central de Chile, y Universidad Católica Argentina. E-mail: jgarcia-cicco@bcentral.cl

*** Rutgers University. E-mail: rmontero@econ.rutgers.edu



estimados para las distintas especificaciones y caracterizando la serie temporal inferida para el proceso no observado de Markov. Por otro lado, evaluamos la capacidad predictiva de estas alternativas, en términos tanto de pronóstico puntual como de la densidad del pronóstico. Una característica distintiva de nuestro análisis es el uso de métodos de *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) tanto para caracterizar la distribución de los parámetros en cada modelo como para evaluar la densidad del pronóstico.

El resultado más robusto que obtenemos es que, para modelar el precio del cobre, considerar una varianza de los errores que cambie en el tiempo es extremadamente relevante. Todas las especificaciones MSAR evaluadas que permiten una varianza cambiante en el tiempo superan, en términos de bondad de ajuste, a otras especificaciones MSAR que no incluyen esta característica. Más aun, los modelos MSAR son también superiores, dentro de la muestra, a las alternativas ARMA y GARCH. Fuera de la muestra, los modelos MSAR parecen mejorar, en términos de error cuadrático medio, el desempeño de los modelos ARMA y de algunas de las especificaciones GARCH, aunque producen pronósticos similares a modelos de paseo aleatorio (RW). En términos de cobertura de la densidad de predicción, las bandas de confianza de los modelos MSAR son algo mejores que las obtenidas con modelos de parámetros constantes, aunque esta diferencia no es estadísticamente significativa. Finalmente, el ejercicio de descomposición de la varianza del pronóstico revela la importancia de considerar la incertidumbre acerca del estado de Markov no observado para caracterizar la varianza asociada a los pronósticos.

El rol preponderante encontrado para una varianza que cambia en el tiempo es una interpretación diferente a un argumento frecuentemente mencionado por analistas y en discusiones de política: que la media del precio del cobre cambió alrededor del año 2004. Este argumento indica que el rol creciente de China (y otras economías emergentes) como uno de los principales actores del mercado mundial ha producido un cambio permanente en la demanda de materias primas metálicas en general (por ejemplo, Banco Mundial, 2009; *The Economist*, 2011); traduciéndose, en particular, en un cambio permanente en el precio promedio observado para el cobre. Si bien nuestros resultados indican un cambio de régimen en torno a 2004, nuestros modelos infieren que el cambio ocurrió en la varianza del precio y no en su media. De hecho, realizamos un número de ejercicios de robustez para confrontar nuestros resultados con la posibilidad de un cambio de régimen en la media incondicional, encontrando solo evidencia débil a favor de esta hipótesis. De todos modos, es importante aclarar que esta conclusión está basada solo en modelos univariados de cambio de régimen de Markov, lo cual no garantiza que los cambios de régimen en la media incondicional no puedan ser identificados utilizando otro tipo de modelos más estructurales.

Este trabajo está relacionado con varios estudios recientes que también enfatizan el uso del modelo de cambio de régimen de Markov para modelar el precio del cobre y de otros metales. Heaney (2006) usa un modelo MSAR para caracterizar el ratio entre el precio futuro y el contado del cobre, presentando alternativas univariadas y modelos estructurales, analizando solo la performance de estos modelos dentro de la muestra. Hong-Chan y Young (2009) utilizan un modelo de saltos GARCH con una varianza que cambia según un proceso de Markov para explicar el retorno diario del cobre, tanto dentro como fuera de muestra, pero focalizándose solo en pronósticos puntuales y no en su densidad. Choi y Hammoudeh (2010) especifican un modelo que solo permite que la varianza cambie de acuerdo con un proceso de Markov, evaluando esta alternativa únicamente dentro de la muestra. También Li y Zhang (2009) utilizan un modelo de corrección de errores con procesos de Markov para caracterizar la relación de largo plazo entre el precio del cobre futuro en la Bolsa de Metales de Londres con el observado en la Bolsa de Futuros de Shanghai, aunque el objetivo es simplemente estudiar la relación entre estas dos variables, sin comparar con modelos alternativos.

A diferencia de estos estudios, nuestro trabajo provee un ejercicio de comparación de modelos más detallado y, tal como enfatizamos anteriormente, utiliza un método basado en simulación (MCMC) tanto para la estimación como para la evaluación de la densidad de pronósticos. Nuestro artículo está también relacionado con dos ramas recientes de la macroeconomía: una que enfatiza el rol de varianzas que cambian en el tiempo para explicar el comportamiento de diversas variables macroeconómicas (véase, por ejemplo, el resumen de la literatura en Fernández-Villaverde y Rubio-Ramírez, 2010) y otra que analiza las virtudes de modelos de cambios de regímenes de Markov (por ejemplo, Sims y Zha, 2006).

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera. La sección II discute algunos aspectos básicos de los modelos de Markov y describe la implementación empírica de estos. La sección III presenta los resultados del análisis dentro de la muestra, tanto en términos de especificación de los modelos MSAR como de la comparación con otros modelos de parámetros constantes. En la sección IV se presentan los ejercicios de capacidad predictiva. La sección V concluye.

II. METODOLOGÍA

En primer lugar, discutimos brevemente los modelos MSAR que consideramos. Para simplificar la exposición, presentamos solamente el caso de un modelo autorregresivo de orden uno con solo dos estados posibles.¹ Dada una variable de interés, este modelo puede formularse como

$$y_t = c_{s_t} + \phi_{s_t} y_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t,$$

donde ε_t es una variable *i.i.d.* con distribución normal estándar. La variable discreta $S^t = \{1, 2\}$ denota el estado no observado de la economía, que está determinado por un proceso de Markov. El elemento característico de la matriz de transición de este proceso está dado por

$$p_{ij} \equiv \Pr(S_t = j | S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = \Pr(S_t = j | S_{t-1}),$$

con $\sum_i p_{ij} = 1$. Esta especificación supone i) que la probabilidad de transición es independiente de los valores que pueda tomar la variable observada, y ii) que el valor que el estado no observado tomó en el período inmediatamente anterior es un estadístico suficiente para caracterizar la probabilidad de transición. Finalmente, la notación para los parámetros $(c_{s_t}, \phi_{s_t}, \sigma_{s_t})$ denota, respectivamente, la constante, el coeficiente del rezago y el desvío estándar del *shock* en cada estado posible S_t .

Además de los parámetros, otro estadístico de interés es la probabilidad de estar en un estado determinado en el momento t , implícita en las observaciones disponibles hasta esa fecha y en los valores de los parámetros. Es decir, queremos caracterizar la probabilidad

$$\xi_{j|t} \equiv \Pr(S_t = j | \Omega_t; \theta),$$

donde Ω_t denota el set de observaciones hasta el momento t , y θ contiene los parámetros del modelo $(c_{s_t}, \phi_{s_t}, \sigma_{s_t}, p_{ij})$. Dado que los estados no son observados, se pueden utilizar técnicas de filtrado para inferir estas probabilidades.

¹ Una discusión más detallada puede encontrarse en el apéndice técnico, disponible a quien lo solicite a los autores. Para un tratamiento más detallado, véase, por ejemplo, Hamilton (1994).



Los parámetros a ser estimados son $(c_{st}, \phi_{st}, \sigma_{st})$ y las probabilidades de transición p_{ij} (por ejemplo, en este modelo simple se deben estimar ocho parámetros). Mientras la función de verosimilitud puede evaluarse numéricamente de manera relativamente sencilla, esta será una función altamente no lineal de los parámetros; limitando la habilidad de métodos basados en gradientes para encontrar el máximo global de esta función. Por tal razón, elegimos implementar un enfoque de MCMC, utilizando el algoritmo de Metropolis-Hastings para caracterizar la función de verosimilitud. De este modo, podemos dar tanto una interpretación frecuentista a nuestros parámetros estimados, de acuerdo a los estimadores de Laplace propuestos por Chernozhukov y Hong (2003), como una interpretación bayesiana con distribuciones a priori planas.

El enfoque de MCMC es también útil para realizar inferencias acerca de los parámetros. Si bien existen tests disponibles para estos modelos (por ejemplo, García, 1998), dada la no linealidad y no normalidad de estos modelos es probable que la aproximación asintótica sea inapropiada en muestras pequeñas. En cambio, el procedimiento de MCMC nos permite computar intervalos de confianza que son más apropiados para muestras pequeñas, aunque también son asintóticamente válidos. Además, los tests de comparación de modelos disponibles también se basan en distribuciones asintóticas (véase, por ejemplo, el resumen de Hamilton, 2008), y por la misma razón no los consideramos apropiados para muestras pequeñas. En su lugar utilizaremos tres criterios de información para la comparación y selección de modelos: Bayesiano (BIC), Akaike (AIC) y Hannan-Quinn (HQC).²

III. ANÁLISIS DENTRO DE LA MUESTRA

Dividimos el análisis dentro de la muestra en dos partes. Empezamos seleccionando y caracterizando la especificación preferida dentro de los modelos MSAR, comparándolos también con modelos ARMA y GARCH. Luego exploramos la robustez de los resultados, investigando en particular la hipótesis sobre el cambio en la media del precio del cobre.

1. Especificación del Modelo MSAR

La serie utilizada corresponde al logaritmo natural del precio contado mensual del cobre (en dólares) en el mercado de Londres (la fuente es FMI-EFI), desde enero de 1975 a enero de 2010. Nuestra especificación base es un modelo autorregresivo de orden dos, AR(2). Esta elección obedeció tanto a criterios de información como a la metodología de Box-Jenkins, comparando modelos ARMA con hasta 12 rezagos tanto para los componentes AR como para los MA. También realizamos una batería de tests de raíz unitaria, usando criterios de información para la selección de rezagos que son robustos al problema de raíz cercana a uno (*local to unity*). Aunque estos tests no permiten rechazar la hipótesis de raíz unitaria, es importante hacer dos comentarios al respecto. En primer lugar, si el modelo apropiado tiene parámetros que cambian en el tiempo (tal como sugiere nuestro análisis posterior) el test típico de raíz unitaria (ADF) estará sesgado. En segundo lugar, dado nuestro foco en criterios

² Smith et al. (2006) también explora el uso de criterios de información para modelos de regímenes de Markov. Desde una perspectiva bayesiana, usar criterios de información como un test de selección de modelos puede justificarse en base a los resultados de, por ejemplo, Hong y Preston (2012), quienes muestran que la comparación de modelos basados en el criterio BIC es asintóticamente equivalente a realizar tests basados en ratios de probabilidades a posteriori.

de información para la comparación de modelos, es importante destacar que ninguna de las especificaciones de raíz unitaria que probamos puede mejorar lo obtenido por el modelo AR(2) en base a los tres criterios que computamos. Aun así, por razones de completitud incluimos los resultados para la especificación de paseo aleatorio con intercepto (RW-D) en los cuadros, y también lo consideramos en los ejercicios de pronósticos en la sección IV.

En términos del modelo MSAR, basamos nuestro análisis en un modelo con dos rezagos. Esto asegura una comparación más clara con los modelos de parámetros constantes. Adicionalmente, aunque no lo reportamos, también hemos estimado variantes del modelo MSAR con hasta cuatro rezagos, pero los criterios de información sugieren también que para el caso MSAR dos rezagos es la elección apropiada. Empezaremos evaluando siete casos, cada uno de ellos difiriendo en cuáles son los coeficientes que pueden cambiar de acuerdo a un proceso de Markov de dos estados:

Caso 1: todos los parámetros cambian.

Caso 2: solo la constante cambia.

Caso 3: solo los coeficientes de los rezagos cambian.

Caso 4: solo la varianza de los errores cambia.

Caso 5: solo la constante y los coeficientes de los rezagos cambian.

Caso 6: solo la constante y los la varianza de los errores cambian.

Caso 7: solo los coeficientes de los rezagos y la varianza de los errores cambian.

El cuadro 1 muestra los valores de los tres criterios de información obtenidos para cada uno de estos siete casos, además de otros que describimos más adelante. Entre estos siete, todos los criterios señalan como la preferida la especificación donde cambia solo la varianza de los errores (caso 4). Sin embargo, la diferencia con otras alternativas donde la varianza también cambia (casos 1, 6 y 7) es mucho menor que con los casos en donde la varianza

Cuadro 1

Criterios de información^a

Caso	Parámetros que cambian	N° de estados	AIC	HQC	BIC
1	c, ϕ, σ	2	-2.93	-2.89	-2.83
2	c	2	-2.76	-2.74	-2.69
3	ϕ	2	-2.84	-2.81	-2.76
4	σ	2	-2.94	-2.91	-2.87
5	c, ϕ	2	-2.86	-2.82	-2.77
6	c, σ	2	-2.93	-2.90	-2.85
7	ϕ, σ	2	-2.93	-2.89	-2.84
8	c, ϕ, σ	4	-2.94	-2.89	-2.82
9	c, σ	4	-2.94	-2.90	-2.84
	AR(2)		-2.76	-2.75	-2.73
	AR(2)-GARCH(1,1)		-2.84	-2.81	-2.78
	RW-D		-2.62	-2.63	-2.61

Fuente: Elaboración propia.

a. Véase el texto para una descripción de los casos.



se mantiene constante. Esta es la primera evidencia que enfatiza el rol de una varianza cambiante para modelar el precio del cobre.³

En todos los siete casos considerados, cuando más de un parámetro cambia se asume que todos cambian de acuerdo con el mismo proceso de Markov. Alternativamente podemos considerar que distintos parámetros cambien de acuerdo con diferentes procesos de Markov independientes entre sí. Dado el énfasis en la varianza, estimamos dos casos adicionales (todos con procesos de Markov de dos estados). En el caso 8 la varianza cambia de acuerdo con un proceso de Markov, mientras que la constante y los coeficientes de los rezagos lo hacen obedeciendo a otro proceso. El caso 9 es similar al anterior, con la diferencia de que los coeficientes de los rezagos se suponen constantes.⁴ Los criterios de información para estos dos casos adicionales también se reportan en el cuadro 1. La diferencia entre estos dos y los casos 4 y 6 es mucho menor (y en términos del AIC estos dos son de hecho marginalmente mejores).

Un ejercicio final en términos de criterios de información es comparar las especificaciones MSAR con otros modelos que no consideren cambios de régimen. Una primera comparación natural es contra el modelo AR(2). Adicionalmente, dada la importancia de la varianza que cambia en el tiempo, también consideramos un modelo GARCH. En particular, elegimos el modelo AR(2)-GARCH(1, 1) en base a los criterios de información. Finalmente, también incluimos el caso RW-D por completitud. Los criterios de información para estas alternativas se reportan también en el cuadro 1. Como podemos apreciar, mientras el modelo GARCH es mejor que las alternativas AR y RW-D, estos modelos son claramente superados por las alternativas MSAR que incluyen una varianza cambiante. Interpretamos estos resultados como evidencia a favor de los modelos MSAR.

A continuación analizamos los parámetros estimados. Los cuadros 2A y 2B reportan los coeficientes estimados para los casos 1, 4, 6, 8 y 9, además de los del modelo AR(2) para facilitar la comparación. Elegimos estos casos basados en los resultados obtenidos usando los criterios de información. Empezando con el caso 1 observamos que el segundo estado es identificado como aquel con la mayor varianza de los residuos. Adicionalmente, mientras todos los coeficientes tienen errores estándares bajos y los estimadores puntuales parecen diferir entre regímenes, los intervalos de confianza de 95% para la diferencia de coeficientes entre estados incluye el cero para todos los parámetros excepto para la varianza de los residuos. En otras palabras, solo la varianza parece ser distinta entre regímenes. En términos de las probabilidades de transición, ambos regímenes son bastante persistentes, en particular el asociado con la varianza baja (régimen 1): el estimador puntual para p_{11} es 0.953 y para $p_{22} = 1 - p_{21}$ es 0.780. Sin embargo, es importante remarcar que el intervalo de confianza para p_{11} es bastante estrecho, mientras que p_{21} es estimado de manera mucho menos precisa.⁵

³ Hemos también considerado, aunque no lo reportamos, estos mismos siete casos en una especificación donde los parámetros cambian de acuerdo con un proceso de Markov de tres estados. De estos ejercicios obtuvimos dos conclusiones principales. Primero, entre estas alternativas con tres estados, el ranking relativo de los siete casos en términos de criterios de información es el mismo que en el caso de dos estados. Segundo, la mejor especificación con tres estados (también el caso 4) no es mejor, en términos de criterios de información, que los modelos con dos estados que permiten cambios en la varianza (casos 1, 4, 6 y 7). Dados estos resultados, elegimos descartar la alternativa con tres estados.

⁴ Estos dos casos pueden considerarse en un esquema genérico como un caso de cuatro estados. Para ver esto, sea $S_{1t} = \{1, 2\}$ el proceso de Markov de dos estados que determina la varianza mientras $S_{2t} = \{1, 2\}$ es el que determina los otros coeficientes. Luego, podemos considerar el proceso $S_t = \{S_{1t}, S_{2t}\}$ que puede tomar cuatro valores: $[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2]$.

⁵ Este resultado es un patrón común observado en las aplicaciones de cambios de régimen de Markov, y se debe al hecho de que, dado que la muestra es pequeña, generalmente se observan menos periodos donde los estados cambian que periodos en donde el estado se mantiene. Luego, una posible limitación de los modelos MS es su bajo poder de inferencia para la probabilidad de moverse de un estado al otro. Esto enfatiza aun más el uso de métodos que permitan caracterizar la distribución de muestra pequeña de estos estadísticos (como el MCMC en nuestro caso), en lugar de hacer inferencia basada en resultados asintóticos.

Cuadro 2

Parámetros estimados^{a,b}

A. Casos 1 y 4

	AR	Caso 1			Caso 4		
		$S_t = 1$	$S_t = 2$	I.C. 95%	$S_t = 1$	$S_t = 2$	I.C. 95%
c	0.037 (0.03)	0.008 (0.03)	0.155 (0.13)	[-0.37;0.05]	0.021 (0.03)		
ϕ_1	1.370 (0.00)	1.321 (0.06)	1.397 (0.13)	[-0.32;0.16]	1.345 (0.05)		
ϕ_2	-0.378 (0.01)	-0.323 (0.06)	-0.431 (0.13)	[-0.13;0.35]	-0.349 (0.05)		
σ^2	0.004 (0.00)	0.002 (0.00)	0.013 (0.00)	[-0.02;-0.01]	0.002 (0.00)	0.012 (0.00)	[-0.02;-0.01]
p_{11}			0.953	[0.91;0.98]	0.955		[0.91;0.98]
p_{21}			0.220	[0.08;0.45]	0.182		[0.07;0.36]

Fuente: Elaboración propia.

a. Error estándar entre paréntesis. Para los parámetros c , ϕ y σ^2 la columna I.C. 95% reporta el intervalo de confianza de 95% de la diferencia entre coeficientes entre estados. Para las probabilidades, la columna I.C. 95% reporta los intervalos de confianza de la probabilidad estimada. El resto de las entradas son la media de la distribución- Todos estos estadísticos se obtuvieron mediante el procedimiento de MCMC explicado en el apéndice, utilizando 150 mil muestras de la distribución.

B. Casos 6, 8 y 9

	Caso 6			Caso 8			Caso 9		
	$S_t = 1$	$S_t = 2$	I.C. 95%	$S_t = 1$	$S_t = 2$	I.C. 95%	$S_t = 1$	$S_t = 2$	I.C. 95%
c	0.026 (0.03)	0.033 (0.04)	[-0.03;0.02]	0.001 (0.01)	1.345 (0.02)	[-1.38;-1.32]	0.025 (0.04)	0.020 (0.04)	[-0.05;0.07]
ϕ_1	1.343 (0.05)			-0.342 (0.02)	0.195 (0.04)	[-1.59;-1.44]	1.337 (0.05)		
ϕ_2	-0.349 (0.05)			1.203 (0.03)	-0.262 (0.04)	[0.34;0.55]	-0.342 (0.05)		
σ^2	0.002 (0.00)	0.012 (0.00)	[-0.02;-0.01] [0.91;0.98]	0.001 (0.00)	0.010 (0.00)	[-0.01;0.00]	0.002 (0.00)	0.011 (0.00)	[-0.02;-0.01]
p_{11}		0.955	[0.07;0.37]	0.946		[0.9;0.98]	0.955		[0.91;0.98]
p_{21}		0.189		0.233		[0.08;0.48]	0.183		[0.07;0.37]
p_{11}^2				0.813		[0.71;0.9]	0.589		[0.07;0.99]
p_{21}^2				0.621		[0.43;0.8]	0.454		[0.02;0.93]

Fuente: Elaboración propia.

b. p_{11}^2 y p_{21}^2 son las probabilidades asociadas con el proceso de Markov que gobierna los parámetros que no son la varianza.

Los resultados para los casos 4 y 6 muestran patrones similares. Los coeficientes estimados para la varianza de los residuos son indistinguibles de los obtenidos en el caso 1, y los intervalos de confianza indican que la varianza es diferente entre estados. También, en el caso 6 parecería que la constante no es estadísticamente significativa entre regímenes. En términos de las probabilidades de transición, los valores estimados en estos dos casos son bastante similares a los del caso 1, aunque el intervalo de confianza de p_{21} se achica en este, reflejando el mayor poder de inferencia obtenido al fijar algunos parámetros.

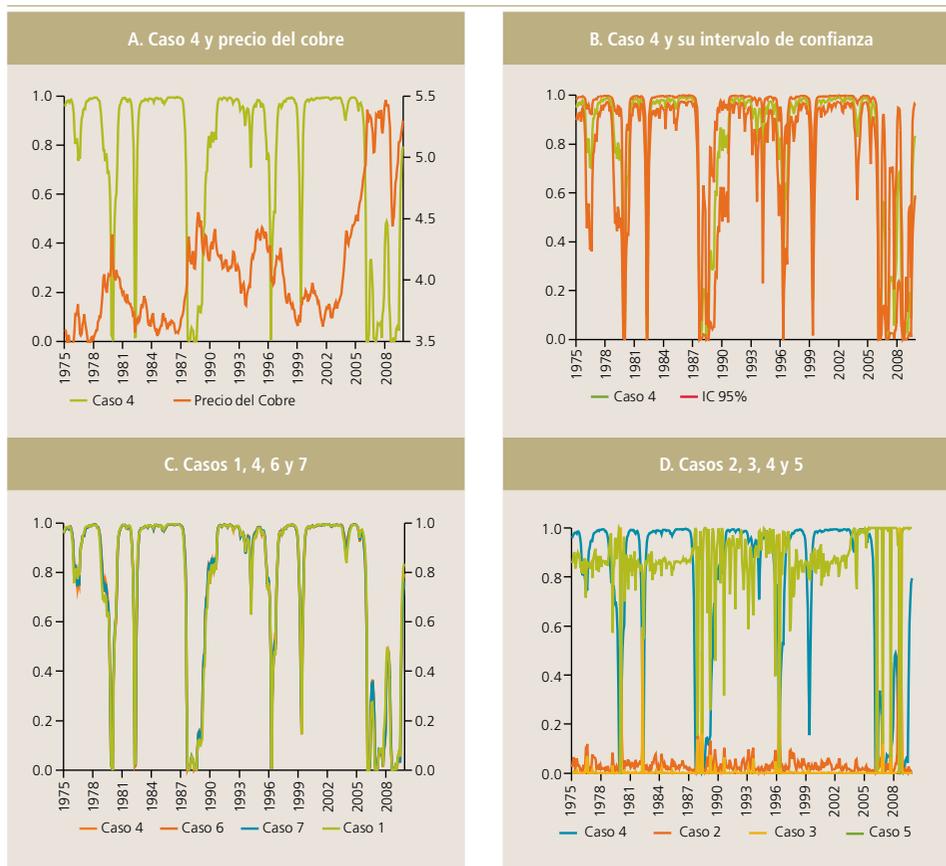
En términos de los modelos que están determinados por dos procesos de Markov independientes (casos 8 y 9), las varianzas estimadas son similares a los de los casos anteriores. Para los otros

parámetros, en el caso 9 la constante no parece ser diferente entre estados, mientras que en el caso 8 tanto la constante como el coeficiente del primer rezago parecen ser diferentes entre regímenes, aunque no el coeficiente del segundo rezago. La probabilidad de transición del proceso que gobierna los parámetros que no son la varianza es estimada con menor precisión, particularmente en el caso 9 donde el intervalo cubre casi todos los valores posibles.

Como mencionamos anteriormente, una de las características interesantes de los modelos de cambio de régimen de Markov es que permite hacer inferencia sobre la probabilidad de los estados no observados ($\xi_{j|t}$). Los distintos paneles del gráfico 2 muestran la probabilidad suavizada (filtro de dos lados) de estar en el estado de baja varianza de los residuos. El gráfico de arriba a la izquierda muestra esta probabilidad para el caso 4, junto con el precio del cobre. En la mayor parte de la muestra el precio del cobre parece haber permanecido en el estado de varianza baja, con algunas excepciones: por tres meses a principios de 1980, por dos meses a mediados de 1982, por casi un año empezando en noviembre de 1987, por un mes en junio de 1996, y luego de 2006 (aunque con algunas interrupciones). Más adelante analizaremos este último período en más detalle.

Gráfico 2

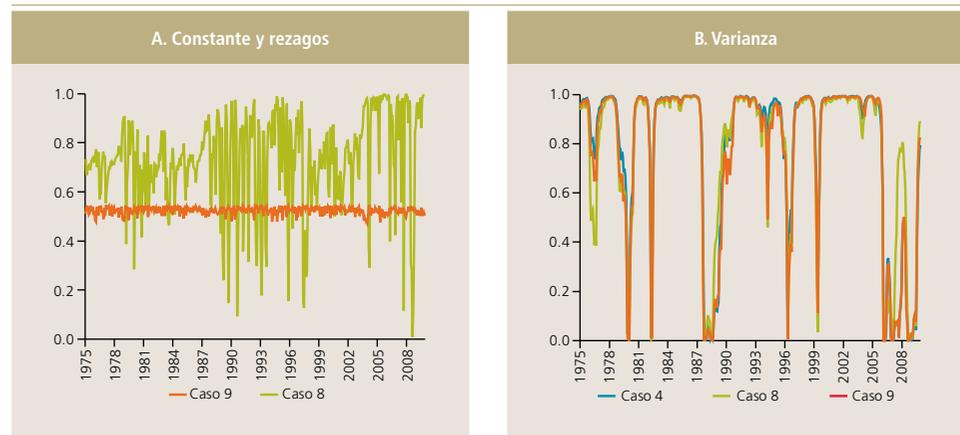
Probabilidades suavizadas del estado de menor varianza



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 3

Probabilidades suavizadas



Fuente: Elaboración propia.

Adicionalmente, el gráfico arriba y a la derecha muestra la misma probabilidad suavizada, pero incluyendo también su intervalo de confianza de 95%. Como podemos ver, esta probabilidad es estimada con bastante precisión, con algunas excepciones al final de la muestra.⁶

Dada la similitud en términos de bondad de ajuste entre los casos 1, 4, 6 y 7, es interesante indagar si la inferencia sobre la probabilidad de los estados no observados es similar entre estos modelos. Esta comparación es reportada en el panel inferior izquierdo del gráfico 2, donde podemos observar que las probabilidades suavizadas son virtualmente idénticas. Por el contrario, si computamos esta probabilidad para los otros casos que no incluyen una varianza cambiante (casos 2, 3 y 5) podemos ver (en el panel inferior derecho del gráfico) que la inferencia es marcadamente diferente y mucho más errática.

Un patrón similar puede verse si analizamos los casos 8 y 9, presentados en el gráfico 3. Mientras la inferencia sobre el estado de baja varianza es comparable con el obtenido en el caso 4, la probabilidad suavizada para el otro proceso de Markov (el de la constante y los rezagos) no puede identificar claramente la presencia de estados diferentes. Más aun, si incluyéramos las bandas de confianza de estas probabilidades mostrarían un alto nivel de incertidumbre asociada con las probabilidades en el panel de la izquierda, mientras que en el de la derecha los valores estimados serían mucho más precisos.

La conclusión de esta parte del análisis es que, a la hora de explicar el comportamiento dentro de la muestra del precio del cobre, considerar un varianza de los residuos que cambie es sumamente importante. Además, no es evidente que permitir que los otros parámetros cambien pueda mejorar significativamente el desempeño del modelo una vez que se considera una varianza que cambia entre regímenes.

⁶ El hecho de que la inferencia sea menos precisa al final de la muestra es en parte esperado, ya que estamos condicionando en un set de información menor en la parte final de la muestra, dado que esto es un filtro de dos lados.

2. Robustez

Los ejercicios de robustez que presentamos están guiados por la siguiente observación: a primera vista, el precio del cobre que se presenta en el gráfico 1 parece sugerir que existe un cambio en la media incondicional de la serie, empezando en algún momento en torno a 2004. Como mencionamos en la introducción, este es un argumento utilizado con cierta frecuencia, que suele atribuirse a la aparición de China y otras economías emergentes como un gran demandante de cobre. Los resultados hasta aquí, por el contrario, han enfatizado el rol de la varianza pero no el de la constante o los coeficientes de los rezagos. Luego, uno puede preguntarse si el modelo está confundiendo de alguna manera cambios en la varianza por cambios en la media incondicional.

El punto de partida es testear si la media incondicional es significativamente distinta entre regímenes en los modelos que hemos estimado.⁷ Las especificaciones de interés son los casos 6, 8 y 9, es decir, aquellos casos que permiten un cambio de régimen en la constante y/o en los rezagos, que es independiente del comportamiento de la varianza. Los intervalos de confianza de 95% para la diferencia en la media incondicional entre regímenes se muestran en el cuadro 3. Puede apreciarse que para los casos 6 y 9 no hay diferencia significativa entre regímenes, aunque para el caso 8 la diferencia parece ser significativa. Sin embargo, es importante recordar que en el caso 8 el régimen de Markov no observado que gobierna la evolución de la constante y los rezagos era estimado de manera muy imprecisa (tanto en términos de las probabilidades de transición como con las probabilidades suavizadas). De esta manera, si bien el test indicaría una diferencia en la media incondicional, consideramos que la evidencia es relativamente débil una vez que tenemos en cuenta todo el análisis realizado.

Un segundo ejercicio consiste en reestimar los modelos en dos submuestras: una que termina en diciembre de 2004 (donde el precio llegó a casi igualar su máximo histórico alcanzado en 1989) y otra que termina en diciembre de 2007 (de modo de eliminar las observaciones asociadas con la crisis financiera y recesión global que comenzó en 2008). El cuadro 4 reporta los criterios de información para los casos 1 a 7, donde podemos ver que el ranking relativo entre modelos que encontramos en la muestra completa se mantiene en estas submuestras. En particular, el caso 4 también aparece como el modelo preferido, y la diferencia con los competidores cercanos es un poco mayor.

⁷ Recuérdese que en un modelo autorregresivo la constante no es igual a la media incondicional. En particular, en un modelo AR(2) del tipo $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$, la media incondicional es $c/(1 - \phi_1 - \phi_2)$.

Cuadro 3

Intervalos de confianza para la diferencia en la media incondicional^a

	$\mu_1 - \mu_2$	I.C. 95%
Caso 6	-1.55	[-9.54;7.36]
Caso 8	-23.54	[-28.31;-18.09]
Caso 9	0.11	[-30.03;30.03]

Fuente: Elaboración propia.

a. Estos fueron computados con los resultados del procedimiento de MCMC. μ_j denota la media incondicional bajo el régimen j .

Cuadro 4

Criterios de información en submuestras^a

Caso	1975.01 - 2004.12			1975.01 - 2007.12		
	AIC	HQC	BIC	AIC	HQC	BIC
1	-3.10	-3.06	-2.99	-3.00	-2.96	-2.900
2	-3.00	-2.97	-2.92	-2.30	-2.28	-2.23
3	-3.07	-3.032	-2.98	-2.93	-2.89	-2.84
4	-3.10	-3.073	-3.03	-3.01	-2.99	-2.94
5	-2.97	-2.93	-2.87	-2.94	-2.91	-2.85
6	-3.10	-3.07	-3.01	-3.01	-2.98	-2.93
7	-3.09	-3.06	-3.00	-3.01	-2.97	-2.91

Fuente: Elaboración propia.

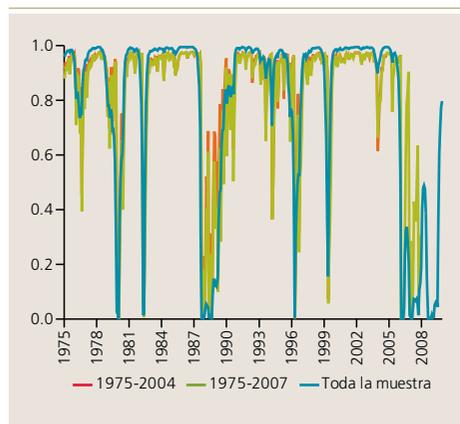
a. Véase el texto para una descripción de los casos.

En términos de parámetros estimados para estas submuestras, el cuadro 5 muestra los estimadores puntuales para el caso 4. Los coeficientes son muy similares entre submuestras, solo con una pequeña reducción en la varianza del estado de alta varianza (que era esperada dado que estamos eliminando un período altamente volátil). Finalmente, el gráfico 4 ilustra las probabilidades suavizadas del estado de varianza baja en las diferentes muestras. Como puede apreciarse, la inferencia para esta probabilidad es comparable con la obtenida para la muestra entera en los períodos en común.

Como ejercicio final, estimamos el modelo para la diferencia del logaritmo del precio del cobre. En este caso, si tuviésemos un cambio de régimen de una vez en la media incondicional debería aparecer simplemente como un *outlier* en la muestra en diferencias. De este modo, si el modelo original (en niveles) confunde cambios en varianzas con cambios en la media incondicional, entonces en

Gráfico 4

Probabilidades suavizadas, caso 4, diferentes muestras



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 5

Parámetros estimados, caso 4, diferentes muestras^a

	Muestra completa	1975.01 - 2004.12	1975.01 - 2007.12
c	0.021	0.084	0.018
ϕ_1	1.345	1.313	1.324
ϕ_2	-0.349	-0.335	-0.328
$\sigma_{S_t=1}^2$	0.002	0.002	0.002
$\sigma_{S_t=2}^2$	0.012	0.009	0.009
ρ_{11}	0.955	0.967	0.966
ρ_{21}	0.818	0.804	0.860

Fuente: Elaboración propia.

a. Ver cuadro 2.

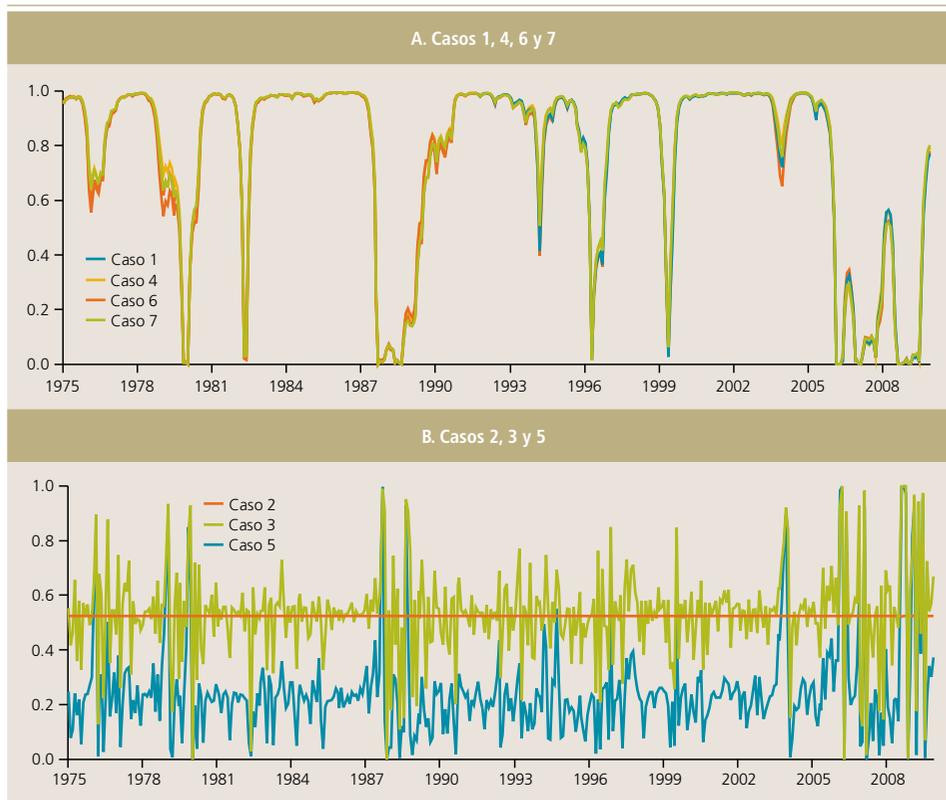
la especificación en diferencias la varianza no debería cambiar significativamente en el tiempo. El cuadro 6 presenta los criterios de información para los casos 1 a 7 usando esta serie alternativa, donde los resultados siguen indicando al caso 4 como la especificación preferida, y además los modelos que incluyen una varianza cambiante mejoran sobre los que no lo hacen. Más aun, en términos de las probabilidades suavizadas, el gráfico 5 replica el análisis del gráfico 2 pero con esta serie alternativa, donde podemos ver los mismos patrones que observábamos antes.

En conclusión, estos ejercicios refuerzan los resultados que enfatizan el rol de una varianza cambiante. Y en términos de la posibilidad de un cambio en la media incondicional, si bien encontramos cierta evidencia a favor, la misma es relativamente más débil que la que encontramos para el cambio en la varianza. Este resultado es, según nuestro conocimiento, relativamente nuevo en la literatura, ya que la

Cuadro 6
Criterios de información, diferencia logarítmica del precio del cobre^a

Caso	AIC	HQC	BIC
1	6.29	6.33	6.39
2	6.45	6.48	6.52
3	6.40	6.43	6.47
4	6.28	6.31	6.35
5	6.40	6.43	6.48
6	6.28	6.31	6.36
7	6.29	6.32	6.37

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 5
Probabilidades suavizadas del estado de baja varianza, diferencia logarítmica


Fuente: Elaboración propia.

mayoría de los artículos citados en la introducción no analizan la posibilidad de un cambio en la media incondicional. La única excepción es el trabajo de Heaney (2006) que sí estima un modelo con media incondicional cambiante, encontrando una diferencia significativa entre regímenes. Sin embargo, es importante remarcar algunas características de ese estudio que se distinguen del nuestro. Primero, en lugar de analizar el precio al contado del cobre se analiza el premio en el contrato de futuros (es decir, el ratio del precio futuro sobre el de contado). En segundo lugar, los tests que utiliza ese autor se basan en distribuciones asintóticas que, como indicamos anteriormente, probablemente no sean muy apropiados en este contexto. Finalmente, si bien el modelo estimado en ese estudio incluye una media que cambia en el tiempo, no se realiza un ejercicio de comparación de modelos como sí lo hacemos aquí. Es por todos estos motivos que decimos que este resultado es relativamente nuevo en la literatura.

IV. ANÁLISIS FUERA DE LA MUESTRA

En esta sección evaluamos la capacidad predictiva de los modelos MSAR, en términos tanto de pronóstico puntual como de cobertura de los intervalos de confianza. La inclusión del análisis de intervalos de confianza está precisamente motivada por la relevancia de la varianza que cambia en el tiempo detectada en la sección anterior. El ejercicio que llevamos adelante consiste en comparar el modelo MSAR con la especificación del caso 4 con los modelos AR, GARCH y RW-D analizados en la sección anterior. Nos concentramos en el caso 4 solo para hacer el análisis más claro y corto. Sin embargo, hemos también comparado el caso 4 con los otros casos del modelo MSAR que permiten una varianza cambiante y no hemos encontrado mejoras significativas en la capacidad predictiva.

En términos de pronósticos puntuales, corremos una estimación progresiva empezando en enero de 2004 (es decir, eliminando el 15% final de la muestra) y para cada nueva muestra estimamos el modelo y computamos el pronóstico hasta 12 meses adelante usando la moda de la función de verosimilitud. El cuadro 7 muestra el error cuadrático medio (ECM) del pronóstico

Cuadro 7

Error cuadrático medio del pronóstico y test^a

Meses	Estadístico de test vs. Caso 4									
	ECM				RW		AR		GARCH	
	RW	AR	GARCH	Caso 4	DM	HLN	DM	HLN	DM	HLN
1	4.9	4.4	4.4	4.4	1.55	1.54	2.00**	1.98*	1.50	1.49
2	8.6	8.1	8.1	7.9	0.88	0.85	2.01**	1.95*	1.79*	1.74*
3	11.8	11.4	11.5	11.2	0.74	0.70	2.39**	2.27**	1.75*	1.66*
6	18.9	19.0	19.1	18.4	0.57	0.50	2.61**	2.29**	1.16	1.02
12	24.0	21.1	21.0	20.1	1.30	0.92	2.06**	1.45	0.53	0.37

Fuente: Elaboración propia.

a. Las columnas bajo el título ECM muestran el error cuadrático medio, expresado como porcentaje, para cada modelo (ver nota al pie N°8). Las columnas DM reportan el estadístico del test de Diebold y Mariano (1995) de la hipótesis nula de que ambos modelos tiene el mismo error cuadrático medio. Las columnas HLN reportan el test DM modificado sugerido por Harvey et al. (1997). ** y * denotan rechazos de la hipótesis nula al 5 y 10% de significatividad, respectivamente.

en términos porcentuales para cada modelo.⁸ Adicionalmente, se incluye el estadístico del test de Diebold y Mariano (1995), y el refinamiento propuesto por Harvey et al. (1997), para testear la hipótesis nula de mismo valor de ECM. El modelo MSAR presenta el menor valor de ECM para todos los horizontes. En términos del test, los del modelo MSAR parecen mejorar el desempeño del modelo AR en todos los horizontes. La ventaja sobre el modelo GARCH es menos clara, donde el MSAR tiene un MCE estadísticamente menor solo en horizontes de dos y tres meses, mientras que para los otros horizontes parecerían ser igualmente buenos. Finalmente, el modelo MSAR no es significativamente mejor que la alternativa RW-D.

En términos de intervalos de confianza y del análisis de cobertura, elegimos un enfoque que permita caracterizar todas las fuentes de incertidumbre que están presentes en el pronóstico basado en modelo MSAR. En particular, dado el modelo, el pronóstico en el período T de valores futuros hasta el período $T + J$, que denotamos $\{y_{T+h}\}_{h=1}^J$, puede construirse como una función de los parámetros θ , de los valores del estado no observado S_T , de la secuencia de shocks $\{\epsilon_{T+h}\}_{h=1}^J$, y de la historia de observables hasta el período T , y^T . El objeto del interés es la distribución de la variable pronosticada, condicional en las observaciones disponibles hasta el período T , es decir, $p(y_{T+h} | y^T)$. Una forma conveniente de formular esta probabilidad es

$$\begin{aligned} p(y_{T+h} | y^T) &= \int p(\{y_{T+h}\}, \theta | y^T) d\theta = \int p(\{y_{T+h}\} | y^T, \theta) p(\theta | y^T) d\theta = \\ &= \int p(\{y_{T+h}\} | y^T, \theta, S_T) p(S_T | y^T, \theta) p(\theta | y^T) d\theta = \\ &= \int p(\{y_{T+h}\} | y^T, \theta, S_T, \{\epsilon_{T+h}\}) p(\{\epsilon_{T+h}\} | \theta) p(S_T | y^T, \theta) p(\theta | y^T) d\theta. \end{aligned}$$

donde $p(\theta | y^T)$ es la distribución de los parámetros inferida en la estimación, y las otras probabilidades son inferidas de la estructura del modelo. Esta descomposición enfatiza que la incertidumbre en el pronóstico se debe a tres fuentes diferentes: i) incertidumbre sobre los parámetros, $p(\theta | y^T)$, ii) incertidumbre sobre el estado inicial no observado, $p(S_T | y^T, \theta)$, y iii) incertidumbre sobre los shocks, $p(\{\epsilon_{T+h}\} | \theta)$. Nuestro interés está en los intervalos de confianza (percentiles) asociados con la distribución $p(y_{T+h} | y^T)$. Sin embargo, estas integrales no pueden computarse numéricamente, por lo que tenemos que recurrir a métodos basados en simulación para computar estos percentiles.⁹

La fecha inicial para este ejercicio de pronóstico es diciembre de 2004, y repetimos el algoritmo para cada nueva muestra que consiste en agregar una observación a la vez. Para tener una idea general sobre cómo la inferencia sobre los intervalos de confianza de los pronósticos puede diferir según el estado de la economía, el gráfico 6 presenta dos ejemplos de intervalos de confianza de 90%: uno donde el pronóstico empieza en enero de 2005 (un mes identificado como de baja varianza), y el otro que empieza en enero de 2008 (un mes identificado como de alta varianza). Podemos observar que en ambos casos el modelo MSAR arroja los intervalos

⁸ Si llamamos y_j al valor de la variable de interés en un horizonte de pronóstico dado usando la ventana de estimación j , y denotamos como \hat{y}_j el pronóstico para ese mismo horizonte, entonces el estadístico que computamos es

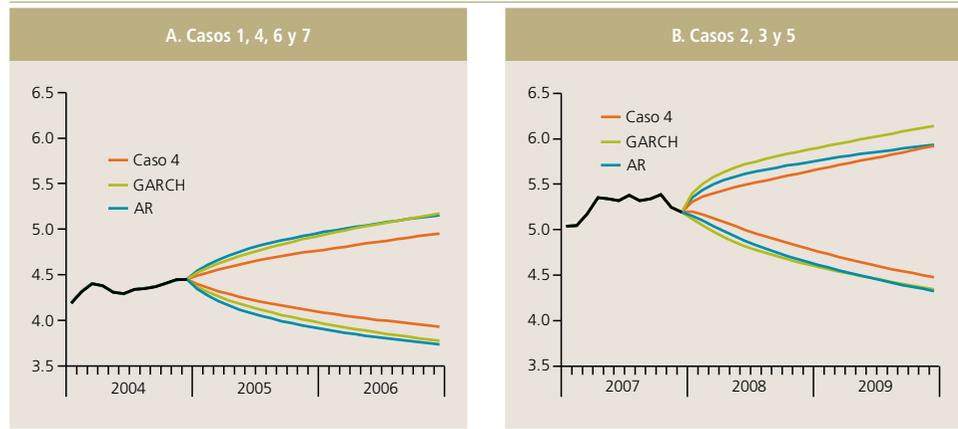
$$\sqrt{\sum_{j=1}^N 100 [(y_j - \hat{y}_j) / y_j]^2} / N,$$

donde N es el número de ventanas utilizadas para pronosticar.

⁹ En el apéndice técnico, disponible a quien lo solicite a los autores, se presenta el algoritmo utilizado, cuya implementación utilizó 125 mil simulaciones para construir los intervalos de confianza.

Gráfico 6

Intervalo de confianza de 90% del pronóstico



Fuente: Elaboración propia.

de confianza más pequeños. La diferencia entre ambos gráficos es el comportamiento de los modelos AR y GARCH: en el estado de varianza baja el modelo GARCH produce un intervalo más pequeño que el AR, y lo contrario pasa en el estado de alta varianza.

Más allá de este ejemplo, un análisis formal consiste en comparar la cobertura de estos intervalos (es decir, el porcentaje de veces en que la observación realizada cae dentro del intervalo). Esto se presenta para los tres modelos en el cuadro 8, donde incluimos los valores p del test de Giacomini y White (2006), usando una función de pérdida cuadrática, de la hipótesis nula de que el modelo en particular genera la misma cobertura que el modelo MSAR. Podemos observar que el modelo MSAR parecería tener una mejor cobertura que las otras alternativas, aunque el test indica que la diferencia no es significativa.

Cuadro 8

Cobertura de intervalos de confianza de 90% y test^a

Meses	Cobertura			Test vs. Caso 4, Valor p	
	AR	GARCH	Caso 4	AR	GARCH
1	50.0	36.1	51.4	0.49	0.35
2	64.8	60.6	64.8	0.50	0.47
3	68.6	72.9	80.0	0.43	0.46
6	85.1	85.1	91.0	0.47	0.47
12	95.1	96.7	95.1	0.50	0.49

Fuente: Elaboración propia.

a. Las columnas dos a cuatro denotan la cobertura de los intervalos de confianza de 90% simulados. Las últimas dos columnas muestran el valor p del test de Giacomini y White (2006) de capacidad predictiva, donde los modelos AR y GARCH son comparados contra el caso 4.

Como ejercicio final presentamos una descomposición de la varianza de error de pronóstico, que puede computarse utilizando las simulaciones generadas para computar los intervalos de confianza de los pronósticos. Estos resultados están presentados en el cuadro 9. Para todos estos modelos, la mayor fuente de incertidumbre es la asociada con el término de error. La diferencia es que, mientras con los modelos AR y GARCH la incertidumbre de los parámetros juega un rol menor pero no trivial, en el modelo MSAR la incertidumbre sobre los parámetros pierde importancia pero la incertidumbre sobre el estado inicial tiene un rol no trivial. Una forma complementaria de leer estos resultados es que la predicción del cambio de régimen puede ser relevante para el ejercicio de pronóstico con modelos MSAR (explicando un máximo de 12% de la varianza del error de predicción), pero por lejos la mayor fuente de incertidumbre de predicción continúa siendo pronosticar los residuos (que al menos explica 87% de esta varianza), tal como sucede con los modelos con parámetros constantes.

Cuadro 9**Descomposición de la varianza del pronóstico^a**

Meses	AR		GARCH		Caso 4		
	Parámetros	Shock	Parámetros	Shock	Parámetros	Estado	Shock
1	2.6	97.4	5.2	94.8	0.04	3.2	96.7
2	4.4	95.6	8.7	91.3	0.04	4.6	95.4
3	5.6	94.4	11.2	88.8	0.04	5.5	94.4
6	7.9	92.1	16.9	83.1	0.04	7.9	92.1
12	12.2	87.8	21.1	78.9	0.04	12.6	87.4

Fuente: Elaboración propia.

a. Cada entrada corresponde al porcentaje de la varianza del error de pronóstico debido a cada una de las posibles fuentes de incertidumbre.

V. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta un análisis exhaustivo de las virtudes de los modelos de cambios de régimen de Markov aplicados al precio del cobre, con el objeto de determinar su potencial utilidad para describir y pronosticar este precio. El mensaje principal del artículo es que incluir una varianza que cambie en el tiempo es completamente relevante para modelar el precio del cobre. Más aun, los modelos MSAR que incluyen una varianza cambiante mejoran sobre las especificaciones ARMA, GARCH y RW dentro de la muestra, mientras que proveen algunas mejoras en términos de pronóstico solo sobre algunas alternativas. Finalmente, y refutando al argumento esgrimido por muchos analistas, también encontramos evidencia muy limitada sobre la hipótesis de un cambio en la media incondicional de este precio en torno a 2004 en el contexto de modelos de cambios de régimen de Markov.

Concluimos el trabajo sugiriendo dos vías alternativas para investigaciones futuras. Una extensión natural es considerar modelos más estructurales que incorporen otras variables relevantes para explicar el precio del cobre, tales como tipos de cambio, tasas de interés, producción industrial global e inventarios. En este sentido, los modelos analizados en el trabajo reciente de López et al. (2011) serían un buen punto de partida. Otra alternativa de investigación interesante, en términos de pronóstico, sería estudiar si se puede mejorar la capacidad predictiva combinando los pronósticos del modelo MSAR con los de otras alternativas como las ARMA o GARCH.

REFERENCIAS

- Banco Mundial (2009). *Global Economic Prospects: Commodities at the Crossroads*. Washington, DC, EE.UU.: Banco Mundial.
- Chernozhukov, V. y H. Hong (2003). "An MCMC Approach to Classical Estimation." *Journal of Econometrics* 115: 293–346.
- Choi, K. y S. Hammoudeh (2010). "Volatility Behavior of Oil, Industrial Commodity and Stock Markets in a Regime-Switching Environment." *Energy Policy* 38: 4388-99.
- Diebold, F.X. y R.S. Mariano (1995). "Comparing Predictive Accuracy." *Journal of Business and Economic Statistics* 13: 253–63.
- Fernández-Villaverde, J. y J. Rubio-Ramírez (2010). "Macroeconomics and Volatility: Data, Models, and Estimation." NBER Working Paper N°14284.
- García, R. (1998). "Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models." *International Economic Review* 39: 763–88.
- Giacomini, R. y H. White (2006). "Tests of Conditional Predictive Ability." *Econometrica* 74: 1545–78.
- Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton, NJ, EE.UU.: Princeton University Press.
- Hamilton, J. (2008). "Regime Switching Models." *New Palgrave Dictionary of Economics*, segunda edición.
- Harvey, D., S. Leybourne y P. Newbold (1997). "Testing the Equality of Prediction Mean Squared Errors." *International Journal of Forecasting* 13: 281–91.
- Heaney, R. (2006). "An Empirical Analysis of Commodity Pricing." *The Journal of Futures Market* 26(4): 391–415.
- Hong, H. y B. Preston (2012). "Bayesian Average, Prediction and Nonnested Model Selection." *Journal of Econometrics* 167(2): 358–69.
- Hong-Chan, W. y D. Young (2009). "A New Look at Copper Markets: A Regime-Switching Jump Model." University of Alberta Working Paper N°2009-13.
- Li, X. y B. Zhang (2009). "Price Discovery for Copper Futures in Informationally Linked Markets." *Applied Economics Letters* 16: 1555–8.
- López, E., E. Muñoz y V. Riquelme (2011). "Una Evaluación de los Modelos de Proyección del Precio del Cobre: ¿Podemos ir Más Allá de la Autorregresión?" *Economía Chilena* 14(3): 83–96.



Sims, C. y T. Zha (2006). "Were There Regime Switches in U.S. Monetary Policy?" *American Economic Review* 96(1): 54–81.

Smith, A., P. Naik y C. Tsai (2006). "Markov-Switching Model Selection Using Kullback- Leibler Divergence." *Journal of Econometrics* 134: 553–77.

The Economist (2011). "Red Bull." Edición impresa, 24 de septiembre.