Preprint. Versión final en prensa en *Éndoxa*

LA DOBLE PERSPECTIVA TÉCNICA Y FILOSÓFICA DE LEIBNIZ ACERCA DE LOS INFINITESIMALES: UN CAMINO HACIA LA IDEALIDAD DE LO MATEMÁTICO*

LEIBNIZ'S DOUBLE PHILOSOPHICAL AND TECHNICAL PERSPECTIVE CONCERNING INFINITESIMALS: A PATH TOWARDS THE IDEALITY OF MATHEMATICAL OBJECTS

Oscar M. Esquisabel
CEFHIC UNQ-CONICET / UCA, Argentina**
Federico Raffo Quintana
UCA-CONICET, Argentina***

Resumen: Este trabajo examina la cuestión de la ficcionalidad de las cantidades infinitas e infinitamente pequeñas desde el punto de vista de la idealidad de lo matemático. Sostiene la hipótesis de que ya hacia 1676 Leibniz despliega argumentos que tienden a establecer una separación entre él ámbito de lo matemático y el de la realidad concreta, afectando dicha escisión especialmente al estatus de las ficciones matemáticas. De esta forma, se inicia así una línea de desarrollo que culminará en el pensamiento maduro de Leibniz a formular su concepción de la separación entre lo ideal y lo real.

Palabras clave: ficción / infinito / infinitesimales / idealidad / realidad / Leibniz

Abstract: This work examines the issue of the fictionality of the infinite and infinitely small quantities from the point of view of the ideality of the mathematical objects. It maintains the hypothesis that already around 1676 Leibniz deployed arguments that established a separation between the fields of mathematics and that of concrete reality and that this split especially affects the status of mathematical fictions. In this way, a line of development begins that culminates later in Leibniz's conception about the distinction between the ideal and the real.

Key words: fiction / infinite / infinitesimals / ideality / reality / Leibniz

---

* Trabajo realizado en el marco de los proyectos "La Ciencia General de Leibniz como fundamentación de las ciencias: lógica, ontología y filosofía natural" (ANPCyT PICT-2017-0506) y "Resultados de imposibilidad en geometría: perspectivas históricas y semánticas" (ANPCyT PICT-2017-0443).
** Calle 78 n° 970, La Plata, Buenos Aires, Argentina – omesqui@fibertel.com.ar
*** Sarmiento 1032, San Fernando, Buenos Aires, Argentina – federq@gmail.com

1. Introducción

En este trabajo trataremos de mostrar que la concepción de la ficcionalidad de las cantidades infinitas e infinitamente pequeñas sostenida por Leibniz al menos desde 1676 está enmarcada en una consideración más amplia, aunque todavía incipiente, acerca de la naturaleza de lo matemático en general, cuya consecuencia es que en la realidad no hay nada que posea, en sentido estricto, las propiedades de los objetos matemáticos. En este sentido, el examen de los textos hará evidente que, a partir del año señalado, Leibniz desarrolla argumentaciones que tienen la finalidad de probar que lo físico y lo matemático, dentro de lo cual incluimos también las ficciones matemáticas, pertenecen en cada caso a dominios de objetos con propiedades muy distintas. De esta manera, podría decirse que comienza en este período un camino en el pensamiento leibniziano que años más tarde, tras ulteriores reflexiones, desembocará en la distinción entre el ámbito de lo real y el de lo ideal.

Como hipótesis que subyace a nuestro objetivo general, sostenemos que se puede hallar una muestra palpable de este nuevo enfoque leibniziano acerca de la naturaleza de lo matemático en la manera como Leibniz fundamentó la introducción de conceptos infinitarios en matemática. En efecto, en dicha fundamentación pueden distinguirse dos niveles: por un lado, hay un conjunto de razones técnicas que apuntan a la práctica matemática en cuanto tal, en la medida en que se trata de la prueba de teoremas y la solución de problemas matemáticos. Por otro lado, encontramos argumentaciones de carácter epistemológico y metafísico u ontológico, que se desarrollan en forma paralela a sus investigaciones en el ámbito de la matemática infinitaria. Para mencionar un par de ejemplos, que ampliaremos más adelante, Leibniz ensaya una fundamentación epistemológica para la introducción de infinitos e infinitamente pequeños como ficciones útiles, así como también plantea consideraciones ontológicas acerca de si hay o no en la naturaleza cantidades infinitas e infinitamente pequeñas. Ambas cuestiones, por supuesto, están estrechamente interconectadas, en el sentido de que, si hay buenos argumentos para no aceptar la existencia de cantidades infinitas o infinitamente pequeñas *reales*, tiene que haber al menos alguna buena razón para introducirlas en el tratamiento de las cuestiones matemáticas. Asimismo, estas las reflexiones de Leibniz sobre estas cuestiones se dan en el marco, más general, de los problemas que se plantean en torno de la relación existente entre el conocimiento matemático en cuanto tal y la realidad «actual» o «efectiva» de los objetos físicos. Aunque en el período que estamos abordando este problema no se halla completamente resuelto, se ve claramente cómo se trazan algunas líneas de pensamiento que convergirán posteriormente en la concepción leibniziana acerca de la idealidad de lo matemático.

Sea de ello lo que fuere, es el mismo Leibniz quien se ocupa de advertir la necesidad de distinguir entre las cuestiones técnicas, propiamente matemáticas, y los aspectos filosóficos de la matemática infinita, en una actitud característica de Leibniz, para quien las discusiones teóricas o de fundamento «filosófico» no deben entorpecer el desarrollo de la matemática como disciplina y como práctica.[1] Esta actitud es manifiesta, por ejemplo, en el tratado *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae* (de aquí en más, DQA). En efecto, en la Proposición 11 de este escrito, en relación con la introducción de líneas infinitamente pequeñas y líneas infinitas terminadas, Leibniz sostiene:

> En cambio, denomino infinita una cantidad, ya sea terminada o interminada, siempre que entendamos que es mayor que cualquier cantidad que podamos asignar, es decir, que sea numéricamente designable. Ahora bien, es una cuestión reservada al metafísico discurrir acerca de si la naturaleza de las cosas tolera esta clase de cantidades. Al geómetra le basta demostrar qué es lo que se sigue de suponer cosas tales. (A VII 6 549, nota. Cfr. Esquisabel, 2019)

Nuestra exposición se organiza en dos partes principales: en primer lugar pasaremos revista a algunos de los desarrollos técnicos que Leibniz elaboró en materia de cuadraturas a finales del período parisino para luego poder concentrarnos en los aspectos de carácter más bien filosófico. De esta manera, se verá la razonabilidad de sostener que se dan dos niveles de fundamentación en lo que respecta a la introducción de conceptos infinitarios. Al mismo tiempo, el examen de las cuestiones propiamente filosóficas, epistémicas y metafísicas, nos conducirá a la cuestión de la ficcionalidad de los objetos infinitarios y, por

[1] Para un tratamiento de las conexiones entre el concepto de infinitesimal y las cuestiones metafísicas en el Leibniz maduro, cfr. de Mora Charles 2012, 211-216.

encima de ella, a los inicios de la concepción leibniziana acerca de la idealidad de lo matemático. Mostraremos, así, que ya desde 1676 Leibniz concibe la uniformidad de los objetos geométricos como un producto de la actividad mental, al tiempo que rechaza la existencia de cosas perfectamente uniformes en la realidad. Del mismo modo, veremos que Leibniz introduce una distinción entre aquellas cosas que constituyen un todo y las que constituyen un agregado, anticipándose así a lo que más adelante será la distinción entre lo real y lo ideal. En efecto, Leibniz sostendrá que las cosas que constituyen un todo son continuas y homogéneas, mientras que las cosas agregadas implican discontinuidad y variedad. Finalmente, en tercer lugar, esbozaremos los argumentos que llevaron a Leibniz a negar que en la naturaleza haya líneas infinitas terminadas y cosas infinitamente pequeñas. En nuestra opinión, Leibniz da con estos argumentos un paso adicional en el camino hacia la idealidad de lo matemático.

2. Aspectos técnicos

Entre los resultados más destacables de los desarrollos técnicos de Leibniz en el dominio de la matemática infinita se encuentra el método infinitesimal para cuadraturas de curvas que, en su parte más importante, elaboró durante su estancia en París y que tiene su expresión más sistemática en el tratado inédito DQA, cuya versión presumiblemente definitiva data de mediados de 1676 (A VII 6, n°. 51). No es nuestra intención examinar detalladamente aquí este complejo tratado, que ha recibido la atención de los investigadores en los últimos años Al respecto, cabe mencionar el trabajo pionero de Scholz (1934), en el que se muestra el rigor del método leibniziano. Más recientemente, E. Knobloch (2002) ha presentado una versión renovada de este enfoque, del cual puede verse una síntesis en Esquisabel (2019), mientras que Raffo Quintana ha mostrado la importancia del tratado para las reflexiones de Leibniz sobre la composición del continuo durante el período de París (2019). Dado que la intención de este trabajo es mostrar que en los escritos filosóficos se pueden encontrar fundamentos teóricos y conceptuales de los desarrollos técnicos, en esta sección nos limitaremos a señalar esquemáticamente algunos aspectos del método de Leibniz en relación con los cuales, en la sección siguiente, se expondrán las cuestiones de fundamento.

En buena medida, la novedad fundamental del tratamiento leibniziano de las cuadraturas radica en haber desarrollado un método geométrico de resolución de problemas que superaba los defectos o limitaciones de otros procedimientos que ya eran bien conocidos en el siglo XVII, como, por ejemplo, el método de los indivisibles de Cavalieri, para nombrar uno de los más destacados (para el método de los indivisibles en el siglo XVII, ver Jullien, 2015) y que asimismo permitía obtener demostraciones más sencillas que las que pueden obtenerse mediante el método de Arquímedes, que apela a la reducción al absurdo. Aunque no lo desarrollaremos aquí, vale la pena aclarar que el concepto de «demostración» leibnziano es mucho más amplio que el que se halla implícito en el método arquimedeano.

Sea de ello lo que fuere, el núcleo central del método de Leibniz se expone en las primeras siete proposiciones de DQA, donde se aplica el método general de la transmutación, consistente en cuadrar una curva mediante su transformación en otra, denominada «cuadradora» (*quadratrix*). De esta forma, la sexta proposición exhibe el fundamento del método y la séptima contiene la solución de un problema de cuadraturas. Consideremos las dos novedades metodológicas que señalamos en el párrafo anterior, comenzando por la segunda. La estrategia de Leibniz consiste en utilizar un método de prueba riguroso, que luego puede sustituirse mediante un procedimiento abreviado, recurriendo a cantidades infinitamente pequeñas, introducidas como ficciones «útiles», en el sentido de que abrevian los procedimientos de prueba. Como lo describe Knobloch, el método riguroso recurre, mediante una estrategia geométrica, al procedimiento de mostrar que se puede definir un intervalo arbitrario de modo tal que, para cualquier intervalo, siempre se puede encontrar una diferencia que cae dentro del intervalo. De esta manera, como lo propone Knobloch, Leibniz formula una versión preliminar de la matemática epsilóntica. Este es el resultado general de la Proposición 6 de DQA. Ahora bien, en este procedimiento, que es de carácter riguroso, se funda la introducción de cantidades infinitamente pequeñas, las que, según Leibniz, hacen innecesario realizar el tipo de demostraciones correspondientes a la Proposición 6. La tesis leibniziana es que en principio toda aplicación de cantidades infinitamente pequeñas puede ser sustituida por demostraciones del tipo utilizado en la Proposición 6 (ver Knobloch, 2002 y Esquisabel, 2019). Sin entrar en más detalles técnicos, el lado interesante de la prueba de la Proposición

6 es que, mediante la utilización de figuras escalonadas, evita el recurso arquimedeano a figuras inscritas y circunscritas. De este modo, la aplicación de los resultados de la Proposición 6 en la Proposición 7 da lugar a una demostración por reducción al absurdo de la cuadratura que se buscaba para la curva dada. Asimismo, en esa misma proposición establece una equivalencia entre el método propuesto en la Proposición 6 y el que apela a cantidades infinitamente pequeñas, en el que se basa una prueba directa (véase Knobloch, 2002, Rabouin, 2015, Raffo Quintana, 2019 y Esquisabel, 2019).

Es por esa razón que, en el escolio de la séptima proposición, Leibniz introduce un comentario significativo acerca de la naturaleza de las demostraciones que pueden obtenerse con su método, distinguiéndolas de otros tipos de demostraciones en materia de cuadraturas que, o bien pueden obtenerse utilizando métodos diferentes, o bien sería deseable obtener (A VII 5, 537).[2] Los tipos de demostraciones señalados por Leibniz son tres:

En primer lugar, se señalan las demostraciones apagógicas que aplican una doble reducción al absurdo, siguiendo el célebre proceso arquimediano de recurrir a figuras circunscriptas a e inscriptas en la curva cuya superficie se desea determinar. En el *Prefacio al opúsculo sobre la cuadratura aritmética del círculo*, Leibniz describe brevemente este tipo de demostraciones a propósito del círculo: el área de un círculo está entre las de dos polígonos, uno inscrito y otro circunscrito a él, de modo que, en la medida en que se biseccionen todo lo se quiera los lados de los polígonos, tendremos progresivamente áreas cada vez más próximas a la del círculo. La posibilidad de continuar con un procedimiento de este tipo todo lo que se quiera significa, para Leibniz, que es posible expresar, por medio de números, la razón de la circunferencia del círculo a su diámetro cada vez con mayor precisión, esto es, en otras palabras, que «puede lograrse que el error sea menor que cualquiera dado» (A VII 6, 173; traducción: Leibniz, 2019: 65). En DQA Leibniz no exhibe este tipo de demostraciones ni, por ello, ahonda en su consideración, precisamente porque prefiere ofrecer demostraciones más simples, como son las de los tipos siguientes.

[2] Por lo demás, el hecho de que su método provea «demostraciones» para los «problemas» de cuadraturas no tiene que parecer absurdo en este contexto. Si bien examinar con detalle lo que significan estos términos para Leibniz nos alejaría del objetivo de este trabajo, podemos decir, en pocas palabras, que Leibniz utiliza aquí una noción muy general de demostración tal que, por un lado, en la geometría toda proposición es obtenida por demostración, y por otro, las demostraciones se obtienen de manera analítica.

En segundo lugar, hay demostraciones apagógicas que nos permiten mostrar que entre dos cantidades no hay diferencia sin tener que recurrir a un razonamiento doble, sino que pueden realizarse por medio de una única deducción al absurdo, o bien, como dice Leibniz, empleando un término que lo inscriba o lo circunscriba, pero no ambos a la vez (A VII 6, 537; véase Knobloch, 2002). Estas demostraciones son más deseables que las anteriores, en la medida en que son más simples y, por eso mismo, cercanas a una demostración directa. Es, precisamente, el procedimiento exhibido por Leibniz en la séptima proposición de DQA, que a su vez se fundamenta en la sexta proposición. No obstante, el método de Leibniz se diferencia del «método común de los indivisibles», con lo cual Leibniz se refiere, presumiblemente, el de Cavalieri o alguna otra versión posterior de ese mismo método (al respecto: Andersen, Giusti y Jullien, 2015), precisamente porque la diferencia puede hacerse menor que cualquiera dada. Para el método común de los indivisibles, hay un intervalo estándar entre dos líneas paralelas (en general, las ordenadas), que es precisamente el intervalo de un indivisible, de forma tal que puede ser entendido como una cantidad infinitamente pequeña *fija*. De esta manera, la diferencia no puede hacerse menor que cualquiera dada, porque no puede hacerse menor que ese intervalo (A VII 6, 532). Por esa razón, el método común de los indivisibles no es completamente seguro, porque corre el riesgo de producir contradicciones, como por ejemplo, la de que el todo es igual a la parte (A VII 6 583, Proposición 22, escolio). Para evitarlas, es necesario imponerle restricciones, a saber, que solamente se utilicen ordenadas paralelas y se introduzca la suposición de que los intervalos entre ellas son iguales entre sí (A VII 6, 585-586).

Finalmente, en tercer lugar, Leibniz confiesa que no ha conocido una manera de procurar demostraciones directas de cuadraturas, sin reducción al absurdo, con anterioridad a su propuesta, e incluso señala que no es posible dar demostraciones de este tipo, a no ser que se supongan cantidades ficticias, infinitas e infinitamente pequeñas. Esto implica, en consecuencia, que, para dar demostraciones directas, deben suponerse tales cantidades ficticias. Según esto, entonces, los tres tipos de demostraciones que Leibniz señala se reducen a dos grandes grupos, a saber, por un lado, las demostraciones apagógicas y, por otro, las demostraciones directas.

De este modo, una vez justificada la introducción de las cantidades infinitamente pequeñas en DQA, Leibniz comienza a utilizarlas sistemáticamente. Un paso importante para ello lo da Leibniz en la Proposición 11, en la cual introduce el concepto de «línea infinitamente pequeña», así como el de «línea infinita terminada» para el tratamiento de la cuadratura de espacios de dimensiones finitas con longitudes infinitas, como es el caso de las asíntotas de la hipérbola (A VII 6 546-548, esp. primera versión del escolio. Cfr. Knobloch, 2002 y Equisabel, 2019). Más adelante, mediante su aplicación, Leibniz obtiene su célebre serie infinita de números racionales que expresa no de manera aproximada, sino con exactitud, el área del círculo, esto es, $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}, etc.$ (A VII 6, 600-601; Raffo Quintana, 2018). En conclusión, suponiendo cantidades ficticias, las demostraciones no se limitan a expresar, mediante números, aproximaciones al círculo, sino que puede exhibirse directamente la razón exacta de la circunferencia al diámetro.

Ahora bien, el abordaje de Leibniz tiene la particularidad de que se recurre a expresiones aritméticas, tales como las series infinitas, para expresar el área de la figura, a diferencia de las pruebas apagógicas, que apelan al recurso geométrico de una doble serie de polígonos inscriptos y circunscriptos. El tratamiento aritmético del área del círculo no constituye en sí mismo una novedad del método leibniziano. Más aún, Leibniz conocía bien algunas expresiones dadas por otros autores para la razón existente entre la circunferencia y el diámetro del círculo, como, por ejemplo, las proporciones aproximadas de Arquímedes ($\frac{22}{7}$; Arquímedes, 2005: 243-244), Adriaan Metius ($\frac{355}{113}$; Metius, 1611: 133-136, y 1633: 102-110) o Ludolph van Ceulen ($\frac{314159265358979323846}{100000000000000000000}$; Van Ceulen 1596) (A VII 6, 173). Incluso, Leibniz conocía el producto de John Wallis, esto es, $\frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\ etc.}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\ etc.}$, gracias al cual, a medida que se lo extiende, puede obtenerse un valor cada vez más aproximado. Ciertamente, la originalidad del abordaje de Leibniz radica no tanto en la exhibición de un valor por medios aritméticos, sino en el hecho de que, por un lado, sostenga que el valor expresado por la serie infinita no sea aproximado, como los anteriores, sino exacto, y de que, por el otro, defienda la idea de que la cuadratura obtenida mediante la serie aritmética sea la mejor que podemos llegar a obtener.

Para sostener ambos asertos, Leibniz lleva a cabo una clasificación entre tipos de cuadraturas, que a continuación presentaremos esquemáticamente (A VII 6, 173-174; para un desarrollo más minucioso, Crippa, 2017: 107-109). En efecto, las cuadraturas racionales pueden expresar un valor aproximado o exacto, y pueden buscarse o bien por procedimientos puramente geométricos (‘cuadraturas geométricas’) o bien mediante un cálculo. En este último caso, hay que contemplar, por un lado, si el cálculo es finito o infinito y si se da una expresión por medio de una cantidad o de una progresión de cantidades. Si, mediante un cálculo finito, se busca un número para expresar el área del círculo, sea dicho número racional, irracional o algebraico, llamaremos a la expresión ‘analítica’. Cuando la expresión del valor se lleva a cabo mediante progresiones infinitas de números racionales, diremos que la cuadratura es ‘aritmética’.

De este modo, el resultado que Leibniz presenta en la proposición XXXII de DQA es, en estos términos, una cuadratura *aritmética* exacta, es decir, de la última clase. Ahora bien, el hecho de que exhiba de manera exacta la proporción entre el círculo y el cuadrado no hace que este tipo de cuadraturas sean necesariamente las más deseables. Esto se debe, en otras palabras, a que no es una cuadratura ‘perfecta’, pues ésta, si pudiera darse, tendría que ser geométrica (es decir, tendríamos que poder realizarla mediante regla y compás) y analítica (esto es, tal que podamos expresarla mediante un cálculo finito). Ahora bien, una cuadratura perfecta es imposible (por razones que Leibniz explícitamente señala en A VII 6, 175-177 y 674-676, y que no expondremos aquí; para esto, véase Crippa, 2014: 342-354 y 422-428; 2017, 2018 y 2019). En consecuencia, por más que la cuadratura aritmética no sea perfecta, es la mejor que podemos obtener.

Por otro lado, uno de los rasgos más relevantes de la utilización de las cantidades infinitamente pequeñas consiste en concebir una curva dada, incluyendo el círculo, en términos de un polígono de un número infinito de lados, cada uno de los cuales es una línea infinitamente pequeña (A VII 6 586, Proposición 23, escolio; A VII 6 642, 644, 645, 650, 654, Proposición 48, para el tratamiento del seno verso). Es importante destacar que Leibniz no sostiene que una curva *sea* un polígono infinitángulo, sino que se la puede *considerar* como tal. Este aspecto, aunque pase inadvertido en el tratamiento general del problema, revela no sólo el carácter ficticio de las entidades infinitesimales, sino también las diferencias entre el tratamiento técnico y el propiamente «filosófico», en el sentido de que, desde el punto de vista matemático, la introducción de las ficciones se hace de manera directa, sin consideraciones de «cuestiones de fundamento».[3]

Para concluir esta sección, sinteticemos los puntos salientes de las cuestiones técnicas antes señaladas, cuyos fundamentos exploraremos a continuación. En primer lugar, con el método geométrico de Leibniz la diferencia entre dos figuras, construidas según un procedimiento regulado, puede hacerse menor que cualquier diferencia dada, recurriendo, para ello, solamente a figuras inscritas o circunscritas, esto es, mediante una única reducción al absurdo (Proposiciones 6 y 7). Así, por un lado, se procura una demostración más simple que la que obtendríamos empleando el método de doble reducción al absurdo y, por otro, se superan o corrigen los defectos del método común de los indivisibles (resultados absurdos o contradictorios). En segundo lugar, pueden darse demostraciones directas si se emplean cantidades ficticias, lo que en el caso particular del círculo se comprueba, por ejemplo, en la posibilidad de exhibir el área del círculo por medio de series infinitas de números racionales, esto es, mediante una cuadratura aritmética. Finalmente, puede realizarse un tratamiento de las propiedades de las curvas considerándoselas como polígonos infinitángulos.

3. El círculo como polígono infinitángulo

La introducción de métodos infinitesimales abreviados, en el sentido en que hemos expuesto en párrafos anteriores, implica, entre otras cuestiones, el tratamiento de las curvas en términos de polígonos infinitángulos, con el fin de obtener las cuadraturas de las superficies correspondientes. Así, por ejemplo, un círculo puede concebirse como un polígono regular infinitángulo, de manera tal que cada uno de sus lados está constituido por una línea infinitamente pequeña. Aunque Leibniz no aplica directamente en DQA el método de la poligonización del círculo para obtener su cuadratura, sino que recurre a un procedimiento más complejo, aplica dicho procedimiento para el tratamiento de otras

[3] En los textos dedicados a la formulación del cálculo infinitesimal también se apela sistemáticamente a la consideración de las curvas en términos de polígonos infinitángulos. Así, por ejemplo, en *Methodus nova investigandi tangentes*, A VII 4, 657-ss. (1673)*; Analysis tetragonistica ex centrobarycis*, A VII 5, 263 (1675); *Methodi tangentium inversae exempla*, A VII 5, 321 (1675); *Methodus tangentium inversa*, A VII 5, 598 (1676); *Elementa calculi novi pro differentialis et summis*, Gerhardt 1846, 32; 1855, 149. No obstante, nos hemos limitado a su introducción en DQA.

cuestiones, como ya lo hemos adelantado. Asimismo, recurre al mismo método en otros escritos sobre cuadraturas de diversos tipos de curvas. Más aún, no desconocía que el método de poligonización constituía un procedimiento usual entre los matemáticos de la época. En efecto, la concepción de los círculos como polígonos infinitángulos estaba bastante extendida en la época de Leibniz, en especial en el dominio de los tratamientos de las cuadraturas. Así, por ejemplo, Wallis señaló que el círculo «suele tenerse por un polígono de infinitos lados, y por ello, la periferia, por infinitas rectas infinitamente breves» (Wallis, 1656: Aa2) y Galileo afirmó más categóricamente que los círculos «son polígonos de infinitos lados» (EN, VIII, 71). Una importante repercusión de esta cuestión en los tratamientos sobre cuadratura se encuentra, por ejemplo, en el trabajo de James Gregory *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1668), en donde se intenta justificar la imposibilidad de dar una ecuación algebraica para el límite o *terminatio* de la serie de polígonos inscriptos y circunscritos.

Sea como fuere, mientras que en su práctica matemática Leibniz aplica de manera sistemática el método de la poligonización, desde el punto de vista teórico reflexiona acerca de la legitimidad de su introducción, especialmente en relación con la naturaleza de las curvas y, entre ellas, del círculo. De este modo, el abordaje de Leibniz de esta cuestión se destaca al menos por dos consideraciones: por un lado, por su concepción de que « (e)l círculo, como un polígono mayor que cualquiera asignable (como si esto fuera posible), y otras cosas de este género, son entes ficticios» (A VI 3, 498; traducción: Leibniz, 2019: 45) y, por el otro, por haber ofrecido una justificación de la importancia del uso de entes ficticios en geometría, así como una explicación epistémica o cognitiva de esta manera de concebir las figuras curvilíneas. Precisamente, un importante y complejo escrito de abril de 1676 titulado *Números infinitos* contiene el examen de la cuestión de los problemas epistémicos involucrados en la poligonización del círculo que conducen, finalmente, a la tesis de la ficcionalidad de las entidades involucradas en dicho procedimiento. Por esa razón, el texto de Leibniz es de capital importancia para comprender el paso de una concepción realista a una ficcionalista en materia de conceptos infinitarios, así como del hiato más tarde reconocerá entre lo real y lo «ideal».

En efecto, una de las cuestiones centrales de *Números infinitos* es la legitimidad de utilizar diagramas en geometría y, concomitantemente, la posibilidad de concebir las curvas como polígonos infinitángulos. Algunas de sus conclusiones anticipan, aunque sin enunciarla, la importancia del principio de continuidad en el tratamiento de cuestiones geométricas. Reconstruiremos en lo que sigue la estructura del argumento leibniziano.

Una primera parte del argumento apela a la concepción tradicional de la superficie del círculo como «límite» entre dos series convergentes. Así, en el supuesto de que se pueda considerar al círculo como un polígono infinitángulo, la superficie de tal polígono sería el límite geométrico entre dos series de polígonos, una inscripta y otra circunscripta. De ese modo, para cualquier polígono inscripto con una superficie cualquiera *a*, cuya diferencia con la superficie del polígono infinitángulo sea *b,* se puede siempre encontrar otro polígono inscripto con una superficie *c* tal que la diferencia *d* con la superficie del polígono infinitángulo sea menor que *b*. El mismo razonamiento se puede repetir para el polígono circunscripto. Ahora bien, esto no significa que haya un doble límite, esto es, del polígono inscrito y del circunscrito, pues, en ese caso, habría un polígono menor que todo polígono circunscripto y otro polígono mayor que todo polígono inscripto. Pero eso no es posible, porque siempre se puede encontrar un polígono menor o mayor respectivamente. Sin embargo, podemos concebir la ficción de que ambas series «convergen» o se aproximan a un polígono infinitángulo y finalmente coinciden con él. Como sugerimos antes, aunque aquí no está enunciado explícitamente, Leibniz está aplicando implícitamente el principio de continuidad:

> Y así, si los polígonos pueden crecer de acuerdo con una cierta ley y si algo es verdadero sobre ellos cuanto más crecen, nuestra mente se imagina un último [polígono]; y sobre este [último polígono, nuestra mente] afirma perfectamente aquello que ve que se cumple más y más en cada uno de ellos; aunque éste [es decir, el último polígono] no exista en la naturaleza de las cosas, sin embargo, puede darse una expresión para él con el fin de abreviar aún más las expresiones. (A VI 3, 498. Traducción: Leibniz, 2019: 46)

El texto nos permite extraer algunas conclusiones. En primer lugar, aunque Leibniz no había formulado aún de manera explícita el principio de continuidad, parece claro que el modo de argumentación implica la idea de continuidad. En segundo lugar, vale la pena enfatizar que una pieza importante del argumento consiste en sostener que nuestra mente *se forja* una imagen de un último término, cuando encuentra una serie continua que crece (o decrece) hacia un cierto término último de acuerdo con una cierta ley. En otras palabras, si una serie apunta a un cierto objeto geométrico como un límite de la serie (geométrico, no aritmético), entonces imagina («finge») que hay un objeto último del mismo tipo de los objetos de la serie: en este caso, se trata del círculo (fuera de la serie) que se concibe como un último polígono infinitángulo (dentro de la serie). En tercer lugar, a pesar de que no existe en la naturaleza de las cosas un objeto con estas características, pues se trata de un objeto ficticio, utilizamos una expresión para referirnos a él. Se trata de una expresión sin denotado que constituye una «abreviatura», un «*compendium*», aunque por sí mismo el argumento no aclara completamente qué es lo que se abrevia.

Sea de ello lo que fuere, Leibniz ofrece una justificación de que no existan estos objetos ficticios en la naturaleza. El primer paso del argumento es de carácter cognitivo y trata de establecer por qué concluimos que debe haber un polígono infinitángulo al término de las dos series, pese a que no podemos percibirlo en cuanto tal. En efecto, este paso está dado por la inferencia, a partir del diagrama y por nuestras limitaciones cognitivas, del hecho de que el círculo diagramado es un polígono infinitángulo. Puesto que no podemos imaginarnos ni percibir distintamente un polígono de muchos lados, inferimos, conjeturalmente, la existencia de un objeto geométrico que no tiene lados, a saber, el círculo como polígono infinitángulo. El paso al límite diagramático de la imposibilidad de imaginar distintamente un polígono de muchos lados es el círculo como polígono infinitángulo. Es decir, es una inferencia «diagramática» basada en la indistinción; como tal, es una inferencia «no garantizada» o inválida, porque está basada en una limitación cognitiva. Dicho de otro modo, inferir diagramáticamente que el círculo es un polígono infinitángulo a partir de la progresiva semejanza pictórica entre el círculo y una serie de polígonos de un número de lados creciente es por sí mismo inválido. No tenemos derecho a introducir la equivalencia «real» entre el círculo diagramado y el polígono infinitángulo, sino que, a lo sumo se trata de una «ficción» útil, simplificadora.

Pero este argumento va más lejos, en la medida en que concluye que tampoco hay un círculo matemático «real» (en el sentido de una curva irreductible a un polígono infinitángulo). En otras palabras, la figura a la que le atribuimos la propiedad de ser una curva cerrada, continua y homogénea tiene algo de «imaginaria», en el sentido de que el diagrama geométrico que denominamos «círculo», ya sea trazado o imaginado, no es un «verdadero» círculo, puesto que es una sucesión de trazos discontinuos y heterogéneos, que han sido uniformizados por nuestro aparato cognitivo.

En efecto, que sea inválida la inferencia de la poligonalidad infinita del círculo no implica para Leibniz que haya en la mente una imagen o representación que exprese un 'círculo perfecto'. Por el contrario, para que la imagen, que es imperfecta, represente verdaderamente un círculo, hay que añadirle o aplicarle la propiedad de la uniformidad, que ella misma no posee. Y esta uniformidad es producto de una operación abstractiva, en la medida en que dejamos de atender a la diversidad o falta de uniformidad de la figura, que quizás sea imperceptible para nuestras facultades cognitivas. De esta manera, somos nosotros mismos los que la uniformizamos, mediante la aprehensión de propiedades globales. En ese sentido, la uniformidad es como un concepto «molde» o «plantilla» que forma parte de nuestras capacidades cognitivas fundamentales (A VI 3, 499). Además de que el argumento parece ser un anticipo de la teoría de las «pequeñas percepciones», apunta clara, aunque aún no explícitamente, a la tesis de la idealidad de lo geométrico y de lo matemático en general: lo actual y real es de carácter heterogéneo y discontinuo, mientras la homogeneidad de lo matemático resulta de una abstracción, en parte resultante de las limitaciones de nuestro aparato cognitivo y en parte debido a que les aplicamos, por decirlo así, un principio de uniformización: en consecuencia, la consideración del círculo imaginado como algo perfecto resulta de la función «uniformizadora» de nuestro aparato cognitivo.

> ¿Acaso hemos sido alguna vez conscientes de haberlas sentido? Para olvidar, en efecto, es necesario esto [es decir, haber sido consciente]. Pero este no es el caso. Por consiguiente, hay que decir más bien que, cuando sentimos un círculo o un polígono, nosotros nunca sentimos la uniformidad en él, pero no sentimos tampoco la disformidad, es decir, nosotros no recordamos haber sentido nada disforme en él, puesto que la desigualdad no salta inmediatamente a los ojos. Y por este recuerdo ahora le atribuimos el nombre de uniformidad. (A VI 3, 499. Traducción: Leibniz, 2019: 48)

Como anticipamos, la fase final de la elaboración de esta cuestión parece apuntar nuevamente a la concepción, bastante posterior, de las pequeñas percepciones[4]. En efecto, la necesidad de uniformizar surge de la imposibilidad de retener variaciones momentáneas en el contenido de nuestras percepciones, que, por el hecho de su pequeñez, son inexpresables en cuanto tales. La conclusión de todo el análisis, a pesar de las dificultades, parece clara: no es que en nuestra mente (en nuestra «imaginación») haya una imagen perfecta y verdadera del círculo, sino que esa imagen es siempre diversa e imperfecta, sólo que, debido a nuestras limitaciones cognitivas, la sometemos a un proceso de uniformización, eliminando de antemano (mediante una función inconsciente) todo lo que hay en ella de diverso. Por consiguiente, no estamos obligados a concluir que hay una «imagen mental verdadera» del círculo y, por tanto, tampoco estamos obligados a concluir que existen las ficciones que empleamos para tratar las propiedades geométricas de figuras como la del círculo.

4. Un comienzo de distinción entre las realidades físicas y lo geométrico puro

En las reflexiones acerca del problema de la composición del continuo previas al año 1676, se evidencia en Leibniz la tendencia a abordar dicha cuestión sin establecer una distinción neta entre el plano matemático y el físico, de manera que la transición entre uno y otro ámbito se lleva a cabo sin solución de continuidad. Así, por ejemplo, cuando Leibniz sostiene en *De minimo et maximo* que en «el espacio o cuerpo» no hay mínimos o indivisibles (A VI 3, 97-98), afirma algo que, aparentemente, se aplica tanto al mundo de los cuerpos físicos como a la geometría. Sin embargo, algunos comentarios redactados hacia 1676 parecen sugerir un cambio de actitud de Leibniz. A pesar de que sería exagerado sostener que, a partir de este año, Leibniz distingue claramente entre lo real y lo ideal, parece manifiesto que, al menos, comienza a tomar conciencia de que es necesario establecer una diferenciación más categórica entre el modo de existencia de lo físico y el de lo geométrico o matemático en general, por lo que debemos ser cautos a la hora de llevar a

[4] No se trata de un caso aislado. Hay otros textos leibnizianos en los que también se anticipa la teoría de las pequeñas percepciones. Ver, por ejemplo, *Demonstratio substantiarum incorporearum*, de 1672 (A VI 3 78).

cabo afirmaciones generales. Como veremos, esta diferenciación va de la mano de la decidida defensa del carácter ficticio de las nociones infinitarias.

En este sentido, es reveladora la distinción que en este período introduce Leibniz entre las nociones de 'todo' y 'agregado' en relación con la composición del continuo. En efecto, sostiene que en el continuo el todo es anterior a las partes, estableciendo así una diferencia con lo que es un agregado. En efecto, a diferencia de lo que sucede en un agregado, en un todo no hay partes actuales, aunque «puede tener» partes; dicho de otro modo, un todo es divisible, pero no está dividido en acto (A VI 3, 502-503; para una presentación más desarrollada esta cuestión, Raffo Quintana, 2019: 128-138). Hay que tener en cuenta que, en este contexto, la noción de 'continuo' a la que Leibniz apela es típicamente aristotélica: son cosas continuas aquellas cuyos extremos son uno (A VI 3, 537; Aristóteles, *Física*, 227a10-b2). El hecho de concebir el continuo de esta forma tiene por consecuencia la necesidad de diferenciar entre el modo de tratar el continuo físico y el tratamiento del continuo matemático. En efecto, el rechazo de los mínimos o indivisibles en el caso de la composición del continuo físico obedece a razones diferentes de las que se aplican en el caso del continuo matemático. Dicho de otro modo, no hay mínimos en un cuerpo, que no es más que un agregado actualmente dividido en partes, porque está compuesto de infinitas partes actuales, es decir, está dividido en acto al infinito (A VI 3, 553-555), mientras que en una línea geométrica no los hay porque es divisible al infinito, esto es, porque, aunque no está dividida en acto, siempre puede realizarse una división ulterior. En el *Pacidius Philalethi* hay varios pasajes que introducen esta noción de continuo geométrico, como, por ejemplo, el siguiente:

> Si lo apruebas, Pacidio, diremos que los puntos no existen antes de ser designados. Si una esfera toca un plano, el punto es el lugar del contacto; si un cuerpo es cortado por otro cuerpo o bien una superficie por otra superficie, entonces la superficie o la línea es el lugar de intersección. Pero no hay puntos, líneas y superficies en cualquier parte, y en general los extremos no son otra cosa que los que surgen al dividir, y las partes tampoco existen en el Continuo antes de que se produzcan por división. (A VI 3, 552-553. Traducción nuestra; cfr. OFC 8 p. 140)

Ahora bien, la distinción entre todo y agregado tiene como consecuencia la necesidad de introducir cierta cautela en la aplicación de argumentos geométricos cuando se trata de cuestiones físicas, por ejemplo, si representamos un cuerpo físico por medio de un conjunto de líneas geométricas. Una muestra de este cuidado se manifiesta en el mismo diálogo, cuando se examinan las propiedades de los movimientos, que son agregados (A VI 3, 563-564), utilizando para ello la representación gráfica de una línea, AC, entre los cuales se asignan dos puntos intermedios B y C:

> Pero esta conversación nuestra no es acerca de alguna línea uniforme continua en la cual no pudieran siquiera asumirse dos puntos del mismo tipo *B* y *D* inmediatos entre sí, sino acerca de la línea *AC* que ya está por naturaleza cortada en acto en partes, puesto que asumimos un cambio sucedido de tal modo que en un momento el móvil existiría en el extremo *B* de una de sus partes *AB*, y en otro, en el extremo *D* de la otra parte *DC*. Y la diferencia entre estas dos líneas contiguas divididas por sí en acto y una línea indivisa o continua es manifiesta: porque, como ya ha notado Aristóteles, los extremos *B* y *D* en las líneas contiguas difieren, pero en una continua coinciden, como también hemos notado antes. (A VI 3, 563-564. Traducción nuestra; cfr. OFC 8 p. 149)

En síntesis, el argumento anterior concluye que existe una diferencia entre el movimiento actual, que es discontinuo, en el sentido de que está compuesto por infinitos movimientos diversos y heterogéneos, y su representación mediante una línea geométrica uniforme y continua, en la que el todo es anterior a sus partes. En este sentido, en los cuerpos físicos y en su movimiento concreto no existen todos los puntos que suponemos que son posibles en el espacio geométrico abstracto, que es arbitrariamente divisible. Por lo demás, esta concepción tiene una correlación muy importante con los desarrollos matemáticos de Leibniz. En efecto, el método geométrico de Leibniz para cuadraturas tal como se lo propone en la Proposición 6 de DQA, que depende de que la diferencia entre dos cantidades geométricas se haga menor que cualquiera dada, se funda en la tesis de la continuidad de las entidades geométricas (Knobloch, 2002: 63), en la medida en que se las concibe como todos anteriores a sus partes. Pero esto tiene como consecuencia el hecho de que debemos distinguir entre lo geométrico, que admite la divisibilidad infinita potencial y arbitraria, y lo físico, que implica una división actual infinita dada y no arbitraria. Así, se ponen las bases para la futura distinción entre lo ideal matemático y lo real actual, ya sea físico o metafísico.

5. Sobre las cantidades ficticias y su imposibilidad en la naturaleza

En las secciones anteriores de este trabajo nos hemos referido al hecho de que, desde el punto de vista matemático, Leibniz considera que las disputas filosóficas relativas a la existencia de cantidades infinitas e infinitamente pequeñas no son relevantes para los geómetras. A pesar de ello, como hemos visto, hacia el final del período parisino, Leibniz se dedicó con bastante intensidad a reflexionar sobre los problemas metafísicos y físicos que se planteaban acerca de la existencia o inexistencia de los objetos infinitarios; la conclusión más destacada de estas reflexiones fue, sin dudas, la de su ficcionalidad, es decir, que no se dan en la naturaleza sino que simplemente son ficciones matemáticas útiles, que no tienen correlato real o fáctico. No es nuestra intención aquí reconstruir todo el trasfondo de esta cuestión (cosa que, por lo demás, fue suficientemente tratada por otros autores, ver por ejemplo Arthur, 2009 y 2018), sino que solamente deseamos señalar que, al mostrar que no se dan en la realidad (y que, por lo tanto, son ficciones), Leibniz da un paso en el camino hacia la idealidad de lo matemático. Para ello, en esta sección indicaremos, sintéticamente, los argumentos por los cuales rechaza la realidad de los objetos infinitarios, ya sean líneas infinitas terminadas como cantidades infinitamente pequeñas. En efecto, afirmar la existencia en la naturaleza de líneas infinitas terminadas produce paradojas o estados de cosas absurdos; del mismo modo, la admisión de infinitamente pequeños reales va en contra de principios de orden natural, cuyos argumentos expondremos de manera más extensa en un próximo trabajo.

Al menos desde finales de 1675, Leibniz sostuvo de manera categórica que admitir la existencia de líneas infinitas terminadas en la naturaleza conlleva situaciones paradójicas o absurdas. Así, por ejemplo, en *De mente, de universo, de Deo*, señaló que, de haber una línea máxima, es decir, la mayor línea infinita terminada por ambos lados, debería concluirse también que el universo tendría un punto medio en cuanto al espacio, así como también un diámetro. Asimismo, dada la correspondencia entre el espacio y el tiempo, podría inferirse de allí que la eternidad tendría un punto medio, lo que podría llevar a preguntas tales como a qué distancia está el presente de tal punto medio, o bien si media entre el presente y dicho punto medio una distancia temporalmente infinita (aunque sin embargo no máxima); más aún, da lugar a la cuestión de si podría decirse que Dios, una vez atravesado el punto medio de la eternidad, ya ha vivido más de la mitad de su vida (A VI 3, 464). Si bien en este y otros escritos de finales de 1675 y comienzos de 1676 Leibniz parece no tener completamente en claro el carácter inadmisible de estas conclusiones (por ejemplo, en A VI 3, 475), lo cierto es que, en los escritos posteriores, en especial desde el *Pacidius Philalethi* en adelante, Leibniz considera que es absurdo admitir líneas infinitas terminadas por ambos lados (A VI 3, 564-565). No obstante, no da argumentos definitivos para sostener una tesis semejante, limitándose a señalar que está en condiciones de proporcionar su justificación y que lo hará en un futuro próximo. A pesar de que no es claro si y dónde tuvo lugar una fundamentación de esa clase, es manifiesto que las consecuencias paradojales que extrajo a partir de líneas infinitas terminadas en los textos que señalamos antes constituyeron una buena base para que rechace su existencia en la naturaleza. Muchos años más tarde, en una correspondencia enviada a Johann Bernoulli en 1698, en la que contempla muchas de las consecuencias absurdas que ya había considerado en el período parisino, Leibniz confiesa que, a menos que se ofrezcan demostraciones indiscutibles, no se atreve a afirmar que esos absurdos tengan lugar en la naturaleza (GM II, 499-500). Por lo demás, esto muestra que en los años posteriores Leibniz continuó sosteniendo las conclusiones del período parisino.

La actitud de Leibniz frente a la existencia de los infinitamente pequeños fue similar a la que señalamos antes respecto de las líneas infinitas terminadas. En efecto, a pesar de haberse mostrado dubitativo a comienzos de 1676 acerca de la posibilidad de admitir la existencia de infinitamente pequeños (llegando a decir que son ‘admirables’ algunas de las cosas que se siguen de admitirlos; A VI 3, 475), lo cierto es que, desde el *Pacidius Philalethi* en adelante, Leibniz tuvo en claro que la existencia de cosas infinitamente pequeñas va en contra del principio de razón suficiente (A VI 3, 560-561). Su argumento parte de observar que la grandeza y la pequeñez no son propiedades absolutas de las cosas, por lo cual no hay razón para afirmar que hay cosas infinitamente menores que cualesquiera otras, como si hubiera un único grado de infinito. Por el contrario, es acorde con la armonía de las cosas decir que hay *al infinito* cosas menores que otras, o bien, en otras palabras, que no hay un único grado de infinito. De esta manera, la grandeza y la pequeñez no son términos absolutos, sino relativos y proporcionales, esto es, hay una proporcionalidad entre lo grande y lo pequeño tal que es incongruente decir que una propiedad o relación se cumple en unos casos, pero no en otro, a causa del tamaño. Como vemos, este argumento de Leibniz se funda en el principio según el cual «el sapientísimo autor de todas las cosas no hace nada sin razón» (A VI 3, 561).

En suma, estos argumentos implican que la existencia de líneas infinitas terminadas, lo mismo que de infinitamente pequeños, sería incompatible con la sabiduría divina, precisamente porque Dios no hace nada sin razón (A VI 3, 463-464). Tengamos en cuenta las concepciones que acerca de la imposibilidad Leibniz había formulado ya en la *Confessio philosophi* y que retoma en estos años en relación con el campo de lo matemático, en especial a finales de 1675, en textos como *Imaginariae usus ad comparationem circuli et hyperbolae* (A VII 6 456-457) y *De mente, de universo, de Deo* (A VI 3 461-465). En efecto, en el primero de estos textos Leibniz reflexiona brevemente acerca de la realidad de las raíces imaginarias, concluyendo, al menos provisionalmente, su ficcionalidad. En el segundo texto, retoma esa misma idea, pero postula la existencia de dos tipos de imposibilidad, una de esencia y otra de existencia. De acuerdo con esta distinción, la imposibilidad de las raíces imaginarias constituiría un modelo del segundo tipo, en el sentido de que corresponden a una entidad absurda o geométricamente no construible (A VI 3, 463-464). Aunque no desarrollaremos el argumento aquí, es posible mostrar que se puede aplicar el mismo tipo de argumentación a las cantidades infinitesimales.

6. Consideraciones finales

En síntesis, en este trabajo hemos visto que en el período parisino puede detectarse una concepción incipiente acerca de la distinción entre lo geométrico-ideal y lo físico-real, que Leibniz fue esbozando a la par que avanzaba en sus desarrollos técnicos en matemática infinita. Como hemos visto, la consideración de las ficciones matemáticas y de lo matemático en general en el período parisino se desarrolla, por un lado, en un plano técnico, estrechamente ligado con la práctica matemática y, por otro, en un plano metafísico y epistémico. Con el marco de esta distinción, señalaremos algunos de los aspectos más relevantes que hemos ido proponiendo a lo largo de nuestro examen y que expresan las concepciones de Leibniz hacia el final del período de Paris.

En primer lugar, lo real implica diversidad y heterogeneidad. Como señala en un texto de diciembre de 1676, para lo real y actual rige el principio conocido 'principio de variedad o plenitud', de acuerdo con el cual debe existir la mayor variedad posible (siempre y cuando no lesione la compatibilidad) (cf. A VI 3, 475 y 524). Lo geométrico, a diferencia de lo real, implica homogeneidad. Podemos extraer de aquí la siguiente conclusión: la razón por la cual para Leibniz no hay nada perfectamente geométrico en realidad no se debe a una hipotética 'imperfección' de la realidad por la cual precisamente la 'perfección' geométrica no tendría lugar, como si se tratara de una escala de perfección en la cual lo geométrico estuviera por encima de lo físico. Más bien el trasfondo del argumento de Leibniz parece ser el opuesto: la realidad es, por decirlo así, tan 'rica' en su diversidad, que lo geométrico, que implica la 'simpleza' de lo homogéneo, sería incompatible con ella.

En segundo lugar, que los objetos geométricos en cuanto tales no se den en la naturaleza tiene implicancias epistémicas en dos sentidos: por un lado, lo geométrico como tal no puede ser percibido ni imaginado, sino que, en cierto modo, tiene que ser pensado; por otro, en lo percibido o imaginado dejamos de advertir las diversidades y en este sentido nuestro aparato cognitivo lleva a cabo ciertos procesos de uniformización por los cuales se explica que pueda decirse que 'percibimos' o 'imaginamos' los objetos geométricos, por ejemplo (retomando el caso abordado por Leibniz), un círculo. Ahora bien, esta situación da lugar a preguntas que, aunque no abordaremos en esta ocasión, trazan líneas futuras de trabajo en relación con la aplicación de la geometría al conocimiento natural: a pesar de que en la naturaleza no haya nada que tenga las propiedades exactas de lo geométrico, en filosofía natural utilizamos la geometría, o más en general, la matemática, para las explicaciones físicas. Ahora bien, teniendo en cuenta las reflexiones leibnizianas acerca de la «idealidad» de lo matemático, podríamos preguntarnos en una perspectiva epistemológica qué es lo que precisamente valida esta aplicación de la matemática en el conocimiento de la naturaleza.

Por último, el hecho de que las cantidades ficticias no sean cantidades reales puede llevar a la pregunta acerca de la distinción entre lo geométrico en general y las ficciones matemáticas en particular. En este sentido, por ejemplo, podríamos preguntarnos en qué se distingue un pentágono (o cualquier entidad geométrica en general) de un rectángulo de base infinitamente pequeña y longitud infinita terminada (u algún otro objeto ficticio infinitario), si es que en la realidad no se da tanto uno como otro. Aunque no lo desarrollaremos en esta ocasión, podría decirse, a modo de propuesta, que aunque ni las entidades geométricas en general (excluyendo en esto las ficciones) ni las ficciones sean cantidades reales, de lo geométrico en general es posible hallar en la realidad lo que podríamos llamar 'instancias aproximadas', mientras que para las ficciones tal cosa ni siquiera es posible. En este sentido, hallaremos en la realidad cosas cuyas figuras sean, por decirlo así, aproximadamente pentagonales, circulares o rectangulares, pero no cosas que sean infinitamente pequeñas, ni siquiera de manera aproximada.

Bibliografía

ANDERSEN, K., GIUSTI, E. y JULLIEN, V. (2015). «Cavalieri's Indivisibles», en: JULLIEN, V. (ed.). *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, Dordrecht: Birkäuser, pp. 31-55.

ARQUÍMEDES (2005). *Tratados I. Sobre la esfera y el cilindro – Medida del Círculo – Sobre los conoides y esferoides* (introducción, traducción y notas de Paloma Ortíz García), Madrid: Gredos.

ARTHUR, R. T. W. (2009). «Actual Infinitesimals in Leibniz's Early Thought», en: KULSTAD, M., LAERKE, M. y SNYDER, D. (eds.). *The Philosophy of the Young Leibniz*, Stuttgart: Franz Steiner Verlag, pp. 11-28.

ARTHUR, R. T. W. (2018). *Monads, Composition, and Force. Ariadnean Threads Through Leibniz's Labyrinth*, Oxoford: Oxford University Press.

CRIPPA, D. (2014). *Impossibility results: from geometry to analysis; a study in early modern conceptions of impossibility*, Tesis doctoral, Université Paris Diderot Paris 7.

CRIPPA, Davide (2017). «Leibniz and the Impossibility of Squaring the Circle», en: PISANO, R., FICHANT, M., BUSSOTTI, P. y OLIVEIRA, A. R. E. (eds.). *The Dialogue between Sciences, Philosophy and Engineering. New Historical and Epistemological Insights. Homage to Gottfried W. Leibniz 1646-1716*, Londres: College Publications.

CRIPPA, Davide (2018). «On Leibniz's theorem about the impossibility of squaring the circle and its relation with James Gregory's *Vera circuli quadratura*», *Quaderns d'Històrìa de l'Enginyeria*, XVI, pp. 209-232.

CRIPPA, Davide (2019). *The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century. A Debate Among Gregory, Huygens and Leibniz*, Cham: Birkhäuser.

DE MORA CHARLES (2012). "Metafísica y cálculo infinitesimal", *Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica*, 129-131, pp. 211-216.

ESQUISABEL, O. M. y RAFFO QUINTANA, F. (2017). «Leibniz in Paris: a discussion concerning the infinite number of all units», *Revista Portuguesa de Filosofía*, 73/3-4, pp. 1319-1342.

ESQUISABEL, O. M. (2019). «Analogías e invención matemática en Leibniz. El caso de la matemática infinitesimal», en: ARROYO, G. y SISTO, M. (comp.). *La lógica de la analogía. Perspectivas actuales sobre el rol de las analogías en ciencia y en filosofía*, Malvinas Argentinas: Universidad Nacional de General Sarmiento, en prensa.

GERHARDT, C. I. (ed.) (1846). *Historia et origo calculi differentialis*, Hannover: Im Verlage der Hahn'schen Hofbuchhandlung.

JULLIEN, V. (ed.) (2015). *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, Dordrecht: Birkäuser.

KNOBLOCH, E. (2002). «Leibniz's Rigorous Foundation of Infinitesimal Geometry by Means of Riemannian Sums», *Synthese*, 133, pp. 60-73.

LEIBNIZ, G. W. (1849-1863). *Leibnizen Mathematische Schriften* (ed. C. I. Gerhardt). Berlin / La Haya: A. Ascher & Comp / H.W. Schmidt. [Citado como GM, seguido de número de volumen (en números arábigos) y del número de página]

LEIBNIZ, G. W. (1923 y ss.). *Sämtliche Schriften und Briefe* (edición de la Academia de Ciencias de Berlín), Berlín (antes: Darmstadt; Leipzig): Walter de Gruyter Verlag (antes: Otto Reichl Verlag; Akademie-Verlag). [Citado como A, seguido de la serie (en números romanos), del volumen (en números arábigos) y del número de página. Por ejemplo: A VII 6, 521]

LEIBNIZ, G. W. (2009). *Obra filosóficas y científicas* (ed. Juan Arana), Granada: Comares, volumen 8. [Citado como OFC, seguido del volumen (en números romanos) y del número de página. Por ejemplo: OFC 8, p. 140]

LEIBNIZ, G. W. (2014). «Introducción a la aritmética de los infinitos (1672)» (comentario introductorio y traducción de Federico Raffo Quintana), *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, 3/1, 47-69.

LEIBNIZ, G. W. (2019). *Sobre los Infinitos* (prólogo, selección, traducción y notas de Oscar Esquisabel y Federico Raffo Quintana), Buenos Aires: Excursus - Centro de Investigaciones Filosóficas.

METIUS, Adriaan (1611). *Arithmeticæ et geometriæ practica*, Franeker.

METIUS, Adriaan (1633). *Manuale arithmeticae et geometriae practicae*, Amsterdam.

RABOUIN, David (2015). «Leibniz's Rigorous Foundations of the Method of indivisibles», en: JULLIEN, V. (ed.). *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, Dordrecht: Birkäuser, pp. 347-364.

RAFFO QUINTANA, Federico (2018). «Leibniz on the requisites of an exact arithmetical quadrature», *Studies in History and Philosophy of Science*, 67, pp. 65-73.

RAFFO QUINTANA, Federico (2019). *Continuo e infinito en el pensamiento leibniziano de juventud*, Granada: Comares.

SCHOLZ, Lucie (1934). *Die exackte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bei Leibniz*. Inaugural Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Hohen Philosophischen Faultät der Philipps-Universität zu Marburg, Marburg, Kretschmer.

VAN CEULEN, Ludolph (1596). *Vanden Circkel*, Delft.

WALLIS, John (1656). *Arithmetica infinitorum,* Oxford.