

Estudio interdisciplinar sobre modelos matemáticos de similitud aplicados a la música popular colombiana.

Andrés Alfonso Garzón Charry

Resumen

En la actualidad, la investigación multidisciplinar se extiende con mayor fortaleza a los estudios musicales, puesto que, permite realizar observaciones desde diferentes ángulos de conceptos teóricos preestablecidos o la profundización de ellos, fundamentado en los procedimientos y metodologías usadas en otras disciplinas. Es por lo anterior que, en este consolidado se implementan algunos procesos matemáticos que permiten calcular las distancias entre géneros musicales con base en la comparación de sus resultados, los cuales pretenden rastrear, en futuras investigaciones, su posible origen genealógico mediante la interpretación de sus datos.

Palabras Clave: Multidisciplinar, géneros musicales, modelos matemáticos de medición, interpretación de datos, matematización, patrones rítmicos, genealogía.

Abstract

Currently, multidisciplinary research extends with greater impact to musical studies. Since it allows observations from different angles of pre-established theoretical concepts or the deepening of them based on the procedures and methodologies used in other disciplines. It is for the aforementioned that in this consolidated some mathematical processes are implemented that allow calculating the distances between musical genres based on the comparison of their results, which intend to trace. In future investigations their possible genealogical origin through the interpretation of their data.

Keywords: Multidisciplinary, musical genres, mathematical measurement models, data interpretation, mathematization, rhythmic structure, genealogy.

Introducción.

Desde los tiempos de Pitágoras, la Música y las Matemáticas han estado estrechamente relacionadas a tal punto que, durante su proceso a través de la historia, establecieron la postulación de diversas teorías e innumerables conceptos que conllevaron al desarrollo de abundante literatura académica las cuales, y gracias a la articulación entre conceptos, sentaron, en muchos casos, las bases teóricas que permitieron una mejor comprensión de los fenómenos musicales y en otros, han suscitado la inquietud por la exploración de nuevos enfoques en el ejercicio del análisis.

Es así como en este texto, se propone realizar un estudio académico de carácter interdisciplinar, sistematizando algunos patrones rítmicos que puedan ser expresados y analizados a través de modelos matemáticos de similitud que, si bien son ya conocidos en su medio, aun se encuentran en proceso de exploración y aplicación a la práctica musical, y específicamente, en el análisis de las músicas de las Américas.

Para la estructuración de este antecedente, se ha considerado, en primera instancia, la selección de tres géneros musicales que son representativos de la región andina colombiana: *el Pasillo*, *la Guabina* y *el Bambuco*, de los cuales, se extraen sus células rítmicas elementales y que, posterior a su matematización, son sometidas a procesos fundamentados en el estudio de las Distancias ‘Cronotónica’ y de ‘Permutación Dirigida’, que permiten mediante la interpretación de sus datos, ser analizadas desde el punto de vista científico, señalando características puntuales para su posterior clasificación, determinar su posible evolución y establecer diversas conexiones con múltiples géneros musicales.

Este estudio preliminar plantea las bases para implementar conceptos matemáticos a manera de instrumento de análisis en la música folclórica colombiana, calculando sus distancias, proponiendo su posible procedencia, evolución y parentesco con otros géneros musicales y sugiriendo cuales podrían ser los más cercanos entre sí, lo cual permitirá, en el desarrollo de futuras investigaciones, generar una especie de ‘árbol filogenético de géneros musicales’.

1. TIPIFICACIÓN DE LAS CÉLULAS RÍTMICAS ELEMENTALES DEL PASILLO, GUABINA Y BAMBUCO.

En el desarrollo de este primer apartado, se procede a realizar una breve contextualización histórica de los géneros musicales seleccionados. Posterior a ello, y debido a que las variaciones rítmicas de cada género pueden ser innumerables, es indispensable identificar la ‘célula rítmica’¹ básica de cada uno para que el proceso de matematización y de medición adquiera mayor precisión al momento del análisis.

Para el proceso de identificación de cada célula rítmica, se tuvieron en cuenta principalmente estudios desarrollados en el marco del análisis rítmico, priorizando en la figuración recurrente en su ejecución instrumental, descartando así, las variaciones resultantes, sin embargo, es posible encontrar casos en los que el objeto de estudio no cuenta con suficiente bibliografía como para concluir un patrón rítmico básico, para tales casos, se sugiere recurrir a las audiciones y al estudio de la danza y a la marcación que en ella se observa para su determinación.

1.1 Sobre el género de Pasillo.

Descendiente directo del Vals europeo, el *Pasillo* surgió aproximadamente en la primera mitad del siglo XIX, siendo una de las danzas más populares y representativas de la sociedad colombiana², además, fue el símbolo de un imaginario nacionalista, siendo promovido principalmente como música culta que amenizaba los espacios de tertulias y la vida intelectual de aquella época³.

Según (Rodríguez Melo 2016) “desde comienzos de siglo existieron tres modalidades de Pasillo: *el Pasillo Canción, Romántico y Lírico; el Pasillo Rápido, Alegre y Fiestero, de Ocasión y el Pasillo Lento*, siendo los dos últimos de carácter instrumental⁴”, además del

¹ Mínima expresión o patrón rítmico que representa un género musical.

² José Leonardo Ruiz Méndez. s.f. «Breve Reseña del Pasillo Colombiano y Aporte Compositivo.» *Paideia Surcolombiana No. 13* 6.

³ (Rodríguez Melo, MÚSICA NACIONAL: EL PASILLO COLOMBIANO Abril 2016)

⁴ Martha Enna Rodríguez Melo. XXVI, N° 26, 2012. «El bambuco, música "nacional" de Colombia: estre costumbre, tradición inventada y exotismo.» *Revista del Instituto de Investigación Musicológica "Carlos Vega"*.

Pasillo Chocoano, que se desmarca de los anteriores en la forma de ser interpretada la danza; sin embargo, conserva buena parte de los elementos musicales estructurales⁵.

En el marco de sus características rítmicas, *El Pasillo* se escribe generalmente en compas de tres cuartos, no obstante, puede percibirse cierta inestabilidad métrica, ya que en la práctica, los intérpretes realizan abundantes variaciones rítmicas e inesperados cambios en sus acentos. Si se observa su ejecución instrumental, se puede ver claramente los ataques recurrentes, haciendo énfasis principalmente en las corcheas (1), (2), (4) y (5) como se observa en la siguiente ilustración:

Guitarra $\frac{3}{4}$	Guitarra $\frac{3}{4}$
Cucharas $\frac{3}{4}$	Tiple $\frac{3}{4}$
Raspa $\frac{3}{4}$	Tiple $\frac{3}{4}$

Tabla 1 Variaciones rítmicas - Pasillo. Tomado de: (Jaimes Awad 2015)

En síntesis, y según (Hoyos 2014), claramente fluctúan dos planos rítmicos estructuralmente diferentes (melodía y acompañamiento), de los cuales, al estudiar su relación, se establece que el acompañamiento es el plano dominante, siendo el más apropiado el representado por dos grupos de corcheas, por consiguiente, esta figuración se considera la más apropiada como objeto de estudio de este texto, como se ilustra en la imagen continua.⁶

⁵ (Rodríguez Melo, MÚSICA NACIONAL: EL PASILLO COLOMBIANO Abril 2016)

⁶ Jorge Hernán Hoyos. 2014. «UNA APROXIMACIÓN A LA ESTRUCTURA RÍTMICA DEL PASILLO COLOMBIANO: UN ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA GENERATIVA DE LA MÚSICA TONAL.» *Ricercare*.



Figura 1: Célula rítmica básica - Pasillo. Tomado de: (Hoyos 2014).

1.2 Sobre el género de Guabina.

Surgió aproximadamente a principios del siglo XIX, probablemente de la música proveniente del continente europeo, ya que presenta cierto parentesco en su estructura rítmica con el Vals y el *Pasillo*, consecuentemente, su música esta escrita en compás de tres cuartos. Gradualmente esta danza se populariza, siendo censurada por la alta sociedad y prohibida por la Iglesia Católica debido a su forma ‘erótica’ de ser bailada. Es así como posteriormente, los campesinos adoptan y se apropian de este genero desarrollándola y expandiéndola por el territorio colombiano, principalmente en los departamentos de Antioquia, Santander, Huila y Tolima⁷.

La *Guabina*, por lo menos en su etapa inicial, solía ser interpretada principalmente con el acompañamiento del Tiple y la intervención de coplas cantadas por los lugareños; posteriormente, se adicionan otros instrumentos como la Guitarra y la Tambora con variaciones en su formato instrumental según su ubicación dentro de la geografía colombiana. En el texto de (Jaimes Awad 2015), se observa que, los acentos marcados por la Guitarra que se destacan, se encuentran en la segunda negra y la tercera corchea del tercer tiempo del compás⁸, sin embargo, el ritmo acompañante del Tiple complementa el patrón rítmico, puesto que su ejecución se realiza desde el primer tiempo del mismo.

Guitarra	Tiple
<p>Acordes</p> <p>bajos</p>	

Tabla 2 Variaciones rítmicas - Guabina. Tomado de: (Jaimes Awad 2015)

⁷ Renato Paone. 1999. «LA MÚSICA CARRANGUERA.» *Monografía*. Medellín: Escuela Popular de Arte.

⁸ Jaimes Awad, Francisco Elias. 2015. «Bambucos, Pasillos, Guabinas y Valses con elementos modales.» Bucaramanga: Facultad de Música, Universidad Autónoma de Bucaramanga.

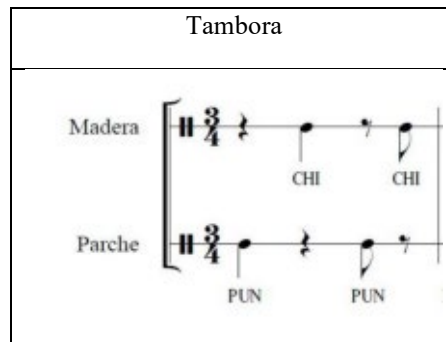


Tabla 3. Ritmo de Guabina. Tomado de: (Mírquez Céspedes)⁹

Al relacionar los patrones rítmicos procedentes de los instrumentos musicales que intervienen, se expone que la estructura rítmica elemental más representativa de la *Guabina* es un compás de tres cuartos en donde están incrustadas dos negras y dos corcheas¹⁰ como se ilustra a continuación:



Figura 2: Célula rítmica básica – Guabina. Tomado de: (Vásquez Rojas 2017).

1.3 Sobre el género de Bambuco.

Es uno de los géneros musicales más representativos de Colombia, entre otros aspectos, porque ha trascendido desde contextos patrióticos y políticos como la victoria del general colombiano José María Córdova en la batalla de Ayacucho, hasta cruzar las fronteras de la poesía y la pintura con importantes referentes como: Rafael Pombo y Ramón Torres Méndez, respectivamente¹¹.

⁹ Mírquez Céspedes, David Alberto. «Cartilla de Iniciación a la Tambora Tolimense.» Ministerio de Cultura.

¹⁰ Efraín Franco Arbelaez, Néstor Lambuley Alferez, y Jorge E. Sossa Santos. 2008. *Músicas Andinas de Centro Oriente - Cartilla de iniciación musical*. Bogotá: ACODEM - Ministerio de Cultura.

Carlos Mario Vásquez Rojas. 2017. *Entre Cuerdas "De tiple" Cartilla 1 Guía profesor*. Bogotá: República de Colombia - Ministerio de Cultura.

¹¹ Martha Enna Rodríguez Melo. XXVI, N° 26, 2012. «El bambuco, música "nacional" de Colombia: este constumbre, tradición inventada y exotismo.» *Revista del Instituto de Investigación Musicológica "Carlos Vega"*.

Su origen tri-étnico¹² influyó determinadamente en la riqueza rítmica y hace que presente elementos polimétricos donde convergen las métricas de seis octavos y tres cuartos, siendo usada en la práctica la más conveniente¹³. De la misma manera, este género es rico en variaciones rítmicas, principalmente en la intervención de la guitarra y el tiple, sobresaliendo el acento en la negra al final del compás y el silencio en el inicio del mismo¹⁴.

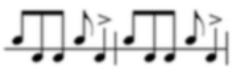
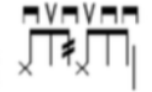
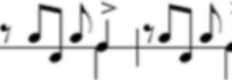
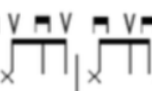
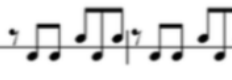
Guitarra $\frac{6}{8}$		Tiple $\frac{6}{8}$	
Guitarra $\frac{6}{8}$		Tiple $\frac{6}{8}$	
Guitarra $\frac{6}{8}$			

Tabla 4 Variaciones rítmicas - Bambuco. Tomado de: (Jaimes Awad 2015)

Consecuentemente, en este texto se tomará como referencia el estudio sobre la escritura del *Bambuco* realizado por (Sánchez Suárez 2009), en donde se plantea como patrón básico la siguiente célula rítmica proveniente de su ejecución en la Tambora¹⁵ puesto que este instrumento genera la base rítmica fundamental para su interpretación, tal y como se expone a continuación:

¹² Mestizo y Negro (antes de la república), Blanco (después de la república).

Sergio A. Sánchez Suárez, 2009. «Reflexión histórica de las formas de la escritura musical del bambuco, entre colonialismo y la república en Colombia.» *Música, cultura y pensamiento - Facultad de Educación y Artes del Conservatorio del Tolima. Vol. 1* 115.

¹³ Jesús Castro Turriago. 2016. «Exploring Three Colombian-Andean Folk Style (Danza, Pasillo, and Bambuco): An Analysis and Arrangement of Three Colombian Pieces for Flute and Piano.» *Dissertations. 370. The University of Southern Mississippi*. August.

¹⁴ Jaimes Awad, Francisco Elías. 2015. «Bambucos, Pasillos, Guabinas y Valses con elementos modales.» Bucaramanga: Facultad de Música, Universidad Autónoma de Bucaramanga.

¹⁵ Tambora: Membranófono de percusión de doble membrana, con remos golpeadores hecha con madera de

Iguá (árbol sagrado). Social, Convenio: Artesanías de Colombia - CORUNIVERSITARIA-SENA-Fundación.

s.f. *Nataga – Instrumentos musicales autóctonos hechos a mano*. Ibagué - Tolima: (PYME).

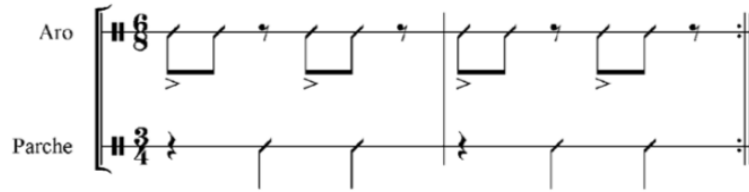


Figura 3: Célula rítmica básica - Bambuco. Tomado de: (Sánchez Suárez 2009)

2. MATEMATIZACIÓN DE LAS CÉLULAS RÍTMICAS PROVENIENTES DE LOS GÉNEROS MUSICALES DE PASILLO, GUABINA Y BAMBUCO.

Una vez hallada la célula o patrón rítmico característico del género musical a estudiar, se realiza posteriormente, el proceso de transcripción (matematización) desde la escritura musical convencional, al lenguaje matemático. En primera instancia, se recurre a identificar los acentos o ataques que están distribuidos en la figuración según su ritmo, por ejemplo: La distribución de la célula rítmica básica del *Pasillo* se encuentra en los tiempos (1, 2, 4 y 5) o bien [x x . x x .]¹⁶, para luego ser transcritos mediante (TUBS)¹⁷ como se expone en la siguiente tabla:

Célula o patrón rítmico	
Distribución de los acentos o ataques	
Representación (TUBS)	
Patrón rítmico matematizado.	[1 1 0 1 1 0]

Tabla 5: Matematización - Pasillo

¹⁶ Toussaint, Godfried. 2002. «A Mathematical Analysis of African, Brazilian and Cuban Clave Rhythms.» *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*. Towson: Towson University, 27-29 de July.

¹⁷ “*Time Unit Box System*” es un metodo de escritura para percusionistas desarrollado por Philip Harland en la Universidad de California en 1962 (Toussaint 2002)

De esta manera y según el proceso realizado anteriormente, se obtiene como resultado una secuencia binaria de (6) dígitos que representan (6) pulsos, de los cuales (4) en el presente texto se les denominará: ‘fuertes’ y los restantes: ‘débiles’. Este mismo proceso será aplicado a las células rítmicas básicas de: *Guabina* y *Bambuco*, respectivamente, en las siguientes tablas.

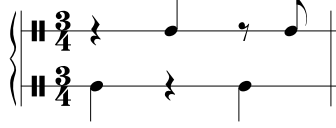


Célula o patrón rítmico	
Distribución de los acentos o ataques	
Representación (TUBS)	
Patrón rítmico matematizado.	[1 0 1 0 1 1]

Tabla 6: Matematización - Guabina

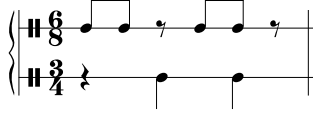


Célula o patrón rítmico	
Distribución de los acentos o ataques	
Representación (TUBS)	
Patrón rítmico matematizado.	[1 1 1 1 1 0]

Tabla 7: Matematización – Bambuco

3. APROXIMACIÓN A LOS MODELOS MATEMÁTICOS DE SIMILITUD Y SU APLICACIÓN MUSICAL.

Según Díaz-Bañez, estos procesos son de utilidad ya que aportan a una posible “interpretación científica sobre el origen y evolución de las músicas de tradición oral¹⁸”, tomando como base el ‘análisis de similitud musical’¹⁹ que interpreta datos los cuales, permiten calcular las distancias existentes entre dos objetos de estudio. En el presente texto se implementarán las denominadas: ‘Distancia Cronotónica y Distancia de Permutación’²⁰ a las secuencias binarias resultantes del proceso de anterior.

3.1 Sobre la distancia cronotónica.

También conocida como ‘Notación Cronotónica’, consiste en la construcción de matrices bidimensionales denominadas (TEDAS)²¹ las cuales son alimentadas por la información procedente de la serie binaria resultante del proceso de transcripción (matematización); de esta manera, se visualiza el proceso temporal y de ataque musical de un determinado patrón rítmico.

La disposición de la matriz dependerá sustancialmente de los ataques que marcan la dinámica del ritmo, es decir, se deberá realizar grupos entre cada dos ataques y representarlos mediante cajas²². Este proceso es el que devela y visualiza la información temporal que permitirá su posterior medición con otros semejantes, por ejemplo: Dada la secuencia binaria del *Pasillo* (p) = [1, 1, 0, 1, 1, 0] se procede a realizar el agrupamiento

¹⁸ José Miguel Díaz-Bañez. (2013). «sobre problemas de matemáticas en el estudio del cante flamenco.» *La Gaceta de la RSME, Vol. 16* 513-541.

¹⁹ Área de la investigación musical donde se calcula la similitud de dos interpretaciones de un ritmo. (Díaz-Bañez (2013))

²⁰ Jose Miguel Díaz-Bañez, Giovanna Farigu, Francisco Gómez, David Rappaport, y Godfried Toussaint. s.f.

«Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión de la matemática computacional.» *La Gaceta* 490-509.

²¹ TEDAS (Temporal Elements Displaying As Squares), representan la medición temporal del sonido. K. Gustafson lo propuso, en principio para implementarlo en el estudio del lenguaje. Gustafson, Kjell. 1987. «A

new method for displaying speech rhythm, with illustrations from some Nordic Languages.» *Nordic Prosody*

IV. Papers from a symposium Edited by Kirsten Gregersen and Hans Basboll. Odense.

²² Jose Miguel Díaz-Bañez, Giovanna Farigu, Francisco Gómez, David Rappaport, y Godfried Toussaint. s.f.

«Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión de la matemática computacional.» *La Gaceta* 490-509.

de sus dígitos según sus ataques para hallar sus intervalos²³, dando como resultado los siguientes: [1], [1 0], [1], [1 0]. De esta manera, se ultima que los datos hallados serán representados mediante cajas de las siguientes proporciones: 1 x 1; 2 x 2; 1 x 1; 2 x 2, respectivamente²⁴. Este mismo proceso se implementará con los géneros de *Guabina* y *Bambuco* como se expone a continuación.

(p) = [1, 1 0, 1, 1 0]	(g) = [1 0, 1 0, 1, 1]
Intervalos: [1] [1 0] [1] [1 0]	Intervalos: [1 0] [1 0] [1] [1]
(b) = [1, 1, 1, 1, 1, 1 0]	
Intervalos: [1] [1] [1] [1] [1 0]	

Tabla 8: Representación TEDAS - Pasillo (p), Guabina (g), Bambuco (b).

Habiendo representado los géneros musicales colombianos de *Pasillo*, *Guabina* y *Bambuco* en tres matrices (TEDAS), se procede a superponerlas en sus áreas con el propósito de calcular el área de ‘disimilitud’²⁵. ¿Cómo se calcula la distancia existe entre dos ritmos mediante este método? Simplemente, se debe medir el área de disimilitud²⁶; así, por ejemplo: al superponer las matrices de *Pasillo* y *Guabina*, se cuenta cuatro cajas

²³ Espacio temporal entre acentos (ataques). José Miguel Díaz-Báñez. (2013). «sobre problemas de matemáticas en el estudio del cante flamenco.» *La Gaceta de la RSME*, Vol. 16, pp.519.

²⁴ Vicente Liern Carrión. 2009. «Las matemáticas y la música popular.» *SUMA* 107-113.

²⁵ Godfried Toussaint. 2006. «A Comparison of Rhythmic Dissimilarity Measures.» 129-149.

²⁶ José Miguel Díaz-Báñez. (2013). «sobre problemas de matemáticas en el estudio del cante flamenco.» *La*

Gaceta de la RSME, Vol. 16 513-541.

individuales en las que difiere un ritmo con el otro, por ende, la ‘Distancia Cronotónica’ entre estos ha de ser $(4)^{27}$. Asimismo, se calcula la distancia existente entre los demás objetos de estudio, dando como resultado: entre la *Guabina* y el *Bambuco* igual a (6), y entre *Pasillo* y *Bambuco* igual a (2).

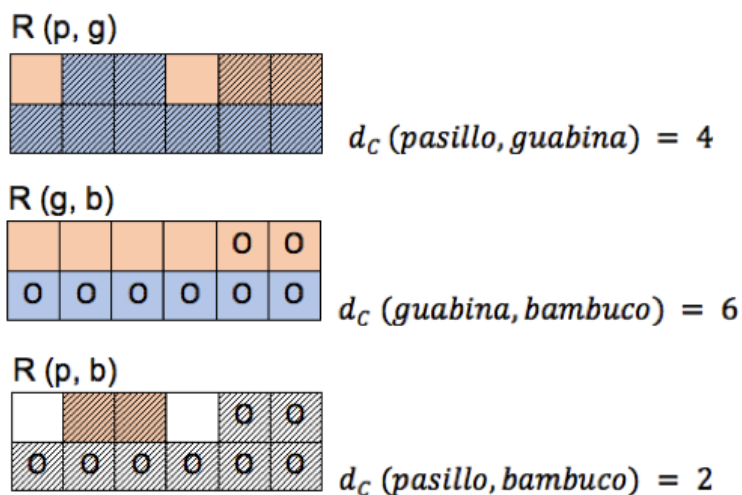


Figura 4: Área de disimilitud - Distancia Cronotónica - Ritmos de Pasillo, Guabina y Bambuco

3.2 Sobre la distancia de permutación y permutación dirigida.

Consiste en calcular el número mínimo de posibles intercambios de elementos que permitan transforman un patrón rítmico a otro. Para ello se plantean dos posibilidades: La primera de ellas se denomina ‘Distancia de Permutación’ o también conocida como *The Hamming Distance*²⁸, la cual consiste en que cada secuencia binaria es representada como un vector $X = (x_1, x_2, x_3 \dots x_6)$ posteriormente, se identifica la posición de los vectores en el interior de la secuencia para finalmente calcular su disimilitud. Para ello se puede comprobar mediante las secuencias binarias de *Pasillo* y *Guabina*, ya que presentan igual número de ceros y unos²⁹.

²⁷ Vicente Liern Carrión. 2009. «Las matemáticas y la música popular.» *SUMA* 107-113.

²⁸ Expone que las dos secuencias binarias deben poseer el mismo número de elementos (unos y ceros). José Miguel Díaz-Báñez. (2013). «sobre problemas de matemáticas en el estudio del cante flamenco.» *La Gaceta de la RSME, Vol. 16* 513-541.

²⁹ Godfried Toussaint. 2006. «A Comparison of Rhythmic Dissimilarity Measures.» 129-149.

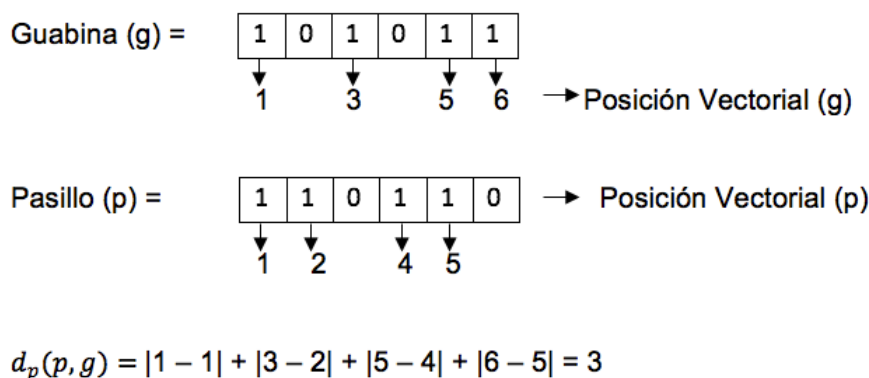


Figura 5: Área de disimilitud - Distancia de Permutación – Ritmos de Pasillo, Guabina y Bambuco.

La segunda posibilidad hace referencia a la generalización del concepto de ‘Distancia de Permutación’ al de ‘Distancia de Permutación Dirigida’³⁰, esta ocurre cuando los ritmos no tienen la misma cantidad de ataques y, por lo tanto, tampoco la misma cantidad de ceros y unos. Según Díaz-Báñez, para realizar este proceso se tienen en cuenta las siguientes pautas³¹:

1. El proceso inicia desde la secuencia con mayor cantidad de ataques, en este caso es el *Bambuco*.
2. Los ataques deben moverse individualmente del mayor al de menor cantidad de ataques.
3. Los ataques de la cadena de menor cantidad de ataques han de recibir al menor un ataque de la cadena mayor.
4. El proceso se limita hasta su último ataque, es decir, no es cíclico.

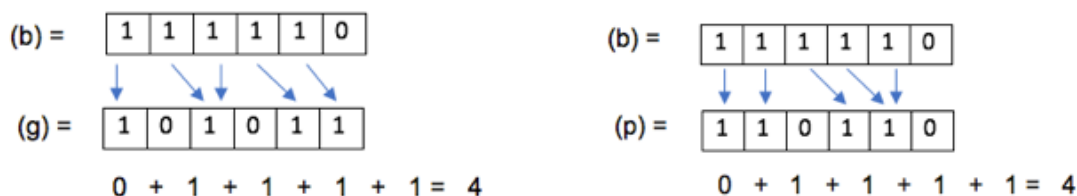


Figura 6: Área de disimilitud - Distancia de Permutación dirigida - Ritmos de Pasillo, Guabina y Bambuco

³⁰ Vicente Liern Carrión. 2009. «Las matemáticas y la música popular.» *SUMA* 107-113.

³¹ José Miguel Díaz-Báñez. (2013). «sobre problemas de matemáticas en el estudio del cante flamenco.» *La Gaceta de la RSME, Vol. 16* 513-541.

En este punto del proceso, se han obtenido datos que son resultado del cálculo realizado mediante dos métodos diferentes de medición, siendo consignados en la siguiente tabla:

	Pasillo		Guabina		Bambuco	
Pasillo	0	0	4	3	2	4
Guabina	4	3	0	0	6	4
Bambuco	2	4	6	4	0	0
Distancia:	A	B	A	B	A	B

A = Distancia: Cronotónica

B = Distancia: Permutación y de permutación dirigida

Tabla 9: Consolidado de datos - Distancia Cronotónica y Distancia de Permutación.

4. INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS.

Ante todo, es crucial recordar que la ‘Distancia Cronotónica’ y la ‘Distancia de Permutación’ son dos modelos de medición que llevan a cabo procesos diferentes, por lo tanto, los datos provenientes de ellos deben ser interpretados (por lo menos en esta instancia) sin relacionarse entre sí. La ‘Distancia Cronotónica’ es, en concreto, una especie de ‘fotografía’ del patrón rítmico, que solo son comparables al superponer sus áreas entre sí para develar sus discrepancias o similitudes. Por el contrario, la ‘Distancia de Permutación’ es dinámica, puede definirse como una especie de transformación progresiva que debe tener un ritmo para llegar a otro, por tal motivo el método de medición ha de ser diferente, ya que los datos dependen de ‘cuantos cambios debe hacer un ritmo para transformarse en otro³²’.

³² Liern Carrión, Vicente. 2019. «Matematización de los ritmos y comparación entre ellos.» *Taller de Música y Matemáticas*. Manizales, Caldas, Colombia. 41.

5. CONCLUSIONES.

Este texto ha sido, en concreto, un estudio preliminar en donde se han expuesto algunos métodos matemáticos de similitud y su aplicación a tres géneros musicales colombianos, sin embargo, es posible ampliar sus fronteras hacia el propósito principal por el cual, según plantea V. Liern, se realizan este tipo de análisis interdisciplinarios: “estudiar las posibles relaciones genealógicas entre dos distintos patrones rítmicos³³” implementando representaciones geométricas y la técnica de *SplitTree*³⁴.

Al interpretar el consolidado de datos se obtienen las siguientes conclusiones:

En el marco de la ‘Distancia Cronotónica’:

- Al expresarse que: la $d_c(\text{pasillo}, \text{bambuco}) = 2$; se interpreta que estos son los ritmos de mayor similitud ya que, la distancia existente entre ellos es menor que la existente entre $d_c(\text{pasillo}, \text{guabina}) = 4$. Finalmente, la mayor distancia arrojada es la que consta entre $d_c(\text{guabina}, \text{bambuco}) = 6$; por consiguiente, estos últimos son los ritmos de menor similitud en sus áreas.

Así mismo, en el marco de la ‘Distancia de Permutación’, se observa que:

- Los ritmos de mayor equivalencia corresponden a: $d_p(\text{pasillo}, \text{guabina}) = 3$, ya que su distancia es menor que las existentes entre: $d_{pD}(\text{bambuco}, \text{guabina}) = 4$ y $d_{pD}(\text{bambuco}, \text{pasillo}) = 4$.

³³ Vicente Liern Carrión. 2009. «Las matemáticas y la música popular.» *SUMA* 107-113.

³⁴ Representación gráfica que visualiza la distancia de los nodos o patrones de dos ritmos. (Liern Carrión, Las matemáticas y la música popular 2009). <http://www.splitstree.org>

6. BIBLIOGRAFÍA.

- Castro Turriago, Jesús. 2016. «Exploring Three Colombian-Andean Folk Style (Danza, Pasillo, and Bambuco): An Analysis and Arrangement of Three Colombian Pieces for Flute and Piano.» *Dissertations. 370. The University of Southern Mississippi.* August.
- Díaz-Báñez, Jose Miguel, Giovanna Farigu, Francisco Gómez, David Rappaport, y Godfried Toussaint. s.f. «Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión de la matemática computacional.» *La Gaceta* 490-509.
- Díaz-Báñez, José Miguel. (2013). «sobre problemas de matemáticas en el estudio del cante flamenco.» *La Gaceta de la RSME, Vol. 16* 513-541.
- Franco Arbelaez, Efraín, Néstor Lambuley Alferez, y Jorge E. Sossa Santos. 2008. *Músicas Andinas de Centro Oriente - Cartilla de iniciación musical.* Bogotá: ACODEM - Ministerio de Cultura.
- Gustafson, Kjell. 1987. «A new method for displaying s (Jaimes Awad 2015)peech rhythm, with illustrations from some Nordic Languages.» *Nordic Prosody IV. Papers from a symposium Edited by Kirsten Gregersen and Hans Basboll.* Odense.
- Hoyos, Jorge Hernán. 2014. «UNA APROXIMACIÓN A LA ESTRUCTURA RÍTMICA DEL PASILLO COLOMBIANO: UN ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA GENERATIVA DE LA MÚSICA TONAL.» *Ricercare.*
- Jaimes Awad, Francisco Elias. 2015. «Bambucos, Pasillos, Guabinas y Valses con elementos modales.» Bucaramanga: Facultad de Música, Universidad Autónoma de Bucaramanga.
- Mirquez Céspedes, David Alberto. «Cartilla de Iniciación a la Tambora Tolimense.»
- Liern Carrión, Vicente. 2009. «Las matemáticas y la música popular.» *SUMA* 107-113.
- Liern Carrión, Vicente. 2019. «Matematización de los ritmos y comparación entre ellos.» *Taller de Música y Matemáticas.* Manizales, Caldas, Colombia. 41.
- Paone, Renato. 1999. «LA MÚSICA CARRANGUERA.» *Monografía.* Medellín: Escuela Popular de Arte.
- Rodríguez Melo, Martha Enna. Abril 2016. «MÚSICA NACIONAL: EL PASILLO COLOMBIANO.»
- Rodríguez Melo, Martha Enna. XXVI, N° 26, 2012. «El bambuco, música "nacional" de Colombia: este constumbre, tradición inventada y exotismo.» *Revista del Instituto de Investigación Musicológica "Carlos Vega".*
- Ruiz Méndez, José Leonardo. s.f. «Breve Reseña del Pasillo Colombiano y Aporte Compositivo.» *Paideia Surcolombiana No. 13* 6.

- Sánchez Suárez, Sergio A. 2009. «Reflexión histórica de las formas de la escritura musical del bambuco, entre colonialismo y la república en Colombia.» *Música, cultura y pensamiento - Facultad de Educación y Artes del Conservatorio del Tolima. Vol. 1* 115.
- Social, Convenio: Artesanías de Colombia - CORUNIVERSITARIA-SENA-Fundación. s.f. *Nataga - Instrumentos musicales autóctonos hechos a mano*. Ibagué - Tolima: (PYME).
- Toussaint, Godfried. 2002. «A Mathematical Analysis of African, Brazilian and Cuban Clave Rhythms.» *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*. Towson: Towson University, 27-29 de July.
- Toussaint, Godfried. 2006. «A Comparison of Rhythmic Dissimilarity Measures.» 129-149.
- Vásquez Rojas, Carlos Mario. 2017. *Entre Cuerdas "De tiple" Cartilla 1 Guía profesor*. Bogotá: República de Colombia - Ministerio de Cultura.