

Sucesiones numéricas procedentes del triángulo aritmético, aplicadas a la composición musical asistida

Numerical sequences derived from the arithmetic triangle,
applied to computer assisted composition

Garzón Charry Andrés Alfonso

Pontificia Universidad Católica Argentina

andresgarzoncharry@uca.edu.ar

ORCID: 0009-0005-7111-0682

Recibido: 3 - septiembre – 2024

Aprobado: 25 - octubre – 2024

DOI: <https://doi.org/10.46553/mlc.7.2024.pp81-114>



Esta obra está bajo una licencia internacional

[Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Resumen

Texto elaborado desde el campo multidisciplinar, en donde, a través de la identificación de algunas sucesiones numéricas propias del *Triángulo Aritmético* (o de Pascal), se llevan a cabo procesos creativos musicales asistidos por computadora, implementándolas como componente primario en la gestación de material musical que, posteriormente, sirvan a la composición musical.

Palabras Clave: Multidisciplinar, composición musical, asistencia por computadora, triángulo aritmético, sucesión numérica, géneros musicales, patrones rítmicos.

Abstract

Text developed from the multidisciplinary context, where computer-assisted musical creative processes are developed through the identification of some numerical sequences of the arithmetic triangle (Pascal's), implementing them as a primary component in the creation of musical material that, later, serves the musical composition.

Keywords: Multidisciplinary, musical composition, computer assistance, arithmetic triangle, numerical succession, musical genres, rhythmic structure.

Introducción

La idea de sistematizar parcial o totalmente ciertos procesos creativos mediante la invención de máquinas, no es solo un pensamiento perteneciente a la actividad académica actual. Sin embargo, la composición asistida por computadora, si es un área del conocimiento relativamente reciente, debiéndose, principalmente, al progreso tecnológico evidenciado en la invención de máquinas digitales que incorporan una vertiginosa capacidad de cálculo y almacenamiento virtual desarrollados en los últimos sesenta años¹.

Lo anterior, es producto de la sumatoria de esfuerzos realizados por académicos cientos de años antes que apareciera la primera computadora digital, entre ellos, *M. Mersenne* (s. XVI - XVII), cuyas investigaciones abordan métodos procedentes de la combinatoria, implementándolas en la composición de canciones; así mismo, *A. Kircher* (s. XVII), quien diseñó el *Arca Musarithmica*, una máquina que implementa algoritmos a través de técnicas aleatorias y de la combinatoria que simplifica los métodos empleados en la composición musical; también, en la obra de *W. Mozart*, se encuentran antecedentes como el famoso *Musikalisches Würfelspiel* (Juego de dados) que consiste en la composición de pequeñas piezas a través de técnicas aleatorias y mediante el lanzamiento de los dados; este mismo suceso se encuentra con el compositor austriaco *M. Stadler*, con su *Table pour composer des Minuets et Trios à la infinie*, entre otros. Hasta la incursión de las primeras computadoras digitales que expandieron las posibilidades creativas, dando lugar a las primeras investigaciones documentadas por *Caplin* y *Prinz*, así como por los

¹Brian Santiago Martínez Rodríguez. 2019. «Composición musical asistida métodos de clasificación difusa.» Valencia - España: Universidad Politécnica de Valencia, 11 de Abril.

reconocidos pioneros en la composición musical asistida, *M. Mathews, L. Hiller y L. Isaacson* (s. XX)².

El panorama expuesto anteriormente es un vestigio de lo fundamental que ha sido el desarrollo académico desde el punto de vista interdisciplinar en la construcción de conceptos y en la reinterpretación de los ya establecidos, esto, sin duda, concede herramientas que amplían la bibliografía académica y establece las bases para el desarrollo de futuras investigaciones.

Consecuentemente, en el presente texto, se abstraen elementos conceptuales provenientes de la música y de las matemáticas que, al interactuar entres sí, suscitan ciertos postulados que son producto de la exploración multidisciplinar y que pretenden, junto con su aplicación a la composición musical, ser un aporte significativo a la literatura teórico musical universal.

Panorama del triángulo aritmético y aproximación a sus sucesiones numéricas

En la presente sección, se expondrán generalidades del *Triángulo Aritmético*³, sin que implique su profundización con razonamientos matemáticos complejos, por lo que el propósito es, develar algunas de sus sucesiones numéricas para que posteriormente sean implementadas en el proceso de creación musical, puesto que estas, permitirán obtener material musical asistido por computadora a través de su representación en determinadas alturas que, son la base para la composición, en principio, de una obra para piano solo.

El *Triángulo Aritmético*⁴, es en sí, una secuencia de números enteros que popularmente está dispuesta de manera triangular. Su estructura numérica se constituye partiendo del

Brian Santiago Martínez Rodríguez. 2019. «Composición musical asistida métodos de clasificación difusa.» Valencia - España: Universidad Politécnica de Valencia, 11 de Abril.

³ Realmente, no está determinado su origen ni su autor, lo cierto es que ha sido desarrollado e implementado por diversas culturas a través de siglos, encontrándose evidencia de su aplicación en China, Persia y la India; mucho antes que B. Pascal. Sin embargo, la profundización realizada por el polímata francés, le bastó para ser el referente, al menos en occidente, a todo lo que al triángulo aritmético se refiere.

Reinaldo Núñez. s.f. «ACERCA DEL TRIÁNGULO DE PASCA.» Universidad Sergio Arboleda. Mariano Hormigón Blázquez. 2015. «En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La autoría I.» SUMA 48: 57-63.

Mariano Hormigón Blázquez. 2015. «En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La autoría I.» SUMA 48: 57-63.

⁴ En Adelante, T.A.

entero uno [1] lo que origina su propiedad principal que dicta: <<todo elemento (que no sea un 1) es la suma de los dos elementos que están diagonalmente sobre el>>⁵. Por consiguiente, es posible hallar cualquiera de sus columnas progresiva y simétricamente respecto a su eje central.

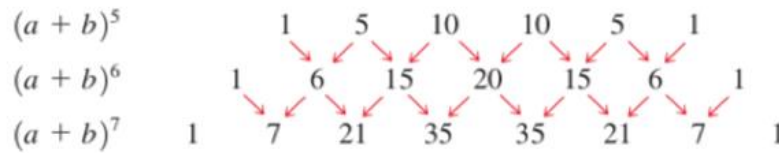


Figura 1. Proceso aritmético para hallar cualquier renglón del T.A.⁶.

Como resultado del anterior proceso denominado: *expansión de $(a+b)^n$* , los elementos del T.A. se expanden indefinidamente siguiendo este patrón aritmético, por lo que, la siguiente tabla, permite observar a manera ilustrativa, la delimitación de sus primeros doce elementos⁷.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66		
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220			
1	5	15	35	70	126	210	330	495				
1	6	21	56	126	252	462	792					
1	7	28	84	210	462	924						
1	8	36	120	330	792							
1	9	45	165	495								
1	10	55	220									
1	11	66										
1	12											
1												

Tabla 1. Primeros doce elementos del T.A.

⁵ James Stewart, Lothar Redlin, y Saleem Watson. 2012. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. Brooks & Cole.

⁶ James Stewart, Lothar Redlin, y Saleem Watson. 2012. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. Brooks & Cole. El autor, también denomina a este proceso como: <<expansión de un binomio>>

⁷ James Stewart, Lothar Redlin, y Saleem Watson. 2012. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. Brooks & Cole.

Gracias a la estructura resultante en forma de triángulo, es posible determinar gráficamente y de manera directa algunas funciones matemáticas y/o secuencias numéricas como: *Los coeficientes binomiales, las potencias de dos, la sucesión de Fibonacci, los elementos del número π , conformación de fractales, los números naturales, los números primos, binomio de Newton*⁸, entre otras. Al ser interminable, fueron seleccionadas algunas de ellas, delimitando su expansión y el número de secuencias como punto de partida en la obtención de los datos que serán usados para consolidar el material musical empleado en el proceso creativo, siendo las siguientes: *Números Cuadrados, Números Hexagonales, Números Pentagonales, Números Triangulares, Números Tetraédricos y Números Combinatorios*⁹.

Acercamiento a las sucesiones numéricas del triángulo aritmético

Números Cuadrados

Se obtienen al tomar los elementos de la tercera diagonal del T.A. Como se muestra en la Figura 2, al sumar, en su orden, de a dos elementos, el entero resultante de esta sumatoria será uno de los componentes de la secuencia numérica¹⁰. Desde el punto de vista geométrico, se entiende como la cantidad de elementos necesarios para la elaboración de un cuadrado perfecto y desde la aritmética, se expresa como la multiplicación de un número entero por si mismo n cantidad de veces, lo que se conoce como: potencias de dos: $2^2 = 4$; $3^2 = 9 \dots Etc.$ ¹¹

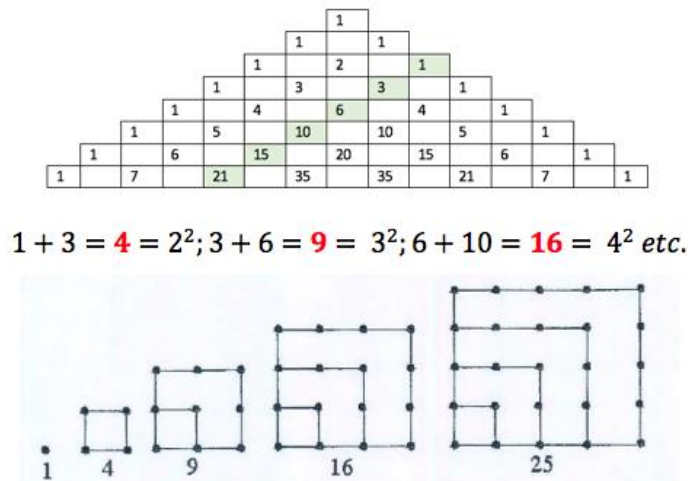
⁸Jose R. Galo Sánchez. 2020. «Congruencias en el Triángulo de Pascal y el rectángulo de Newton.» Épsilon - Revista de Educación Matemática (106): 77-100.

Orlando Mesa Betancur. 2007. Triángulo de Pascal en el planteamiento de una situación problema. Editado por Lorenza Correa Restrepo. Medellín, Colombia.: Universidad de Medellín.

⁹ Juan Antonio García Cruz, y Antonio Martinón. 1998. «Números poligonales.» Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, España, 3 de diciembre.

¹⁰ $1 + 3 = 4$; $3 + 6 = 9$; $6 + 10 = 16$; Etc.

¹¹ Juan Antonio García Cruz, y Antonio Martinón. 1998. «Números poligonales.» Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, España, 3 de diciembre.



Números Pentagonales

Se acceden a ellos situándose en la segunda diagonal del T.A. Observando la Figura 4, se denota que, el resultado se obtiene de la sumatoria de sus elementos de manera acumulativa, reiniciando este proceso, desde cada uno de los números que comprende cada uno de sus renglones, en su orden. De esta manera, se obtienen los elementos necesarios para la estructuración geométrica de pentágonos¹⁴.

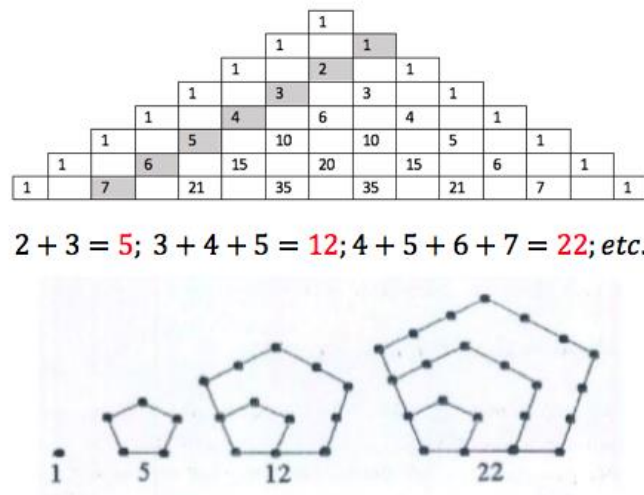


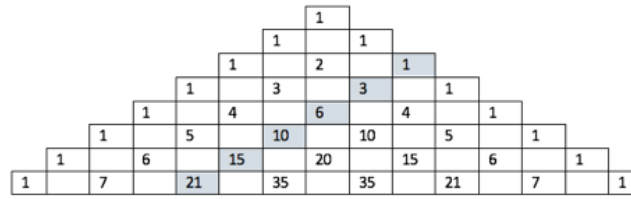
Figura 4. Números Pentagonales.

Números Triangulares

Se accede a ellos a través de la tercera diagonal del T.A. En la Figura 5, se aprecia que son todos los elementos que constituyen cada uno de sus renglones. Por lo que, al exponer el proceso aritmético para hallar sus elementos, se infiere que sus términos son el resultado de la sumatoria de n números naturales de manera consecutiva y acumulativa, siendo los necesarios para representar figuras geométricas triangulares¹⁵.

¹⁴Juan Antonio García Cruz y Antonio Martinón. 1998. <<Números Poligonales>> Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, España. 3 de diciembre.

¹⁵Juan Antonio García Cruz, y Antonio Martinón. 1998. «Números poligonales.» Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, España, 3 de diciembre.



$1 + 2 = 3; 1 + 2 + 3 = 6; 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$ etc.

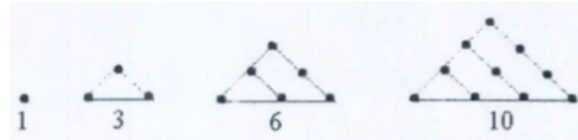


Figura 5. Números Triangulares.

+														
1														1
1	2													3
1	2	3												6
1	2	3	4											10
1	2	3	4	5										15
1	2	3	4	5	6									21
1	2	3	4	5	6	7								28
1	2	3	4	5	6	7	8							36
1	2	3	4	5	6	7	8	9						45
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					55
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11				66
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			78

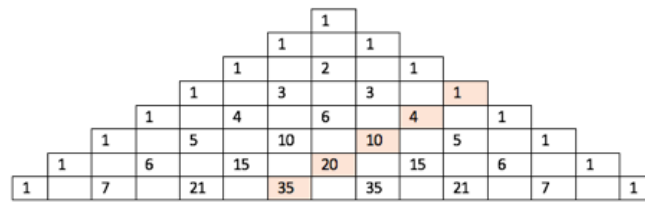
Figura 6. Proceso aritmético. Números Triangulares.

Números Tetraédricos

También son conocidos como números *piramidales*, o *triángulo-piramidales*, siendo fácilmente ubicables en la cuarta diagonal del T.A. Desde el punto de vista de la geometría, los números tetraédricos son entendidos como <<la representación geométrica de un número de puntos de una red piramidal de base triangular¹⁶>>, por tal razón, también es posible concluir sus términos sumando progresiva y acumulativamente los elementos pertenecientes a la tercera columna (números triangulares)¹⁷, tal y como se aprecia en la Figura 7.

¹⁶ Diana Milagros Parra Vargas. 2015. «Análisis Histórico-Epistemológico de la Iniciación de la Combinatoria Caso: Combinaciones.» Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

¹⁷ Diana Milagros Parra Vargas. 2015. «Análisis Histórico-Epistemológico de la Iniciación de la Combinatoria Caso: Combinaciones.» Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.



$1 + 3 = 4$; $1 + 3 + 6 = 10$; $1 + 3 + 6 + 10 = 20$. etc.



Figura 7. Números Tetraédricos.

Números Combinatorios

Es el resultado que se obtiene de encontrar las posibles combinaciones de m elementos en n grupos, respondiendo a los principios combinatorios y tomando algunas técnicas de conteo¹⁸. Para calcular los números combinatorios se implementa la siguiente formula elemental, en donde $m = 7$; $n = 2$, tal y como se observa a continuación:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21$$

Figura 8 Fórmula elemental para el cálculo de los números combinatorios¹⁹.

En la estructura del T.A. es posible obtener el mismo resultado del anterior ejemplo, $m = 7$; $n = 2$, realizando un procedimiento mucho más sencillo y rápido, en el cual, se deduce después de contar, de manera descendente, las filas del triángulo iniciando desde el número cero [0], y posteriormente, desplazándose dos posiciones o renglones a través de sus columnas, así como se expone en la Figura 9.

¹⁸ Benjamín Sarmiento, y Felipe Fernández. 2014. «I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica La Enseñanza y el Aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística.» Combinatoria para la escuela. Universidad Pedagógica de Colombia.

¹⁹ Ona Ayetebe, Juan Patricio Ondo. 2020. «Curiosidad del número combinatorio (concepto de orden).» Pensamiento Matemático X (1).

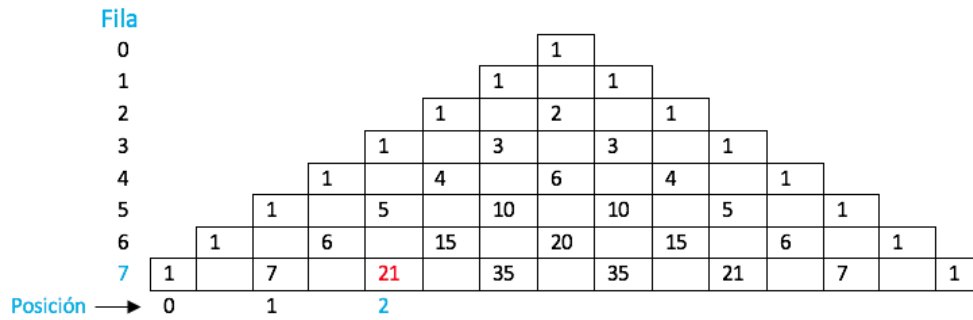


Figura 9. Posicionamiento de los números combinatorios en el Triángulo Aritmético.

Es así como, al realizar el mismo cálculo, pero con diferentes enteros, se obtuvieron los siguientes términos para ser implementados y asistidos a través de la computadora.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10 \quad \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15 \quad \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21 \quad \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35 \quad \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28 \quad \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70 \quad \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = 36 \quad \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$$

El material musical será consecuencia de la aproximación realizada anteriormente; si bien, estas precisiones no son abordadas de manera exhaustiva, la información expuesta se considera adecuada para el cumplimiento del propósito creativo del presente artículo. La articulación entre disciplinas (matemáticas y música) comprende estructurar sus premisas, mediante un proceso de ‘traducción’ del lenguaje matemático al musical, haciendo uso de las herramientas tecnológicas disponibles.

Sobre los datos obtenidos de las sucesiones numéricas del triángulo aritmético

Como se ha observado, las sucesiones numéricas se expanden de manera indefinida, al igual que la estructura del T.A. por tal motivo, se han delimitado en un número finito de elementos, los cuales, serán los datos que recibirá el software que asistirá el material musical primario que, posteriormente, se implementará en el proceso de composición musical.

Para llevar a cabo este proceso, se toma como referencia el número de elementos que comprende el total cromático del sistema musical occidental (doce) como límite máximo, y el número de elementos con los cuales está constituida una escala diatónica tonal (siete, sin tener en cuenta la octava). De esta manera, serán seleccionados aleatoriamente los primeros elementos correspondientes a las primeras siete posiciones y/o hasta un máximo de doce de cada sucesión numérica del T.A. expuesta previamente.

Sucesión numérica	Elementos de la sucesión seleccionados	Número de elementos
Números cuadrados	[4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100].	[9]
Números hexagonales	[1, 6, 15, 28, 45, 66, 91].	[7]
Números pentagonales	[5, 12, 22, 35, 51, 70, 92].	[7]
Números triangulares	[1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78].	[12]
Números tetraédricos	[1, 4, 10, 20, 35, 56, 84].	[7]
Números combinatorios	[6, 10, 15, 20, 21, 35, 28, 56, 70, 36, 84]	[11]

Tabla 2. Sucesiones numéricas poligonales.

Exposición del proceso creativo musical fundamentado en los datos proporcionados

Los datos numéricos determinados anteriormente, serán sometidos a un segundo proceso que los distribuye en matrices ideadas especialmente para establecer posibles cadenas numéricas, las cuales, son posteriormente implementadas en alimentar el software *OpenMusic*²⁰, que asistirá las alturas que conlleven a la constitución de una colección de escalas, diversas en su distribución interválicas y en cantidad de elementos, siendo este, el material musical fundamental en el proceso de composición musical²¹.

²⁰ Software de acceso libre basado en *Lisp* <http://repmus.ircam.fr/openmusic/home>

²¹ Las herramientas implementadas que permitieron el desarrollo de esta investigación, software *Open Music*, librerías *WSCursoOM 1-2*, y *wsLibroCetta*, fueron proporcionadas por el Dr. Pablo Cetta, en su cátedra de *Captura y Procesamiento de Audio*, en el marco del Doctorado en Música de la Pontificia Universidad Católica de Argentina. Apuntes del Seminario: Composición Asistida y Procesamiento de Sonido y Música en Tiempo Real, dirigida por Dr. Pablo Cetta. Doctorado en Música. Universidad Católica de Argentina. 2020.

Sobre el diseño y elaboración de las matrices

Para la elaboración de las matrices, y la determinación de sus longitudes, se ha tomado como referencia la *Teoría de Conjuntos de Grados Cromáticos*, en donde cada sonido del total cromático es representado por un número entero *Universal Set*, que equivale a la misma altura, independientemente de la octava en la que se encuentre y de su semejante enarmónica²².

A cada sonido se le es asignado un número, iniciando desde el cero [0], es así que, el sonido *Do* le correspondería el número cero [0], *Do sostenido* el número uno [1] y así sucesivamente hasta la nota *Si* [11]. Es por lo anterior que, la matriz tendrá como máximo doce columnas en su longitud. En cuanto a sus filas, se ha delimitado a nueve, ya que, en algunas de las sucesiones del T.A. colinda con enteros de tres cifras. Finalmente, se asignan (de izquierda a derecha) en cada celda, un número entero, iniciando desde el número cero [0] hasta completar el total de celdas con las que dispone la matriz, tal y como se observa a continuación.

C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107

Figura 10. Estructuración de una matriz.

En la siguiente ilustración se observa que, se consolida una estructura de doce [12] columnas y nueve [9] filas en donde serán distribuidos los datos proporcionados por las sucesiones numéricas del T.A. Así mismo, cada columna tiene en su encabezado una de las alturas de las que se sirve el total cromático, las cuales, representa los números enteros que la componen, por ejemplo: los números [0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, y 96] son representados por la nota *Do* y sus equivalentes enarmónicos.

²² Pablo Cetta. 2004. Principios de Estructuración de la Altura Empleando Conjuntos de Grados Cromáticos. Altura-Timbre-Espacio. Cuaderno de Estudio N°5. IIMCV. Educa.

C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107

Figura 11. Distribución de filas y columnas de una matriz.

Distribución de los datos proporcionados por el triángulo aritmético

Posteriormente, se asignan los términos que fueron hallados y seleccionados procedentes de las sucesiones numéricas del T.A. La asignación se realiza tomando cada uno de los elementos en el orden estricto que presenta cada una de ellas, situándolos en su celda correspondiente, lo que ocasiona que cada matriz presente su propio ordenamiento distributivo y esto se traduce en, diversificación de organización de alturas.

De esta manera, al tomar, por ejemplo, una de las sucesiones (números cuadrados) que contiene los siguientes elementos: [0] [4] [9] [16] [25] [36] [49] [64] [81] [100], el primero de ellos será asignado a la celda [0]; el segundo a la celda [4]; el tercero a la celda [9]; y así de manera sucesiva, como denota en la siguiente ilustración.

Números Cuadrados: [0] [4] [9] [16] [25] [36] [49] [64] [81] [100]

Números Cuadrados											
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107

Figura 12. Asignación de elementos a una matriz.

Habiendo realizado la asignación, se aprecia la posibilidad de que varios de los elementos coincidan en una misma columna, si se observa la anterior ilustración, la primera columna del sonido (C), es interceptada por los elementos [0] [36]; la segunda columna, sonido (C#), por los elementos [25] [49]; la quinta columna, sonido (E), por los elementos [4] [16] [64] [100]; y la decima, sonido (A), por los elementos [9] [81]; este fenómeno, se interpreta, agrupando los elementos en un solo conjunto, lo que comprende que, los

elementos que coinciden en una misma columna pertenecen a la altura que los representa, como se observa en la siguiente tabla.

Columna	Elementos	Altura
Uno	[0], [36]	C
Dos	[25], [49]	C#
Cinco	[4], [16] [64] [100]	E
Diez	[9], [81]	A

Tabla 3. Conjunto de elementos.

De esta manera, se consolidan las alturas fundamentales que representan a los conjuntos de elementos que constituyen cada una de las columnas provenientes de su matriz correspondiente. Para el caso analizado previamente, se han obtenido cuatro alturas *C* [0,36]; *C#* [25,49]; *E* [4,16,64,100]; *A* [9,81].

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

Figura 13. Consolidación de alturas.

El anterior proceso será llevado a cabo con las demás secesiones numéricas, dando origen a un abanico de matrices que, a su vez, permitirán la conformación de una colección de escalas, cada una con una organización específica en cuanto a su cantidad de elementos, diversificación interválicas y sonoridad. A continuación, se exponen las matrices y sonidos resultantes del proceso anterior.

Números cuadrados: [0] [4] [9] [16] [25] [36] [49] [64] [81] [100]

Números Cuadrados											
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
Cuadrados											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

Figura 14. Matriz con números cuadrados.

Números Hexagonales: [0] [1] [6] [15] [28] [45] [66] [91]

Números Hexagonales											
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107

Hexagonales											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

Figura 15. Matriz con números Hexagonales.

Números Pentagonales: [0] [5] [12] [22] [35] [51] [70] [92]

Números Pentagonales											
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107

Pentagonales											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

Figura 16. Matriz con números Pentagonales.

Números Triangulares: [0] [1] [3] [6] [10] [15] [21] [28] [36] [45] [55] [66] [78]

Números Triangulares											
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107

Triangulares											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

Figura 17. Matriz con números Triangulares.

Números Tetraédricos: [0] [1] [4] [10] [20] [35] [56] [84]

Números Tetraédricos												
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	

Tetraédricos												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	

Figura 18. Matriz con números Tetraédricos.

Números Combinatorios: [0] [6] [10] [15] [20] [21] [35] [28] [56] [70] [36] [84]

Números Combinatorios												
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	

Combinatorios												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	

Figura 19. Matriz con números Combinatorios.

Configuración del material musical a través de la organización de alturas por medio de la asistencia por computadora

Los datos obtenidos del proceso anterior, serán suministrados en el software *Open Music*, el cual, será el mediador entre el lenguaje matemático y el lenguaje musical. Este software recibirá los datos resultantes de cada matriz, de esta manera, y a través del uso de algunas de sus herramientas, se realizará el proceso de conversión.

El software interpreta los datos recopilados a través de procesos algorítmicos internos, que a manera ilustrativa, se describen brevemente a continuación. Tomando los elementos procedentes de la matriz *números cuadrados* [0, 1, 4, 9], se suministran al programa, quien los recibe y posteriormente, los suma por sesenta [60]²³. Consecutivamente, el resultado es multiplicado por cien [100] siendo esta su expresión en *cents*, por lo que son llamados *midi-cents*; de esta manera, el software permite observar los sonidos escritos

²³ En la norma MIDI, el número 60 representa el Do central.

convencionalmente a través, en este caso, de una escala de cuatro sonidos, siendo el material musical primario que a la postre, es posible usarlo aplicando técnicas de composición como: inversiones, retrogradaciones, transposiciones, entre otras²⁴.

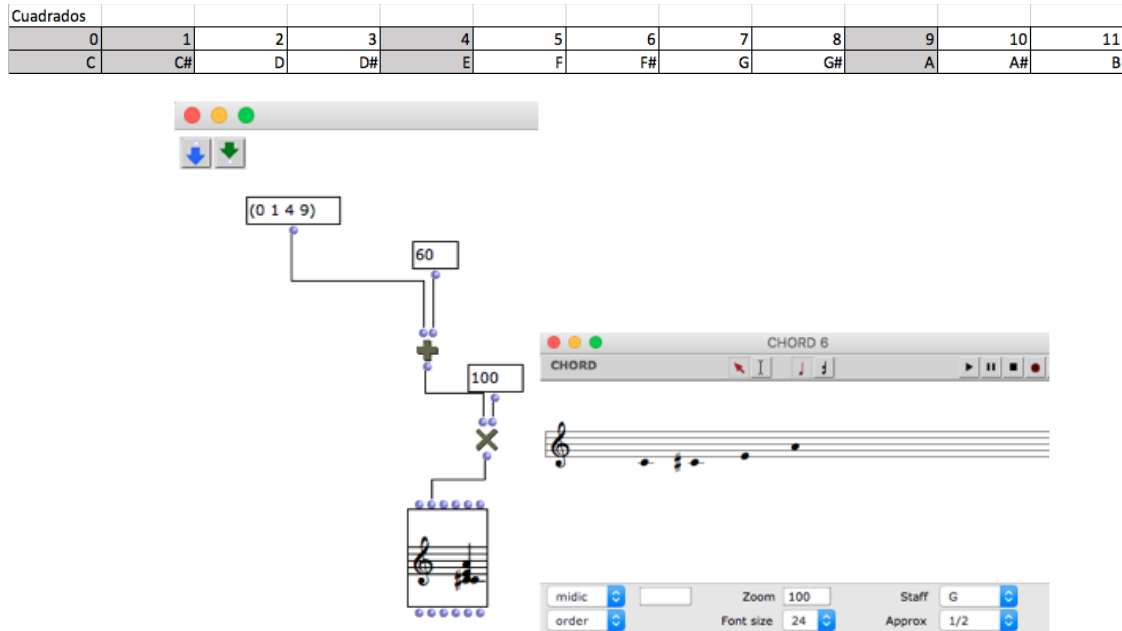


Figura 20. Organización de alturas asistidas por OM.

Cada escala resultante, adopta el nombre de la sucesión numérica de la cual fue concebida, es por ello que, la anterior, lleva por nombre *escala cuadrada*. Así mismo, las demás conformaciones de alturas reciben su nombre, como referencia de su origen en el T.A. siendo las siguientes: *escala hexagonal*, *escala pentagonal*, *escala triangular*, *escala tetraédrica* y *escala combinatoria*.

²⁴ Apuntes del Seminario: Composición Asistida y Procesamiento de Sonido y Música en Tiempo Real, dirigida por Dr. Pablo Cetta. Doctorado en Música. Universidad Católica de Argentina. 2020.

Hexagonales												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	

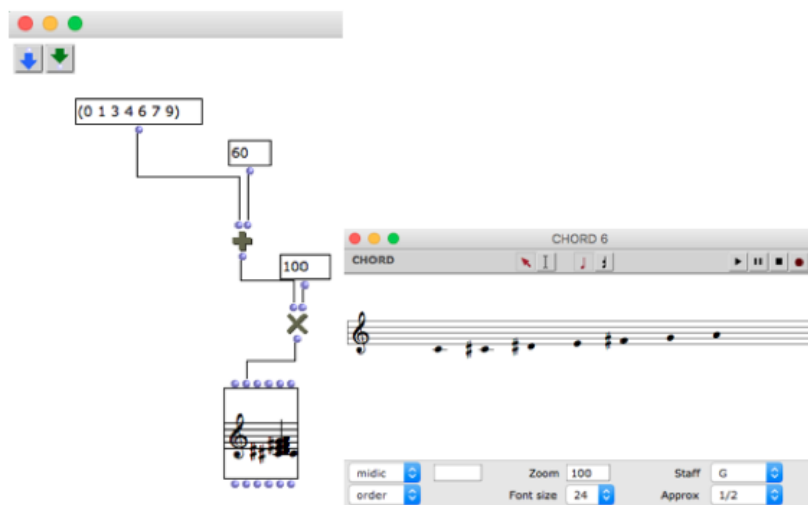


Figura 21. Sonidos asistidos por OM. Números Hexagonales.

Pentagonales												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	

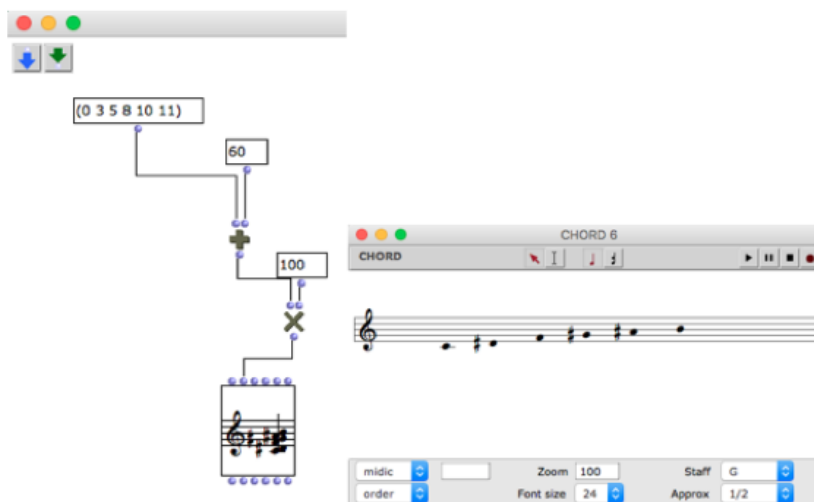
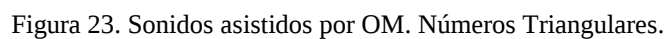


Figura 22. Sonidos asistidos por OM. Números Pentagonales.



Tetraédricos														
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B			



Combinatorios											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

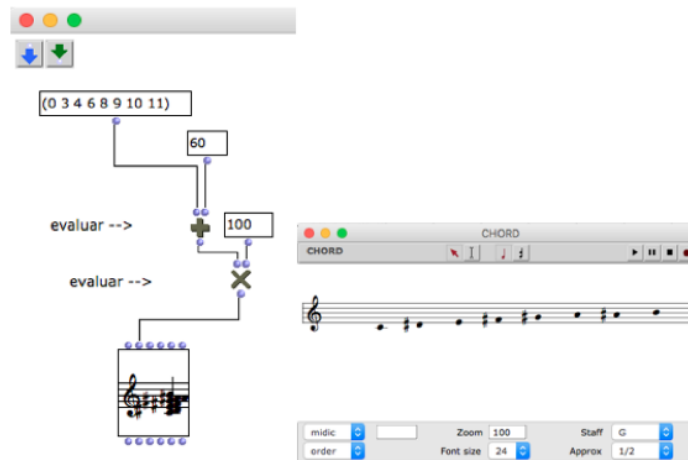
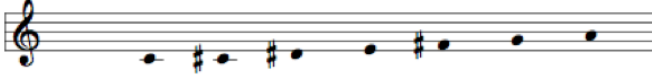


Figura 25. Sonidos asistidos por OM. Números Combinatorios.

De esta manera, se constituyen un total de seis escalas que, gracias a la intermediación del programa *s-info*, es posible consultar sus características individuales identificando el tipo de *PCS* al que pertenece, su *forma prima* y la distribución interna de sus intervalos. Consecuentemente, se ha realizado la siguiente tabla que permite apreciar a cada escala en su particularidad, registrando los resultados obtenidos gracias a la intervención del software²⁵.

Objeto <i>s-info</i>	Escala Asistida por Open Music - Escalas Poligonales.
(0 1 4 9)	<i>Escala Cuadrada</i>
	
(0 1 3 4 6 7 9)	<i>Escala Hexagonal</i>
	
	<i>Escala Pentagonal</i>

²⁵ Pablo Cetta, y Pablo Di Liscia. 2010. Elementos de Contrapunto Atonal. Buenos Aires: Editorial de la Universidad Católica de Argentina.
Pablo Cetta. 2004. Principios de Estructuración de la Altura Empleando Conjuntos de Grados Cromáticos. Altura-Timbre-Espacio. Cuaderno de Estudio N°5. IIMCV. Educa.

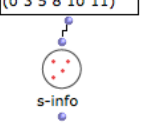
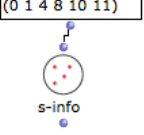
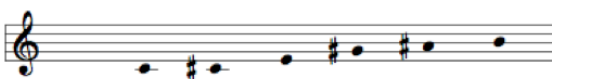
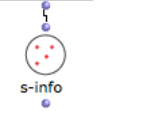
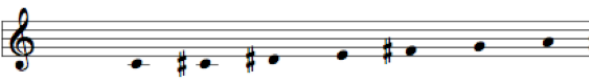
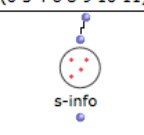
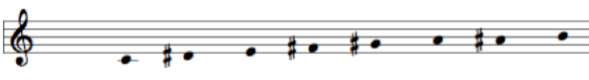
	
	Escala Tetraédrica 
	Escala Triangular²⁶ 
	Escala Combinatoria 

Tabla 4. Colección de escalas asistidas por OM. Escalas Poligonales.

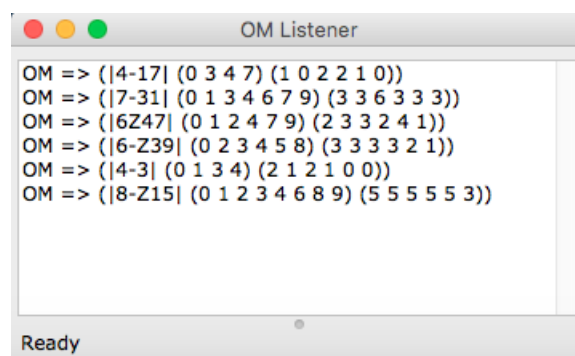


Figura 26. OM Listener. Estructuración interna de las Escalas Poligonales.

Se puede observar en el recuadro inferior *OM Listener* del anterior ejemplo, la información arrojada por el software, que indica, de izquierda a derecha: Tipo de *PCS*, *Forma Prima* y *Distribución interválica* de cada escala. Por consiguiente, si te toma el ejemplo de la primera fila, se deduce que: La *escala cuadrada*, de cuatro elementos, pertenece al PCS [4-17]; siendo su forma prima (0 3 4 7); con la siguiente distribución interválica: [1] segunda menor, [0] segundas menores, [2] terceras menores, [2] terceras

²⁶ La distribución de alturas resultantes de la *Escala Triangular*, coinciden con el *Segundo Modo de Transposiciones Limitadas* de Olivier Messiaen.

mayores, [1] cuarta justa, [0] cuartas aumentadas. Así mismo, se pueden apreciar, en el orden predispuesto, la información de cada una de las demás escalas, que pueden ser de utilidad para su posterior manipulación y aplicación al proceso creativo, por supuesto, las mismas pueden ser utilizadas implementando diferentes técnicas de composición como: transposiciones, inversiones, aumentaciones, etc. Y el uso de acordes estructurados desde cada sonido para ser utilizados como material armónico²⁷.

Exposición del material melódico y armónico asistido e implementado en el proceso creativo

Hasta el momento, se tiene como material musical un número de seis escalas asistidas de diferentes características, estas serán sometidas a diferentes procesos, principalmente en la reproducción de acordes en serie, los cuales, y según sus características audio perceptivas y estructuración interválica, serán utilizados a conveniencia y según los propósitos del compositor.

Si bien, parte del proceso creativo está apoyado en la asistencia por computadora, se pretende que esta intervención se limite a la elaboración del material musical y al desarrollo de algunas transiciones rítmicas puntuales; sin embargo, buena parte de la obra para piano está concebida mediante procesos compositivos tradicionales, directamente ejecutándolos a través de la exploración de diversas combinaciones sonoras en el piano, o tal vez, si se quiere, podría decirse, de manera ‘orgánica’.

Para su análisis, se han implementado convenciones de cada uno de los procesos que se llevaron a cabo en la composición de la obra para piano, siendo útil para identificar y señalar los compases que presenten inversiones (I), transposiciones (T) y clasificación de acordes (a, b, c, d). Así mismo, cada una de las escalas será identificada con la abreviación correspondiente a su nombre.

Nombre completo	Abreviación
Escala cuadrada	<i>Cua.</i>
Escala Hexagonal	<i>Hexa.</i>

²⁷ Apuntes del Seminario: Matemática Aplicada a la Música; Composición Asistida y Procesamiento de Sonido y Música en Tiempo Real, dirigida por Dr. Pablo Cetta. Doctorado en Música. Universidad Católica de Argentina. 2020.

Escala Pentagonal	<i>Penta.</i>
Escala Triangula	<i>Tri.</i>
Escala Tetraédrica	<i>Tetra.</i>
Escala Combinatoria	<i>Com.</i>

Tabla 5. Abreviaciones Escalas Poligonales.

Convenciones	
Hexa_T2_d	Escala Hexagonal_Transposición 2_acorde d

Tabla 6. Ejemplo de convenciones para su análisis.

Descripción del material armónico asistido

Los acordes implementados en el proceso de composición son asistidos por el programa *Campos Armónicos*, este, permite obtener, según instrucciones preestablecidas, *n* cantidad de acordes estructurados con diversas combinaciones interválicas llamadas, *particiones*. Para ello, se realizó una pequeña modificación del programa original, incluyendo, la entrada de datos y su expresión en *midicents*. Por lo que, cabe recordar que, al introducir un número entero que se encuentre entre cero [0] y once [11], le será sumado sesenta [60], posterior a ello, su resultado es multiplicado por cien [100], lo que permite obtener su expresión en *midicents*. Por ejemplo: Si se introduce el número cuatro [4], el resultado que se obtendrá será el siguiente²⁸.

$$4 + 60 = 64;$$

$$64 * 100 = 6400$$

Los datos insertados permiten la estructuración de un acorde que consolida los sonidos de la escala, y posterior a ello, distribuye los sonidos según las particiones predeterminadas. En el siguiente caso, se le da la instrucción al programa de realizar cuatro particiones [2, 3, 2, 1] lo que implica que, los sonidos que conforman el acorde principal, tendrán el número de elementos que se le ha requerido, los cuales, serán observables en el recuadro (a), los demás recuadros (b, c, d) poseen versiones del acorde según la rotación de las particiones asignadas.

²⁸ Apuntes del Seminario: Matemática Aplicada a la Música; Composición Asistida y Procesamiento de Sonido y Música en Tiempo Real, dirigida por Dr. Pablo Cetta. Doctorado en Música. Universidad Católica de Argentina. 2020.

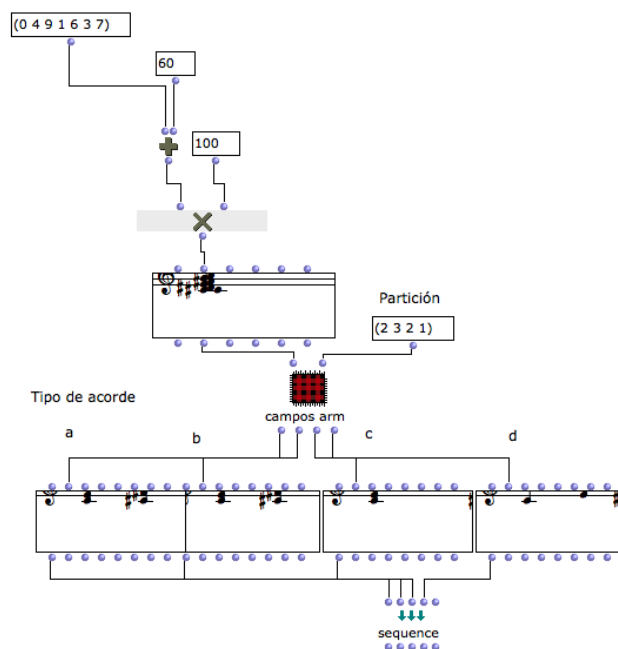


Figura 27. Asistencia de material armónico por OM.

Distribución: a	Distribución: b
Distribución: c	Distribución: d

Tabla 7. Particiones asistidas por OM.

Implementación del material melódico asistido

Para enriquecer la sonoridad, es posible automatizar técnicas de composición como la transposición de alturas. El software asiste este método al ingresar los datos numéricos al programa *s-transform*, que permite cambiar la altura y conservar la estructura interválica interna. Para ello, se debe ingresar el comando (T), junto con el número de transposición que se desea, en este caso [1], siendo este, el valor que será sumado para hacer efectiva

la transposición, de esta manera, si se ingresan los datos [0 4 2], el resultado transpuesto será [1 5 3]. Consecuentemente, el mismo método es implementado en la transposición de acordes²⁹.

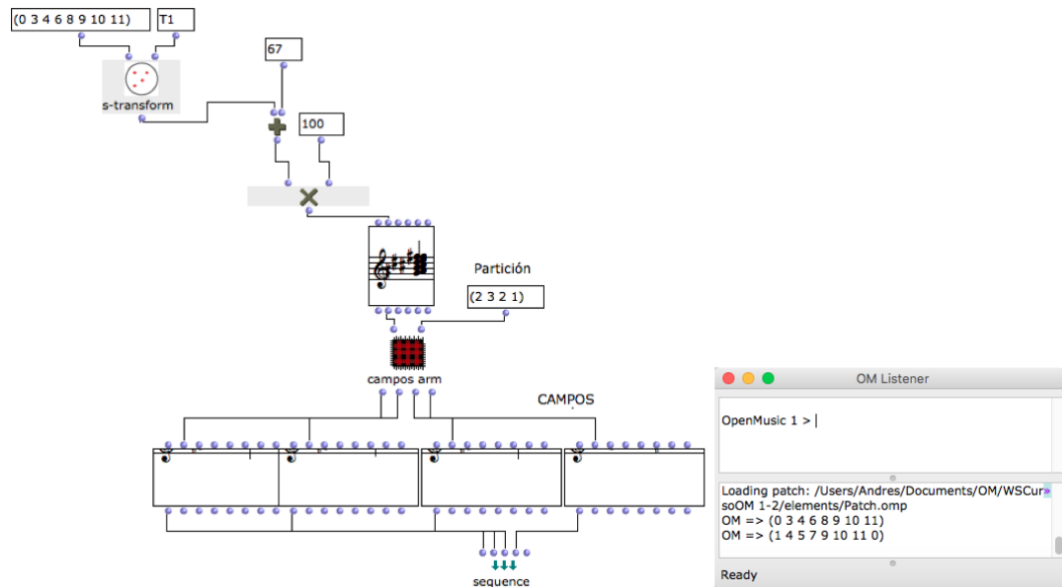


Figura 28. Transposición de alturas asistida por OM.

Escala cuadrada/Cua_T2	
Escala Hexagonal/Hexa_T2	

Tabla 8. Alturas resultantes - Transposición asistida por OM.

Como se ha expuesto anteriormente, el material asistido se limita a obtener escalas y acordes con sus transposiciones, de la misma manera, se asistirán algunos procesos en los

²⁹ Apuntes del Seminario: Matemática Aplicada a la Música; Composición Asistida y Procesamiento de Sonido y Música en Tiempo Real, dirigida por Dr. Pablo Cetta. Doctorado en Música. Universidad Católica de Argentina. 2020.

patrones rítmicos en zonas puntuales de la obra para piano. Es así que, se pretende utilizar la ayuda del software para construir transiciones rítmicas progresivas que lleven el patrón rítmico de un determinado género musical a otro. Si bien, algunos compases están escritos con el ritmo propuesto por el software, es por importante mencionar que, esta intervención no sobre pasa los mismos, puesto que, en mayor medida, el ritmo fue pensado de manera ‘orgánica’, y estructurado según el criterio estético del compositor.

Las transiciones rítmicas se han de realizar con los patrones rítmicos de tres géneros musicales representativos de la región andina colombiana *Bambuco*, *Pasillo* y *Guabina*, en donde, los datos obtenidos del proceso de matematización³⁰ de sus células rítmicas elementales son incrustados en el programa *interpolrit*³¹ que generará un total de cinco variaciones rítmicas, las cuales, son, en teoría, la manera que ha encontrado el software para transformar periódicamente un ritmo *a* en un ritmo *b*.

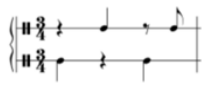
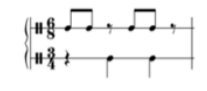
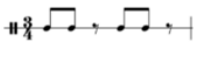
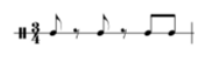
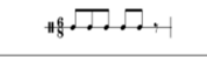
		
		
		
[1 1 0 1 1 0]	[1 0 1 0 1 1]	[1 1 1 1 1 0]

Figura 29. Proceso de matematización de tres patrones rítmicos.

Género musical	Lenguaje Binario	Lenguaje en Open Music
Pasillo	[1 1 0 1 1 0]	(1/8 1/8 -1/8 1/8 1/8 -1/8) ((3 4))
Guabina	[1 0 1 0 1 1]	(1/4 1/4 1/8 1/8) ((3 4))
Bambuco	[1 1 1 1 1 0]	(1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 -1/8) ((6 8)) ((3 4)) ³²

Tabla 9.. Escritura del ritmo predeterminada en OM.

³⁰ Liern Carrión, Vicente. 2019. «Matematización de los ritmos y comparación entre ellos.» Taller de Música y Matemáticas. Manizales, Caldas, Colombia. 41.

³¹ Biblioteca externa de funciones de OpenMusic OMmatrix, proporcionada por el Dr. Pablo Cetta. Apuntes del Seminario: Composición Asistida y Procesamiento de Sonido y Música en Tiempo Real, dirigida por Dr. Pablo Cetta. Doctorado en Música. Universidad Católica de Argentina. 2020. <https://openmusic-project.github.io/libraries.html>

³² Escritura codificada del ritmo predeterminada en la interfaz de *OpenMusic*.

Los datos numéricos de cada uno de los patrones rítmicos son consignados individualmente en las entradas del programa, esto permite al software realizar n transiciones rítmicas que permiten la transformación progresiva de un género musical a otro. En este caso particular, se denotan efectuadas el total de cinco transiciones, partiendo del género musical de *Guabina* (a), al género musical de *Pasillo* (b).

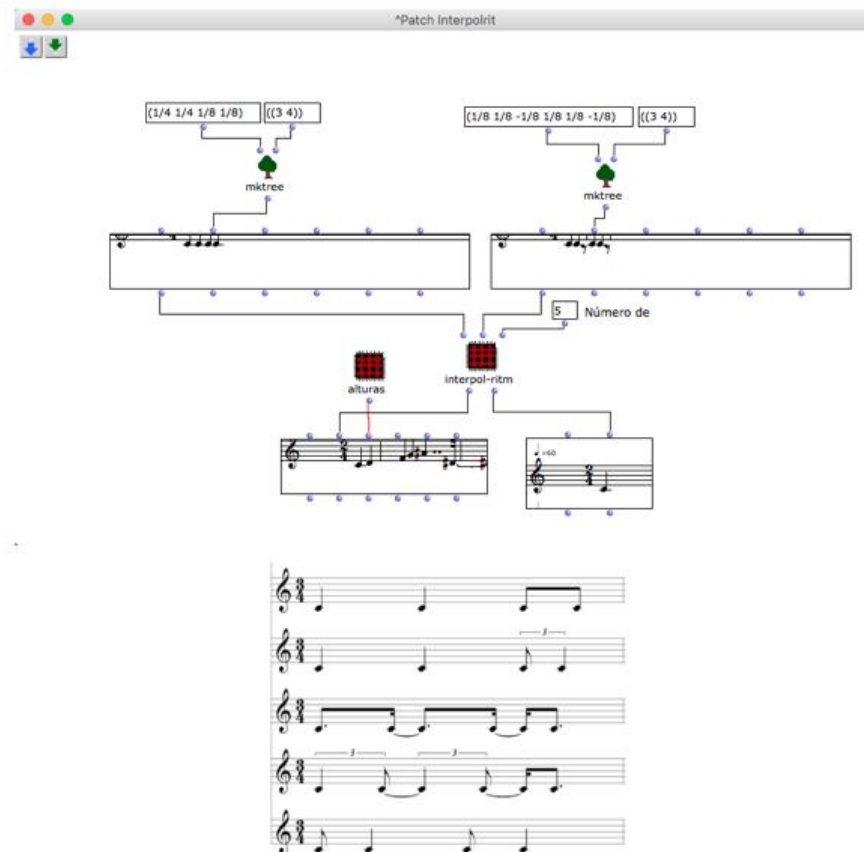


Figura 30. Proceso de interpolización rítmica. Guabina/Pasillo.

Los patrones rítmicos resultantes, son implementados, en primera instancia, como base rítmica de los compases 30 al 34 de la obra para piano, junto a la inclusión de el material melódico y armónico generado anteriormente.



Figura 31. Aplicación del ritmo asistido en la composición musical. Guabina/Pasillo.

De la misma manera, se implementaron transiciones rítmicas entre los demás géneros musicales, para facilitar o suavizar cambios de sección en el grueso de la forma musical de la obra para piano, las mismas se observan desde el compás 42 al 45 (*Pasillo - Bambuco*); y en el compás 82 al 89 (*Bambuco - Guabina*), siendo estos los únicos eventos en donde el ritmo fue generado a través de la intervención del software, los restantes, fueron concebidos explorando directamente con el instrumento.

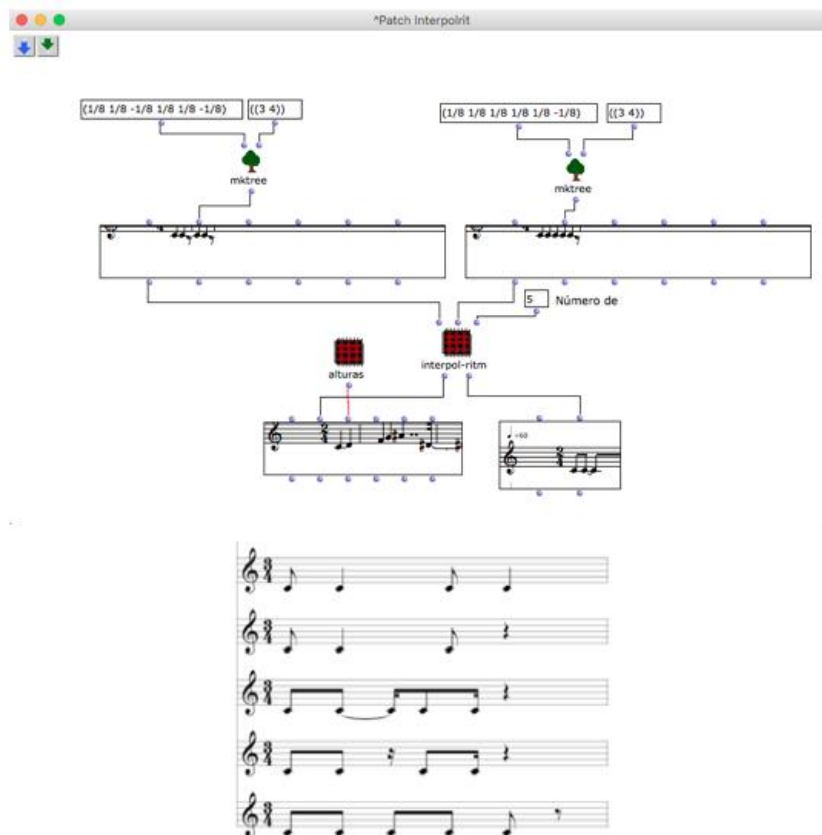


Figura 32. Proceso de interpolización rítmica. Pasillo/Bambuco.



Figura 33. Aplicación del ritmo asistido en la composición musical. Pasillo/Bambuco.

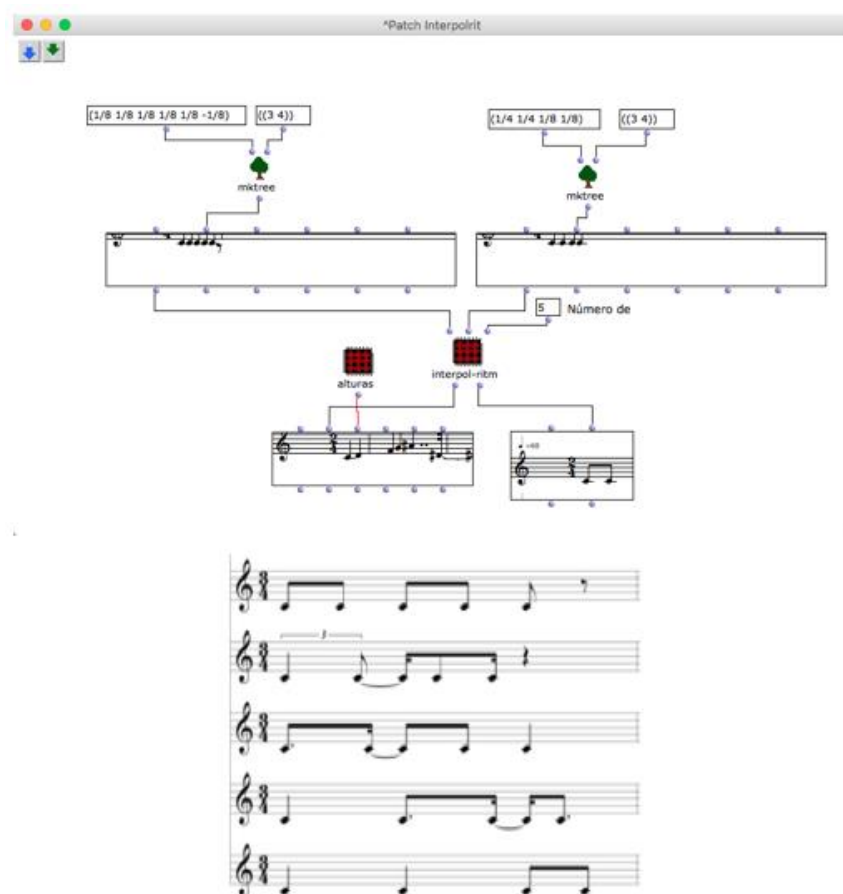


Figura 34. Proceso de interpolación rítmica. Bambuco/Guabina.



Figura 35. Aplicación del ritmo asistido en la composición musical. Bambuco/Guabina.

Exposición de la forma musical resultante

A grandes rasgos, se han consolidado seis escalas y un abanico de acordes que fueron proporcionados gracias a la mediación tecnológica, estos presentan, entre otras características, diverso número de elementos. Por lo tanto, este rasgo distintivo será crucial en la constitución del esquema de la forma musical, puesto que, las escalas que contienen mayor cantidad de elementos, poseen mayor densidad en la percepción auditiva de los acordes, siendo estos, implementados en los puntos de mayor aglomeración rítmica, propiciando mayor consistencia en los acordes y, en consecuencia, mayor claridad en los puntos de *tensión/distensión*, para determinar puntos de clímax y/o en la determinación de secciones.

En el siguiente bosquejo de la forma musical, se analizan las secciones de la obra resultante, se diseñaron convenciones que diferencian los posibles bloques formales que constituyen su estructura interna, siendo las siguientes: *dos secciones principales* (zona celeste y zona naranja) con una corta *introducción* (zona verde) y una *codetta* como sección conclusiva (zona amarilla); siendo esta descripción interpretada como: *forma binaria* (intro - A - A' - codetta).

De manera general, se observa en el grafico que, en la *introducción* y en la *sección A*, las escalas procedentes del T.A. son presentadas o expuestas de manera elemental, posibilitando al oyente tener un primer acercamiento auditivo; en el transcurso de la misma, el material musical es enriquecido a través de la implementación de algunas transposiciones en compases que se especifican y también se implementan en la *sección A'* y en la *codetta*. Así mismo, se encuentran señalizados los lugares en donde intervienen las transiciones o áreas de interpolización (zona blanca).

Convenciones								
Introduccion								
Sección A								
Seccion A'								
Codetta								
Interpolrit.								
Puente								

Compás								
1	Hexa	Cua	Hexa	Penta	Hexa	Cua	Hexa	Penta
9	Tetra					Tri		
17						Com		
25						Hexa_T2_a	Hexa_T2I_d	Hexa_T4_d
33	Hexa_T4I_a	Hexa_T3						Tri_T3_62
41	Tri_T3_62	Tri_T3_a_62	Tri_T3_c_62	Tri_T3_d_62	Tri_T3_b_62	Com_T0_62		
49								
57		Com_62 / Tri						
65						Com_67		
73						Com_a_67	Com_b_67	Com_c_67
81	Com_d_67	Com_d_67	Com_a_67	Com_c_67	Com_b_67	Tetra_T0_60		
89								
97								
105						Hexa_T0_62		
113		Tetra_T0_67						
121						Hexa_T0_62		
129		Penta_T0_62				Trian_T0_62		
137								
145		Hexa					Penta	Tetra
153	Tri					Com		
161								

Figura 36. Esquema de la forma musical y descripción elemental del material musical empleado.

Conclusiones

En el presente texto, se han tomado, aleatoriamente, algunas sucesiones numéricas que proceden del Triángulo Aritmético, las cuales, fueron implementadas como herramienta primordial en el fundamento y el origen de material musical asistido a través de la computadora y que es puesto al servicio de la composición musical.

Es por lo anterior que, al interpretar los datos proporcionados, se obtienen las siguientes conclusiones:

1. La distribución de los elementos que conforman las sucesiones numéricas del T.A. permite constituir escalas musicales que presentan estructuras interválicas propias, las cuales, se han efectuado utilizando técnicas de composición convencional.
2. El software *OpenMusic* se implementa de manera delimitada, direccionando las funciones que ofrece el software a la asistencia del material musical que complementa el proceso de creación musical y al análisis teórico de las escalas resultantes.
3. Las herramientas que proporciona otra disciplina, en este caso, las matemáticas, amplían las posibilidades que ofrece la composición musical, puesto que, se han conformado alturas que han sido ordenadas de acuerdo a los datos proporcionados por cada una de las sucesiones numéricas, que han sido implementadas en la creación, en principio de una pieza para piano solo llamada (T.A.P - T.A.C).

Anexos

La audición de la obra para piano, resultado de esta investigación, puede ser realizada en el siguiente enlace:

<https://on.soundcloud.com/82FmY5kuRRnPthYr8>

También puede ser solicitada su partitura en el siguiente correo electrónico:

andresgarzoncherry@uca.edu.ar

Bibliografía

- Castro Turriago, Jesús. 2016. «Exploring Three Colombian-Andean Folk Style (Danza, Pasillo, and Bambuco): An Analysis and Arrangement of Three Colombian Pieces for Flute and Piano.» Dissertations. 370. The University of Southern Mississippi. August.
- Cetta, Pablo. 2004. *Principios de Estructuración de la Altura Empleando Conjuntos de Grados Cromáticos. Altura-Timbre-Espacio*. Cuaderno de Estudio N°5. IIMCV. Educa.
- Galo Sánchez, Jose R. 2020. «Confruencias en el triángulo de Pascal y el rectángulo de Newton.» *Épsilon - Revista de Educación Matemática* (106): 77-100.
- García Cruz, Juan Antonio, y Antonio Martinón. 1998. «Números poligonales.» Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, España, 3 de Diciembre.
- Hormigón Blázquez, Mariano. 2005. «En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pasca. La transcendencia (II).» *SUMA* (49): 55-62.
- Hormigón Blázquez, Mariano. 2015. «En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La autoría I.» *SUMA* 48: 57-63.
- Hoyos, Jorge Hernán. 2014. «UNA APROXIMACIÓN A LA ESTRUCTURA RÍTMICA DEL PASILLO COLOMBIANO: UN ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA GENERATIVA DE LA MÚSICA TONAL.» *Ricercare*.
- James Stewart, Lothar Redlin, y Saleem Watson. 2012. *Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición*. Brooks & Cole.
- Liern Carrión, Vicente. 2009. «Las matemáticas y la música popular.» *SUMA* 107-113.
- Liern Carrión, Vicente. 2019. «Matematización de los ritmos y comparación entre ellos.» Taller de Música y Matemáticas. Manizales, Caldas, Colombia. 41.
- Martínez Rodríguez, Brian Santiago. 2019. «Composición musical asistida métodos de clasificación difusa.» Valencia - España: Universidad Politécnica de València, 11 de Abril.
- Mesa Betancur, Orlando. 2007. *Triángulo de Pascal en el planteamiento de una situación problema*. Editado por Lorenza Correa Restrepo. Medellín, Colombia.: Universidad de Medellín. Mississippi. August.

- Núñez, Reinaldo. s.f. «ACERCA DEL TRIÁNGULO DE PASCA.» Universidad Sergio Arboleda.
- Ona Ayetebe, Juan Patricio Ondo. 2020. «Curiosidad del número combinatorio (concepto de orden).» *Pensamiento Matemático* X (1).
- Pablo Cetta, y Pablo Di Liscia. 2010. *Elementos de Contrapunto Atonal*. Buenos Aires: Editorial de la Universidad Católica de Argentina.
- Parra Vargas, Diana Milagros. 2015. «Análisis Histótrico-Epistemológico de la Iniciación de la Combinatoria Caso: Combinaciones.» Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.
- Sarmiento, Benjamín, y Felipe Fernandez. 2014. «I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica La Enseñanza y el Aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística.» *Combinatoria para la escuela*. Universidad Pedagógica de Colombia.
- Solache, Cristina Maria. s.f. «Sistema de Tabulación de Coeficientes Binomiales o Triángulo de Pascal: Un Modelo Numérico Rasga el Telar de los Tiempos.» *Divulgaciones Matemáticas* (Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Zulia) 6 (1): 61-68.