RAMIRO DÉLIO BORGES DE MENESES

Universidad Católica Portuguesa
Porto - Portugal

Sentido do infinito segundo D. Hilbert: matemática, lógica e filosofía

1. Introdução

Através de crítica penetrante, Weierstrass criou um fundamento firme para a Análise Matemática. Esclareceu, entre outros, os conceitos de mínimo, de função e de derivada, removeu os defeitos que ainda afectavam o cálculo infinitesimal, depurou-o de todas as noções confusas sobre os infinitésimos e, dessa forma, dominou definitivamente as dificuldades nascidas desse conceito. Graças aos métodos de inferência, fundados sobre o conceito de número irracional e, mais geralmente, sobre a noção de limite, hoje reinam na Análise um acordo e uma certeza totais. E, a despeito das mais audazes e mais variadas técnicas de passagem ao limite, obtém-se a concordância dos resultados nas questões mais complexas, concernentes à teoria das equações diferenciais e integrais.

Não obstante, a fundação do cálculo infinitesimal por Weierstrass ainda não encerrou a discussão acerca dos fundamentos da Análise.

Todavia o significado de infinito em Matemática ainda não foi inteiramente esclarecido. Na verdade, o infinitamente pequeno e o infinitamente grande são excluídos da Análise, segundo Weierstrass, na medida em que as proposições que lhes dizem respeito são reduzidas a relações entre grandezas finitas. Porém, o infinito comparece nas sucessões numéricas infinitas que definem os números reais sendo apreendido como totalidade presente, acabada e autónoma.

Esta apreensão exprime-se através de certas formas de inferência lógica —como quando nos ocupamos de todos os números reais que gozam de certa propriedade ou da existência de números que gozam de uma certa propriedade— as quais sem se sujeitarem a restrição alguma são exigidas para fundamentar a Análise segundo Weierstrass.

Dessa forma pode o infinito reinserir-se na teoria de Weierstrass sem ser colhido pela agudeza da sua crítica. Portanto, é o problema do infinito que nos incumbe esclarecer definitivamente no sentido indicado. E assim como nos processos de passagem ao limite do cálculo infinitesimal, o infinito, no sentido do infinitamente pequeno e do infinitamente grande, mostrou-se como modo de falar, assim devemos reconhecer o infinito no sentido de totalidade, onde figura nas demonstrações como algo meramente aparente. As operações com o infinitamente pequeno foram substituídas por processos finitos, os quais produzem o mesmo resultado e conduzem às relações formais. Também os métodos de inferência com o infinito devem geralmente ser substituídos por processos finitos que produzem exactamente o mesmo resultado, isto é, argumentos e métodos que permitem obter fórmulas e teoremas.[1]

Mas no que toca ao esclarecimento do conceito de infinito, teremos de considerar um ponto de vista mais geral. Podemos reparar que a literatura matemática se encontra intensamente inundada de absurdos, na sua maioria devido ao infinito. Por exemplo, quando, do ponto de vista de uma condição restrita, se exige que, na Matemática, uma qualquer demonstração admite apenas um número finito de passos.

Também antigas objecções que, há muito tempo, supúnhamos resolvidas reaparecem em novos trajes. Novamente, algumas mentalidades aceitam que, mesmo que se possa introduzir um conceito sem o risco de contradições e que se possa provar isso, ainda assim não é certo o direito de ser introduzido. Foi exactamente a objecção que, a seu tempo, prevaleceu contra os números imaginários, quando se dizia: que o seu uso não nos conduzirá a contradições. Porém, a sua introdução não está justificada, pois as grandezas imaginárias não existem. Ora, para verificarmos a legitimidade em introduzir novo conceito, além de provarmos que é consistente, o único critério que ainda podemos impor é a aplicabilidade deste. Na verdade, a aplicabilidade é necessária e constitui a mais alta instância.

No entanto, sempre se acreditou que se poderia contradizer mutuamente afirmações e hipóteses, enquanto conduzam, através de deduções, a outras afirmações.

Com esses reparos, pretendeu-se mostrar que o esclarecimento definitivo da natureza do infinito constitui mais uma necessidade de amplo domínio de interesses científicos do que tributo à honra do entendimento humano.

Desde sempre, o infinito agitou o espírito da humanidade, mais profundamente que outra qualquer questão. Dificilmente encontraremos outra ideia que tenha estimulado a mente de forma tão proveitosa. Porém, o infinito necessita de esclarecimento mais do que outro qualquer conceito.[2]

Se agora propusermos a tarefa de esclarecer a natureza do "infinito", então deveremos começar por lembrar, em poucas palavras, qual a conotação que, na realidade, convém ao infinito.

---

[1] Cf. HILBERT, D.-BERNAYS, P., *Die Grundlagen der Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, Band I, 1914, pp. 6-10.

[2] Cf. HILBERT, D., "Ueber das Unenliche", in: *Mathematiche Annalen*, 95 (Berlin, 1925), p. 161.

1.1 - A continuidade é a primeira impressão que temos dos conceitos naturais e da matéria. Quando consideramos um pedaço de metal ou o volume de um fluido, temos a impressão de que eles são ilimitadamente divisíveis e que uma parte qualquer, por menor que seja, gozará das mesmas propriedades. Mas, em qualquer lugar no qual se refinaram adequadamente os métodos de pesquisa na Física da Matéria se encontraram limites à divisibilidade, que não decorrem da insuficiência das nossas tentativas, mas da natureza das coisas. Consequentemente, a tendência da ciência moderna pode ser compreendida como emancipação do infinito pequeno em vez do antigo princípio: *Natura non facit saltus*. Mas afirmar-se-á o contrário: *a natureza dá saltos*.

É sabido que toda a matéria se compõe de pequenos elementos (os átomos), da combinação e da união dos quais procede toda a variedade de matéria macroscópica.

Mas a física não se deteve na teoria atómica da matéria. No final do século passado apareceu a teoria atómica da electricidade à primeira vista mais estranha. Enquanto até então a electricidade passava por um fluido e a sua imagem era a de um agente que opera continuamente, agora também se mostra constituída de electrões positivos e negativos.

Além da matéria e da electricidade, existe na física uma outra entidade, a energia, para a qual vigora igualmente a lei da conservação. Ora, como hoje se comprova, a própria energia não admite, pura e simplesmente, a fragmentação infinita sem restrições. Planck desvendou os *quanta* de energia.

E o resultado final, em cada caso, é que, na realidade, não se encontra em lugar algum um contínuo homogéneo que admita a divisibilidade, realizando o infinitamente pequeno.

A divisão infinita de um contínuo é apenas uma operação mental. É uma ideia, refutada mediante a observação da natureza e através das experiências da física e da química.[3]

Novamente é a ciência moderna, especialmente a Astronomia, que introduz essa questão e que procura resolvê-la não através dos recursos insuficientes da especulação metafísica, mas mediante motivos amparados na experiência e na aplicação das leis naturais. Aqui também foram encontradas grandes objecções ao infinito. A geometria euclidiana conduz necessariamente à admissão de que o espaço é infinito. Embora a geometria euclidiana seja, na verdade, uma construção e um sistema consistente, não implica que vigore na realidade. Isto (se o espaço real é ou não euclidiano) pode ser determinado por observação e pela experiência. As tentativas de provar a infinitude do espaço contêm gravíssimos erros. Pelo facto de por fora de uma parte do espaço haver mais espaço decorre, apenas, que o espaço será ilimitado, mas não que seja infinito! Porém, finito e ilimitado são qualidades que não se excluem. A pesquisa matemática fornece o modelo natural do mundo finito na denominada geometria elípti-

[3] Cf. HILBERT, D., "Uber den Begriff der Klasse", in: David Hilbert - *Gesammelte Abhandlungen*, Band III, Springer-Verlag, Berlin, 1970, pp. 81-93.

ca. E a renúncia à geometria euclidiana já não é hoje uma especulação puramente matemática ou filosófica, pois também chegamos a isso por outra via que, originalmente, não se relaciona com a questão da finidade do universo. Einstein mostrou a necessidade de abandonar a geometria euclidiana. Apoiado na teoria da gravitação, ele também se referiu a questões cosmológicas e mostrou que é possível haver um Universo finito. Além disso, todos os resultados obtidos na Astronomia são inteiramente compatíveis com a suposição de um Universo elíptico.

1.2 - A finitude da realidade foi estabelecida em duas direcções: tanto para o infinitamente pequeno quanto para o infinitamente grande. Todavia, pode ser verdade que o infinito possui um lugar bem justificado no nosso pensamento e que desempenhe o papel de um conceito indispensável. Observemos, pois, como o infinito se comporta na ciência matemática e, por agora, interroguemos a mais pura e mais ingénua proliferação do espírito humano a Teoria dos Números. Tomemos uma fórmula da variedade de fórmulas elementares, por exemplo:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1).$$

Como podemos substituir n por qualquer número interio, por exemplo, por $n=2$ ou $n=5$. Esta fórmula pode tomar uma infinidade de valores e isso é, evidentemente, a principal qualidade desta. Portanto, ela fornece a fórmula que representa a solução de um problema aritmético e que exige uma ideia própria para a sua prova, enquanto as igualdades numéricas especiais

$$1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11$$

se podem verificar pelo cálculo, não oferecendo qualquer interesse especial.

Obtemos uma interpretação distinta e completamente singular, bem como a apreensão dos princípios do conceito de infinidade, por meio do método dos elementos ideais. Já, na geometria elementar do plano, o método dos elementos ideais encontra aplicação. Nesse contexto, somente os pontos e as rectas do plano são objectos originalmente reais e efectivamente existentes. Para eles vigora, entre outros, o axioma da associação: por dois pontos passa sempre uma única recta. Daqui decorre que duas rectas intersectam-se, no máximo, num ponto. Todavia não vigora o teorema de que duas rectas se intersectam sempre num ponto, já que as duas rectas podem ser paralelas. Sabemos que, introduzindo elementos ideais, são pontos infinitamente afastados. Assim, conseguimos obter o teorema de que duas rectas se intersectam num e só ponto como verdade universal.[4]

Os elementos ideais "infinitamente afastados" têm a vantagem de tornar o sistema das leis de associação tão simples e tão claros quanto possível. Além disso, da simetria entre pontos e rectas, decorre o princípio da dualidade na geometria.

Um outro exemplo do emprego de elementos ideais é a utilização dos números complexos na Álgebra, para simplificar teoremas acerca da existência e números de raízes numa equação.

Assim como em Geometria utilizamos uma infinidade de rectas paralelas entre si, para definir um ponto ideal, em certos sistemas, utilizamos uma infinidade de pontos ideais para definir um *número ideal*. E este é o emprego mais genial do princípio dos elementos ideais. Em geral, se isso ocorre no interior de um corpo de números algébricos, reencontraremos as simples e bem conhecidas leis da divisibilidade, vigentes para os habituais números inteiros 1, 2, 3, 4, ... Aqui já estamos no domínio da Aritmética Superior.

Aproximemo-nos agora da mais bela estrutura da Matemática, e da mais ramificada, a Aritmética. Todos sabem o papel decisivo que o infinito aí desempenha e que a Análise Matemática, de certo modo, constitui uma sinfonia do infinito.

Os avanços vigorosos, obtidos pelo cálculo infinitesimal, devem-se principalmente à operação com sistemas matemáticos de uma infinidade de elementos. Tal como foi fácil identificar o "infinito" como "muito grande", logo surgiram inconsistências como os denominados paradoxos do cálculo infinitesimal já parcialmente conhecidos na antiguidade pelos sofistas. Foi fundamental que se reconhecesse a impossibilidade de serem estendidos ao contexto do infinito muitos teoremas válidos para o contexto finito, como a parte é menor que o todo, a existência de mínimo e a comutabilidade da ordem das parcelas ou dos factores de uma soma ou produto. No início deste discurso, referi que, graças especialmente à perspicácia de Weierstrass, essas questões foram plenamente esclarecidas. Hoje em dia, a Análise é um regulamento infalível, não só no seu domínio mas tornou-se instrumento prático para o uso do infinito.[5]

Mas a Análise não nos conduz à compreensão da natureza do finito. Pelo contrário, isso só nos foi facilitado por uma disciplina, situada mais perto do modo filosófico de considerar as coisas, que foi convidada a lançar uma nova luz sobre todas as complexas questões sobre o infinito. Esta disciplina é a teoria dos conjuntos, criada por Cantor, que dá lugar à teoria dos números transfinitos, a qual constitui o próprio núcleo da doutrina deste matemático. Ela parece-me a mais admirável fluorescência do espírito matemático e mesmo uma das mais altas façanhas da actividade intelectual. O que é, então, esta teoria?

[4] Cf. HILBERT-D. BERNAYS, P., *Die Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Stuttgart, 1968, pp. 20-25.

[5] Cf. LORTA, G., *Storia della Matematica*, Società Tipografia Editricè Nazionale, 3 Volume, Torino, 1933, pp. 16-29.

Se quisermos caracterizar, em poucas palavras, a nova concepção do infinito sugerida por Cantor, poderemos dizer que na Análise lidamos apenas com o infinitamente pequeno e o infinitamente grande, conceitos limitantes, como alguma coisa que está a tornar-se e a aparecer. Lidamos com o denominado "infinito potencial". Este manifesta-se, quando, por exemplo, consideramos a própria totalidade dos números 1, 2, 3, 4, ... como unidade acabada ou quando consideramos os pontos de um segmento como totalidade de coisas que existem todas em simultâneo. Esse tipo de infinito é designado infinito actual.

Já Frege e Dedekind, altamente estimados pelos seus estudos acerca dos fundamentos da matemática, tinham usado o infinito actual, independentemente um do outro, para fundar a Aritmética, sem quaisquer intuições ou experiências, baseadas somente sobre a pura lógica, fazendo apenas uso de deduções puramente lógicas. Dedekind esforçou-se por derivar a noção de número finito, de modo puramente lógico pelo emprego essencial do conceito de conjuntos infinitos, em vez de obtê-la pela intuição. Porém, Cantor configurou o conceito de infinito actual. Contemplemos os dois exemplos de infinito:

1. 1, 2, 3, 4, ..., n, n+1
2. Os pontos do segmento de 0 a 1 ou, equivalentemente, a totalidade dos números reais entre 0 e 1.

É perfeitamente natural tratar estes exemplos do ponto de vista do seu tamanho. Mas este tratamento revela resultados surpreendentes que para os matemáticos de hoje em dia são familiares. Consideremos o conjunto de todos os números racionais, isto é, de todas as fracções: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, ..., 3/8, ... Demonstra-se que, na perspectiva da pluralidade, este conjunto não é maior que o conjunto dos números inteiros. Dizemos que os números racionais podem ser contados de modo habitual, isto é, são numeráveis. E o mesmo ocorre com o conjunto das suas raízes, portanto com o conjunto de todos os números algébricos. O segundo exemplo é análogo ao primeiro. Surpreendentemente, o conjunto de todos os pontos de um quadrado ou de um cubo não é maior que o conjunto dos pontos do intervalo de 0 a 1. E o mesmo facto acontece com o conjunto das funções contínuas. Quem pela primeira vez examinasse estes aspectos poderia concluir que, pela perspectiva da pura pluralidade, haveria apenas um único infinito. O que é falso! Os conjuntos, nos dois exemplos, não são equivalentes. Pelo contrário, o conjunto (2) não é numerável. Logo, é maior que o conjunto (1). Aqui se insere o que é novo e característico da teoria de Cantor.[6]

Os pontos de um intervalo não podem ser contados segundo o modo habitual, isto é, enumerando 1, 2, 3, ... Mas, admitindo o infinito actual, não precisamos parar por aqui, pois poderemos considerar os objectos contados como um conjunto infinito, existindo como um todo, mediante certa ordem. Se, tal como em Cantor, designarmos um tipo desta

[6] Cf. FRAENKEL, A., *Essays on the Foundations of Mathematics*, At the Magnes Press, Jerusalem, 1966, pp. 309-311.

ordem por ω, a contagem contínua naturalmente com $\omega+1$, $\omega+2$, ... até $\omega+\omega$ ou 2ω é novamente:

$2\omega+1, 2\omega+2, 2\omega+3, ..., 2\omega+\omega$ *ou* 3ω,

ou ainda

$2\omega, 3\omega, 4\omega, ... \omega\cdot\omega.(ou\ \omega^2), \omega^2+1, ...$.

De modo que, finalmente, obteremos a tabela:

$1, 2, 3, ...$

$\omega, \omega+1, \omega+2, ...$

$2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, ...$

$3\omega, 3\omega+1, 3\omega+2, ...$

.

.

.

$\omega^2, \omega^2+1, ...$

$\omega^2+\omega, \omega^2+2\omega, \omega^2+3\omega$

$2\omega^2, 2\omega^2+1, ...$

$2\omega^2+\omega, 2\omega^2+2\omega, ...$

$\omega^3, ...$

$\omega^4, ...$

.

.

.

$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, ...$

São estes os primeiros números transfinitos de Cantor como os números da segunda classe numérica. Chegamos a eles pela contagem dos números que estão acima do infinito numerável, isto é, através do prolongamento natural e univocamente definido da contagem habitual com números finitos. Como até então contamos, num conjunto, os elementos de ordem 1, 2, 3, ..., contaremos agora os elementos de ordem ω, $\omega+1$, ... ω^ω.

Neste contexto, evidentemente, surge a questão da possibilidade de, com esses números transfinitos, se contarem também conjuntos reais que não são contáveis de maneira usual.

Na base destas ideias, Cantor edificou, com grande sucesso, a teoria dos números transfinitos e criou um cálculo perfeito para eles. Finalmente, graças ao importante trabalho de Frege, Dedekind e Cantor o infinito foi elevado ao trono e saboreou o instante do mais elevado triunfo.[7]

A reacção não tardou a chegar e mostrou-se dramática. Tudo foi exactamente análogo ao que ocorreu durante o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. No entusiasmo da descoberta de novos e importantes resultados, os matemáticos prestaram pouca atenção à legitimidade dos métodos dedutivos. Com efeito, o mero emprego das definições e dos métodos dedutivos que, gradualmente, se tornaram habituais, produziram contra-

[7] Cf. FREGE, G., *Kleine Schriften*, Zweite Auflage, G. Olms-Verlag, 1990, pp. 163-166.

dições, originando paradoxos na teoria dos conjuntos, que aos poucos se tornaram cada vez mais graves. Foi o caso de uma contradição encontrada por Zermelo e Russel, cuja divulgação na comunidade matemática teve efeito devastador. Perante esses paradoxos, Dedekind e Frege renunciaram ao seu ponto de vista e abandonaram a polémica. Dedekind hesitou por longo tempo em permitir uma nova edição de seu notável ensaio "Was sind und was sollen die Zahlen". Também Frege reconheceu como errónea a inclinação do seu livro "Grundgesaetze der Arithmetik", tal como confessou no seu epílogo. E os mais veementes ataques foram dirigidos, dos mais diversos lados, contra a doutrina de Cantor. A reacção foi tão violenta que mesmo os conceitos mais comuns e proveitosos, e os métodos dedutivos mais simples e importantes da Matemática, foram atacados tendo o seu emprego sido ilícito. Na verdade, não faltaram defensores do pensamento clássico. Porém, as suas acções de defesa foram muito débeis e, além disso, não se concentraram nos pontos vitais. Foram propostas numerosas e variadas explicações para os paradoxos.[8]

1.3 - Devemos reconhecer que não é suportável por muito tempo a situação em que hoje nos encontramos perante os paradoxos. Poderemos perguntar: Se na Matemática, que se constitui como modelo de certeza e de veracidade, as construções conceituais e as inferências, por todos amplamente aprendidos, ensinados e usados, conduzem ao absurdo, então onde se encontrarão a certeza e veracidade, que o pensamento matemático recusa? Existe porém uma via plenamente satisfatória para enfrentar os paradoxos sem trair esta ciência.

Os desejos e atitudes, que nos ajudaram a encontrar esta via e que nos mostram a direcção a tomar, foram:

1. Onde quer que haja esperança de salvação, iremos investigar cuidadosamente definições proveitosas e métodos dedutivos. Iremos cuidar deles, ampará-los e torná-los úteis;
2. Devemos estabelecer para toda a matemática a mesma certeza pelas nossas deduções como se apresenta na Aritmética, sobre a qual ninguém alimenta dúvidas e na qual contradições e paradoxos decorrem apenas do nosso descuido.

Só alcançaremos estes objectivos depois de elucidarmos completamente a natureza do infinito.

Até aqui verificámos que o infinito, na verdade, não se encontra na realidade, sejam quais forem as experiências e as observações e seja qual for a ciência a que recorramos. Será o pensamento acerca das coisas tão discrepante dessas coisas? Poderá o processo de pensar ser tão diferente do actual? Em suma, poderá o pensamento estar tão afastado da realidade? Pelo contrário, não é claro que, quando acreditamos reconhecer a realidade do infinito, em qualquer acepção, apenas nos deixamos induzir pela

[8] Cf. RUSSELL, B., "Les Paradoxes de la logique", in: *Revue de Métaphysique et de Morale*, 14 (1906) pp. 60-63.

circunstância de termos encontrado dimensões grandes ou pequenas e que tão frequentemente ocorrem na realidade? E a dedução lógica, alguma vez nos enganou ou nos abandonou, quando a empregámos em coisas ou em acontecimentos reais? Não, a dedução lógica é imprescindível. Ela induz-nos em erro apenas quando aceitamos definições arbitrárias, em especial aquelas que envolvem uma infinidade de objectos. Então, aplicamos a dedução lógica de modo inadmissível, isto é, não atendemos as condições evidentemente necessárias ao seu emprego. E, quanto ao reconhecimento de que tais condições existam e de que devam ser observadas, encontramo-nos de acordo com os filósofos, sobretudo Kant. O pensador de Koenigsberg achava —e isto constitui uma parte integrante da sua doutrina— que a Matemática dispõe de um conteúdo consolidado independentemente da lógica e que, por isso, jamais poderá ser fundada apenas sobre a lógica, motivo pelo qual os esforços de Frege e de Dedekind seriam malogrados.

Como condição adicional para usar a dedução lógica e realizar operações lógicas algo deve ser dado como certos objectos concretos extra-lógicos, presentes intuitivamente na experiência directa, antes de todo o pensamento. Para que as deduções lógicas sejam certas, devemos estar aptos a ver cada aspecto destes objectos e as suas propriedades, diferenças, sequências (e as proximidades devem ser dadas) juntamente com os objectos, como algo que não pode ser reduzido a algo mais e que não requer qualquer redução. Esta é a filosofia que se considera necessária à Matemática e, geralmente, a todo o pensamento, a todo o entendimento e a toda comunicação científica. Na Matemática, e de acordo com esta teoria, são objecto da nossa consideração os próprios símbolos, cuja estrutura é imediatamente reorganizada.

Consideremos a natureza e os métodos da Teoria dos Números como finita. Certamente que ela é constituída mediante estruturas numéricas obtidas através de considerações materiais e intuitivas. Porém, a Matemática não consiste unicamente em equações numéricas, nem tão pouco pode ser reduzida a elas. Podemos afirmar que ela é instrumento quando aplicada aos números inteiros e produz equações numéricas correctas. Para realizar tal investigação, dispomos apenas do mesmo método concretamente finito, como foram usados na construção da própria Teoria dos Números, para derivar as equações numéricas. Esta exigência científica pode de facto ser encontrada, isto é, será possível obter por métodos puramente intuitivos e finitos, exactamente como instituímos a verdade na Teoria dos Números, determinando também aqueles juízos que garantem a validade do instrumento matemático.[9]

Na Teoria dos Números, teremos os símbolos numéricos

1, 11, 111, 1111,

[9] Cf. HARDY, G. H.-WRIGHT, E. M., *An introduction to the Theory of Numbers*, fifth edition, Clarendon Press, Oxford, 2002, pp. 1-10.

onde cada símbolo é reconhecível pelo facto de conter somente a "unidade". Estes símbolos numéricos, que são eles mesmos a nossa matéria, não têm qualquer significado. Mas requeremos em adição a estes símbolos, mesmo na Teoria Elementar do Número, outros símbolos que têm significado e que servem para facilitar uma comunicação. Por exemplo, o símbolo 2 é usado como abreviatura para o símbolo numérico 11 e o símbolo 3 como abreviatura para o símbolo numérico 111. Além disso, usamos símbolos como +, = e > para comunicar.

Logo, 2+3 = 3+2 pretende comunicar que 2+3 e 3+2, quando as abreviaturas são levadas em conta. São o mesmo símbolo numérico, ou seja, o símbolo 11111. Similarmente 3>2 serve para comunicar o facto de que o símbolo 3, isto é, 111 é maior do que o símbolo 2, isto é, 11, ou seja, que o último símbolo é uma parte apropriada do anterior.

Usamos também letras a, b, c para uma comunicação. Assim b>a significa que o símbolo numérico b é maior do que o símbolo numérico a. Deste ponto de vista, $a+b = b+a$ significa o facto de que o símbolo numérico $a+b$ é o mesmo que $b+a$. O conteúdo deste significado pode também ser provado com dedução material. De facto, este tipo de tratamento intuitivo pode levar-nos longe.

Mas poderemos dar um exemplo onde este método intuitivo é ultrapassado. O maior número primo conhecido tem 39 dígitos:

p = 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727.

Por um método bem conhecido, devido a Euclides, podemos dar uma prova que remete para dentro da estrutura finita e da proposição que, entre $p+1$ e $p!+1$, existe pelo menos um "número primo". A própria proposição encaixa-se na aproximação finita e a expressão "existe" serve apenas para abreviar a expressão: é certo que $p+1$, $p+2$, $p+3$ ... ou $p!+1$ são números primos.

Além disso, existe um número primo tal que:

1. > p e ao mesmo tempo é
2. ≤ p! + 1.

Estamos aptos para formular um teorema que defini e somente uma parte do que o teorema de Euclides expressa, ou seja, o teorema que diz "existe um número primo maior do que p". Embora este teorema seja muito mais fraco em termos de conteúdo —afirma somente parte do teorema— a passagem do teorema de Euclides a este parece completamente inofensivo.

A proposição "existe" com determinada propriedade encontra-se em perfeita conformidade com a nossa aproximação finita. Mas uma proposição, como ambos $p+1$ ou $p+2$ ou $p+3$ ... ou (sem fim) ..., tem determinada propriedade. É ela mesmo um produto lógico infinito. Do nosso ponto de vista, uma proposição existencial da forma "existe um número com determinada propriedade" tem somente a significância de uma proposição parcial, isto é, considera-se como parte de uma proposição determinada. Um formulário mais preciso pode, entretanto, ser desnecessário para muitas finalidades.

A análise de uma proposição existencial, cujo conteúdo não possa ser expresso por uma disjunção finita, leva-nos ao infinito. Similarmente, negando uma proposição geral, isto é, que se refere a símbolos numéricos arbitrários, expressa uma proposição do transfinito. Por exemplo, se a é um símbolo numérico, então $a+1 = 1+a$ é universalmente verdadeiro, sendo na nossa perspectiva incapaz da negação finita. Veremos isto melhor se considerarmos que este resultado não pode ser interpretado como conjunção de muitas equações numéricas infinitas por meio de "e", mas somente como julgamento hipotético que afirma algo para o caso, quando um símbolo numérico é apresentado. Consequentemente, não podemos discutir uma equação tal como a referida anteriormente, onde um símbolo numérico arbitrário ocorre. Tal argumento, sendo uma aplicação da lei do terceiro excluído, fica na pressuposição que o resultado da validade universal de tal equação é capaz de negação.[10]

Se permanecermos dentro do domínio das proposições finitas, temos, como regra, leis lógicas complicadas. A sua complexidade torna-se não maneável quando as expressões "tudo" e "existe" são combinadas e quando ocorrem em expressões dentro de outras. Em resumo, as leis lógicas que Aristóteles ensinou e que os homens usaram desde sempre, começaram a pensar-se que não se mantinham. O Filósofo ficou-se por uma semântica lógica na *Analitica Prior*, sem possibilidade de uma sintaxe. Poderíamos, naturalmente, desenvolver as leis lógicas que se mantêm para o domínio das proposições finitas. Mas não adiantaria nada desenvolver tal lógica, porque não queremos deixar de usar as leis da lógica de Aristóteles.

1.4 - Refira-se como $i=\sqrt{-1}$ foi introduzido para preservar, na forma mais simples, as leis da Álgebra (por exemplo, as leis sobre a existência e número das raízes de uma equação). Os factores ideais foram introduzidos para preservar as leis da divisibilidade para todos os números algébricos (por exemplo, um divisor ideal comum para os números 2 e $1+\sqrt{-5}$ foram introduzidos, embora tal divisor não existe) e similarmente para manter as regras formais simples da lógica ordinária de Aristóteles ao suplementar as proposições finitas com proposições ideais. É um pouco irónico que os métodos dedutivos, que Kronecker atacou, sejam as contrapartes exactas de que Kronecker admirou tão entusiasticamente no trabalho de Kummer na Teoria dos Números, considerando-se como realização mais elevada da Matemática.[11]

É notável também como facto prometedor que para obter proposições ideais necessitamos somente, para continuar numa forma natural e óbvia,

[10] Cf. KREISEL, G.-KRIVINE, J. L., *Éléments de Logique Mathématique*, Dunod, Paris, 1967, pp. 18-26.

[11] Cf. BAKER, A., *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975, pp. 24, 48, 53.

do desenvolvimento que a teoria dos fundamentos se tem submetido. Certamente, devemos aperceber-nos que mesmo a matemática elementar vai além do ponto de vista da intuitiva Teoria dos Números, como a temos interpretado. Não inclui o método da computação algébrica com letras. As fórmulas foram usadas exclusivamente para uma comunicação da Teoria dos Números. As letras traduzem símbolos numéricos. Na Álgebra, consideramos expressões contendo letras como estruturas independentes que formalizam teoremas materiais da Teoria dos Números. No lugar das proposições sobre símbolos numéricos, temos fórmulas que são elas mesmas os objectos concretos do estudo intuitivo. No lugar da prova material do número teórico, temos a derivação de uma fórmula, através de outra, de acordo com regras determinadas.

Daqui, como vemos na Álgebra, ocorre um proliferação de objectos finitos. Até agora os únicos objectos eram os símbolos numéricos como 1, 11, ..., 11111. Só estes eram os objectos do tratamento material. Mas a prática matemática vai mais além, mesmo na Álgebra. Certamente, mesmo quando do nosso ponto de vista finito uma fórmula é válida relativamente ao que significa, por exemplo,

$$a+b = b+a$$

onde a e b são símbolos numéricos particulares. Não obstante, preferimos não usar esta forma de comunicação, mas substitui-la pela fórmula:

$$a+b = b+a.$$

Esta última fórmula não está em nenhuma comunicação imediata de alguma coisa com significado. Será simplesmente uma determinada estrutura formal, cuja relação às últimas proposições finitas serão:

$$2+3 = 3+2,$$

$$5+7 = 7+5,$$

consiste no facto de que, quando a e b são substituídos na fórmula pelos símbolos numéricos 2, 3, 5, 7, as proposições finitas são obtidas. Assim, concluímos que a, b, $=$, $+$, assim como toda a fórmula $a+b = b+a$, não significam nada sozinhas e não mais do que os símbolos numéricos. Ainda assim podemos derivar dessa fórmula outras fórmulas a que atribuímos o significado, ou seja, interpretando-as como comunicações de proposições finitas. Generalizando esta conclusão, concebemos a matemática como suporte de dois tipos de fórmulas. Primeiramente, aquelas a que as comunicações importantes de proposições finitas correspondem; e, em segundo, outras fórmulas que não significam nada e que são as estruturas ideais de uma teoria. Em Matemática encontramos proposições finitas que contêm apenas símbolos numéricos, por exemplo:

$$3>2,\ 2+3 = 3+2,\ 2=3,$$

que do nosso ponto de vista finito são imediatamente intuitivas e percebidas sem recurso a qualquer outra coisa. Estas proposições podem ser negadas verdadeira ou falsamente. Pode-se aplicar a lógica de Aristóteles sem restrições, sem ter precauções especiais. O princípio da não-contradição mantém-se para elas, isto é, a negação de uma destas proposições e da própria proposição não podem ser ambas verdadeiras. *Tertium non datur* mantêm-se para elas, isto é, uma proposição ou a sua negação é verdadeira. Para dizer que uma proposição é falsa, será equivalente dizer que a sua negação é verdadeira. Em adição a estas proposições elementares, que não apresentam problemas, também encontramos mais proposições finitas. Surgem proposições finitas que não poderiam ser divididas em proposições parciais. Finalmente, introduzimos proposições ideais, para que as leis ordinárias da lógica se mantivessem universalmente. Mas como estas proposições ideais, ou seja, as fórmulas não significam nada, dado que não expressam proposições finitas e as operações lógicas não podem ser materialmente aplicadas, enquanto elas podem ser proposições finitas. É, assim, necessário formalizar as operações lógicas e as provas matemáticas. Esta formalização implica traduzir relações lógicas em fórmulas. Daqui, em adição aos símbolos matemáticos, devemos também introduzir símbolos lógicos:

$$\cdot \qquad \vee \qquad \rightarrow \qquad \sim$$

(*e*) (*ou*) (*implicação*) (*negação*)

Além das variáveis matemáticas a, b, c, ... vamos ter também variáveis lógicas, ou seja, variáveis proposicionais A, B, C, ...[12]

Felizmente a mesma preestabelecida harmonia que observamos como operativa na história do desenvolvimento da ciência, que ajudou Einstein, dando-lhe o cálculo invariante já totalmente desenvolvido para a teoria gravitacional, vem também à nossa cabeça. Encontramos o cálculo lógico já trabalhado com certo avanço. Para falar a verdade, o cálculo lógico foi desenvolvido originalmente de um ponto de vista completamente diferente. Os símbolos lógicos foram originalmente introduzidos a fim de se transmitir conhecimento. Ainda é consistente com o nosso ponto de vista finito negar todo o significado aos símbolos lógicos, tal como negamos o significado aos símbolos matemáticos e declarar que as fórmulas do cálculo lógico são proposições ideais que não significam nada sozinhas. Possuímos, no cálculo lógico, uma linguagem simbólica que poderá transformar proposições matemáticas em fórmulas e expressar a dedução lógica por meio de procedimentos formais. Em analogia à transição da Teoria de Números material à Álgebra formal, tratamos agora os sinais e os símbolos de operação do cálculo lógico pela abstracção do seu significado. Assim obtemos finalmente, em vez do conhecimento matemático material que é comunicado na língua ordinária, apenas um conjunto de fórmulas contendo os símbolos lógicos que são gerados sucessivamente de acordo com certas regras. As regras onde as fórmulas são derivadas de outras, correspondem à dedução material. A dedução material é substituída por um procedimen-

[12] Cf. LEWIS, C. I.-LANGFORD, H., *Symbolic Logic*, second edition, Dover, New York, 1939, pp. 10-16.

to formal governado por regras. A transição rigorosa de um tratamento simplista para um formal é efectuada. Consequentemente, para ambos os axiomas (que mesmo assim é visto ingenuamente como verdades básicas, têm sido tratados por muito tempo na axiomática moderna como meras relações entre conceitos) e para o cálculo lógico foi suposto originalmente para ser uma língua diferente.

Certas fórmulas que servem como base para a construção da estrutura formal da matemática são chamados de "axiomas".[13]

1.5 - O nosso programa dá-nos a escolha de axiomas para a teoria da prova. Contudo, uma certa quantidade de arbitrariedades existem na escolha de axiomas como na Geometria. Certos grupos de axiomas são distinguíveis qualitativamente. Aqui temos alguns exemplos tirados de cada um destes grupos:

I. Axiomas da implicação

i. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(adição de uma hipótese)

ii. $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
(eliminação de uma proposição)

II. Axiomas da negação

i. $\{A \rightarrow (B \cdot \sim B)\} \rightarrow \sim A$
(lei da contradição)

ii. $\sim\sim A \rightarrow A$
(lei da dupla negação)

Os axiomas nos grupos I e II são postulados do cálculo proposicional.

III. Axiomas transfinitos

i. $(a)A(a) \rightarrow A(b)$
(dedução do universal para o particular como postulado de Aristóteles)

ii. $\sim (a)A(a) \rightarrow (\exists a) \sim A(a)$
(se um predicado não se aplica universalmente, então existe um contra-exemplo)

iii. $\sim (\exists a)A(a) \rightarrow (a) \sim A(a)$
(se não há um nenhum exemplo de uma proposição, então surge a proposição falsa para todo "a").

Nesta altura descobrimos o facto notável que estes axiomas transfinitos

[13] Cf. POPPER, K., "New Foundations for Logic", in: *Mind*, 56-57 (1947), p. 48.

podem ser derivados de um único que contém o sentido principal do tão conhecido **axioma da escolha**, o mais disputado na Matemática:

$$(i')A(a) \rightarrow A(\epsilon A),$$

onde ϵ é transfinito como função de escolha lógica.

Então os seguintes axiomas específicos da matemática são adicionados aos dados:

IV. Axiomas da identidade
 i. $a=a$
 ii. $a=b \rightarrow \{A(a) \rightarrow A(b)\}$

V. Axiomas dos números
 i. $a+1 \neq 0$
 ii. O axioma da indução

Estamos agora em posição para continuar a nossa teoria da prova e para construir o sistema de fórmulas, isto é, a Matemática. Há apenas uma condição, embora necessária, ligada ao método de elementos ideais. Esta condição é uma *prova de consistência* para a extensão do domínio pela adição de elementos ideais. É feita somente se a extensão não causa contradições que apareçam no limitado domínio ou, por outras palavras, apenas se as relações que se obtêm entre as estruturas antigas estão suprimidas e forem sempre válidas no domínio clássico.[14]

O problema da consistência é facilmente assegurado nas circunstâncias actuais. Não podemos ter "$1 \neq 1$" como a última fórmula de uma prova, ou por outras palavras, "$1 \neq 1$" não é uma fórmula provável. Esta tarefa pertence tanto ao domínio do tratamento infinito, quanto à tarefa de encontrar uma prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ na Teoria dos Números. Surge uma prova impossível de encontrar pelos dois símbolos numéricos a e b que estão na relação $a^2 = 2b^2$, dado que não podemos produzir dois símbolos numéricos com determinada propriedade. Uma prova formalizada, como símbolo numérico, é um objecto concreto e visível. Além disso, a propriedade usada na última fórmula, ou seja, "$1 \neq 1$", é uma propriedade concreta na prova. E desde que seja possível, na verdade, provar que é impossível começar uma prova que tem tal fórmula, justificamos desse modo a introdução de uma proposição ideal.

É também uma surpresa agradável descobrir que, ao mesmo tempo, resolvemos um problema que atormentou os matemáticos por muito tempo, ou seja, o problema de provar a consistência dos axiomas da Aritmética. Onde quer que o método axiomático seja usado, o problema da prova da consistência levanta-se. Na Geometria e na teoria da Física, a prova da consistência é efectuada reduzindo a sua capacidade aos axiomas da Aritmética. Mas obviamente não podemos usar este método para pro-

[14] Cf. QUINE, W. V., "Designation and Existence", in: *Journal of Philosophy*, 36 (1939) pp. 10-16.

var a consistência da própria Aritmética. A nossa teoria da prova, baseada no método dos elementos ideais, permite-nos usar este último passo importante e constitui uma chave da doutrina axiomática.

A teoria da prova, que esboçamos aqui, não é capaz de fornecer uma base sólida para os alicerces da matemática, mas também acredito, para fornecer um método geral para o tratamento de questões fundamentais, que os matemáticos têm sido incapazes de levar a cabo esta orientação.[15]

1.6 - No aspecto filosófico, a expressão da sucessão dos números naturais não apresenta um fim, visto que depois de cada "número natural" há outro (sucessor primário) onde esta sucessão possui infinitos elementos.

Com efeito, a sucessão dos números naturais constitui o exemplo mais simples do que chamamos o infinito matemático. Pode considerar-se que se trata de um "infinito potencial" —por maior que seja um número natural, há sempre outro depois dele— por oposição ao chamado "infinito actual", conceito que intervém sempre que, num raciocínio haja que atender "simultaneamente" a todos os elementos de um conjunto não finito. Assim, os dois graus analógicos de "infinito" possuem um elemento comum, no âmbito da quantidade abstracta, referindo-se como propriedade formal de um conjunto finito devido à sucessão numérica.

A existência do "infinito actual" (aleph-zero) tem sido objecto de alguma contestação quer para filósofos, quer para matemáticos. Na verdade, foi sempre um conceito que dominou toda a Matemática, tendo desempenhado um grande papel importante a moderna teoria dos conjuntos criada por Cantor.[16]

Contudo, já a propósito desta teoria (dos conjuntos) se viu como caracterizar os conjuntos: qual o significado que passaram a ter frases como dois conjuntos têm o mesmo número de elementos. Assim, afirmações como o todo é maior (>) do que as partes, que valiam para conjuntos finitos, deixaram de ter sentido para conjuntos, que são "infinitos", precisamente como resultado de novas definições.

Mas, o uso não orientado do conceito de conjunto depressa conduziu a alguns paradoxos, sendo o primeiro apresentado por Russel, em 1901, que obrigara a outra revisão crítica dos fundamentos da Matemática, com o objectivo de encontrar para o raciocínio formal, uma base lógica que se possa mostrar isenta de contradições.

Na linha de uma reflexão sobre o "infinito", quando D. Hilbert julgava estar à beira de provar a consistência da Aritmética, surgiu, em 1931, o teorema de Gödet a mostrar que se uma teoria é não contraditória e admite um modelo, que contenha o sentido formal do infinito e da aritmética elementar, então existem, nessa teoria, proposições que não são "decidí-

[15] Cf. QUINE, W. V., *Elementary Logic*, Harvard University Press, Harvard, 1985, pp. 10-20.

[16] Cf. KURATOWSKI, K.-MOSTOWSKI, A., *Set Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968, pp. 61, 68, 86, 169, 173, 179, 182, 188, 191, 195, 206.

veis", quer dizer: nem demonstráveis nem refutáveis. Daqui o interesse do infinito no sentido lógico e no domínio da gnoseologia.[17]

Com efeito, em 1963, chegou-se à conclusão que, tal como foram possível criar no século XIX geometrias não-euclidianas, não aceitando o quinto postulado das rectas paralelas de Euclides, também será possível desenvolver uma teoria não-cantoriana dos conjuntos, alterando um dos axiomas da teoria o chamado "axioma da escolha", o qual poderá ser substituído pela negação da hipótese do contínuo.

Mas, se a intuição criadora continuará a ser um elemento vital de toda a Matemática, não menos o será no caso do Infinito.[18]

Tal como o contínuo e a densidade, o infinito é uma propriedade formal do número. Desde os números naturais até aos complexos esta qualidade está presente (secundária), porque existe formal e transcendentalmente no pensamento do matemático, podendo ou não fundamentar-se na realidade.

Para uma adequada noção de infinito e para uma reflexão sobre as relações entre o finito e o infinito seria necessária uma filosofia que conjugasse as proposições de Platão, Aristóteles, Plotino e S. Tomás de Aquino, N. de Cusa e da filosofia do espírito, que unisse a participação, a causalidade, a analogia e a teoria do acto e da potência.

Só uma autêntica metafísica do acto de ser resolveria as antinomias aparentes e mostraria que a transcendência da acção humana implica, no seu movimento, a transcendência metafísica do acto de ser. Além do horizonte que a Matemática nos abre sobre o infinito, necessariamente surgem as perspectivas necessárias, sobre os aspectos ontológicos e gnoseológicos, que afectam o mundo do "Infinito".[19]

Mas uma coisa é o infinito em matemática e outra o "infinito" em metafísica.

1.7 - O infinito matemático ainda possui uma outra expressão que, tendo a ver com o Cálculo Infinitesimal, se denomina "infinitamente pequeno". Será uma variável que tem por limite o "zero". A variável independente x diz-se infinitamente pequena se puder assumir qualquer valor de um intervalo que tem zero por extremo. Representa-se por $x \to 0$. Se a variável y é dependente de x e se tem:

$$\lim_{x \to a} y = 0,$$

Diz-se que y é infinitamente pequeno no ponto a, ou para $x=a$, ou nas vizinhanças de a.

[17] Cf. GONSETH, F., *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1939, pp. 25-27.

[18] Cf. KAUFMANN, F., *Das Unendliche in der Mathematik und sein Ausschaltung*, Deuticke, Wien, 1930, pp. 40-68.

[19] Cf. MANNO, A. G., *Filosofia della Matematica, natura e fondamento della matematica*, Marzorati Editore, Milano, 1972, pp. 196-198.

Também se diz que y é infinitamente pequeno com $x-a$. Se y e z, funções da variável independente x, forem infinitamente pequenos e simultâneos.[20] Assim, infinitamente pequenos e simultâneos y e z, referindo-se pela mesma ordem de grandeza se:

$$\lim_{x \to a} \frac{z}{y} = c \neq 0$$

O infinitamente pequeno z diz-se da ordem k a respeito de y, quando for:

$$\lim_{x \to a} \frac{z}{y^k} = c \neq 0$$

Naturalmente, que o "infinitamente pequeno" z diz-se de ordem superior à de y, se:

$$\lim_{x \to a} \frac{z}{y} = 0$$

e diz-se de ordem inferior à de y, quando:

$$\lim_{x \to a} \frac{z}{y} = \infty.$$

Poderemos dizer que uma função $x^b \log x$ é infinitamente pequena com x, se $b > 0$ e é infinitamente grande se $b \leq 0$. A razão desta função para x^b e $x^{b-k} \log x$, cujo limite para $x \to 0$ é nulo, se $b > k$ e é infinito se $b \leq k$. A ordem de grandeza de $x^b \log x$ a respeito de x não poder ser expressa por nenhum número real.[21]

Dos infinitamente pequenos simultâneos surge um para infinitamente pequeno da 1ª ordem ou infinitamente pequeno principal. Se um dos infinitamente pequenos for variável independente, é esse que em geral se toma principal.

Todavia, a soma de infinitamente pequenos da mesma ordem, em número finito, é um infinitamente pequeno da mesma ordem. A soma de infinitamente pequenos de ordens diferentes, mas em número finito, é igual à menor das ordens das parcelas.

Dois infinitamente pequenos dizem-se equivalentes quando o limite da sua razão for igual a um número real diferente de 0, 1 é quando forem da mesma ordem de grandeza. No cálculo da razão de dois infinitamente pequenos, qualquer deles se pode substituir por outro, que lhe seja equivalente. Se β for infinitamente pequeno de ordem k a respeito de x:

$$\lim \frac{\beta}{x^b} = c \neq 0$$

para valores diferentes e próximos do limite será:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^b} = c + y,$$

[20] Cf. HILLE, E., *Analysis*, volume I, Blaisdell Publishing Company, New York, 1964, pp. 112-115.
[21] Cf. BASS, J., *Cours de Mathématiques*, tome I, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1964, pp. 115-119.

sendo g um infinitamente pequeno. A diferença $\beta - c\alpha^b = \gamma\alpha^b$ é de ordem superior. $C\alpha^b$ chama-se parte principal de b. Assim, o conceito de infinito é fundamental em Análise Matemática, desde o cálculo diferencial até ao integral.[22]

1.8 - Se, em Análise Matemática, as operações de passagem ao limite implicam o "infinito", então o mesmo não será com o "infinito", desde a etimologia à "razão metafísica".

Mas, em sentido etimológico, significa o não finito ou o "não acabado", que no uso corrente se denomina como aquele que não tem limites. Assim, se determinaria etimologicamente como inacabado, imperfeito ou algo que transcende qualquer objecto dado e diz-se ilimitado, perfeito, aquilo a que se não pode acrescentar mais nada.

O conceito matemático de Infinito poderá fundamentar-se no sentido transcendental de infinito.

O infinito matemático é fruto de uma exigência da quantidade abstracta e como ela se traduz em qualidades formais para a teoria do número. No seu fundamento metafísico, a "razão teórica" será outra, porque o infinito metafísico, além de nos lançar na transcendência, surge como expressão que é abordada em Teologia Natural, que Espinosa levou até às últimas consequências ao afirmar a existência de uma só "substância infinita" de que tudo o mais são apenas "modos".[23]

Já antes Leibniz, espírito matemático e metafísico, que contribuiu para a elaboração do cálculo infinitesimal, admitiu o "Infinito" em acto. Mas, para além deste infinito, não duvidou da existência do Deus infinito, que é unidade indivisível.[24]

O racionalismo, coordenando a ordem formal e a ordem real, sucumbe à tentação de derivar logicamente o finito do infinito. Este seria do primeiro conhecido (*primum cognitum*). Não é pela negação do finito que conheço o infinito, como afirmara Descartes, mas de certo modo a ideia de infinito precede a de finito.

Hegel aprofundou a noção de Infinito e as relações com o finito, caindo numa forma de monoteísmo, que é conclusão lógica entre o racionalismo de Descartes e o idealismo transcendental kantiano. Segundo o filósofo de Heidelberg, o Infinito pensa-se como centro expansivo de actividade fecunda e reduz o finito a um momento do processo dialéctico da "ideia absoluta infinita".[26]

[22] Cf. LIMA, E. L., *Curso de Análise*, volume I, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Brasilia, 1982, pp. 101-105.

[23] Cf. SPINOSA, B., *Ethica more geometrico demonstrata*, Pars Prima, Van Vloten P. N. Land, Hagen, 1914, Definitiones VI, Propositio VIII.

[24] Cf. LEIBNITZ, G. W., "Essais de Théodicée", in: *Opera Philosophica*, Edermann, Salen, 1959, pp. 16-26, 40-65, 68-86.

[25] Cf. DESCARTES, R., "Meditationes de Prima Philosophia", in: *Opera Omnia*, VII, Editiones Tannery, Paris, p. 45.

[26] Cf. HEGEL, F. G. *Logique de l'être*, I, traduction de l'allemand, Paris, 1969, pp. 113-160.

Já no século XIII, S. Tomás de Aquino distinguia nitidamente o Infinito numérico ou quantitativo do Infinito de perfeição.

O *Doctor Angelicus* rejeita o infinito actual quantitativo de cuja existência e essência discutem os matemáticos e compreende Deus como o Infinito de perfeição, que deriva da metafísica do acto puro. Segundo este aspecto, o Infinito implica um carácter absoluto, não de ordem quantitativa, mas intensiva e essencial. Qualquer outro infinito, restrito à extensão abstracta e à quantidade *in genere*, só impropriamente se chamará *Infinito*.[27]

Mas, para Aristóteles são infinitos, o tempo, o contínuo e aquilo donde derivam todos os seres, as "grandezas matemáticas".

Logo, o Estagirita, consciente das dificuldades deste termo e conceito, afirma que tanto os que admitem como os que o rejeitam se vêem envolvidos numa série de absurdos e de impossibilidades. Na verdade, a análise minuciosa da Física leva-o a negar a possibilidade da existência de corpo ou grandezas actualmente infinitas.[28]

Daqui se infere que o Infinito tem, para o Filósofo, razão de parte e não do todo. O Infinito entra deste modo no âmbito da causalidade material e é compreendido como indefinido e indeterminado. Assim, Aristóteles não usou o termo Infinito para designar a suprema perfeição, a positividade do acto puro do Motor Imóvel.

No aspecto metafísico, tudo começou com o "ápeiron", que, segundo Anaximandro, é sem princípio e sem fim. Será a fonte originária, donde tudo provém, onde o indefinido aparece como Infinito. Será ao mesmo tempo o infinito e o indefinido, segundo o filósofo de Mileto. Assim, o Infinito revela-se, sob a forma misteriosa do A;PEIRON nos primeiros fragmentos da filosofia pré-socrática.[29]

1.9 - Segundo a perspectiva de Hilbert, *princeps mathematicorum*, revela-se uma crítica sobre o infinito matemático através dos fundamentos lógicos da matemática.

Segundo o matemático de Koenigsberg (1862-1943), o infinitamente grande e o pequeno são modos de dizer o "infinito", no sentido de uma totalidade infinita, que se adopta no método dedutivo e parece uma "ilusão". A divisibilidade do infinito ou de um contínuo é uma operação que existe somente no pensamento, sendo simplesmente uma ideia. Muitas são as aplicações do conceito de infinito, quer na Física em geral, quer em Astronomia. Para Hilbert, tal como Kant, a ideia de "infinito" surge como se fosse uma "ideia reguladora" no nosso pensamento, como conceito ideal, que se exprime em juízos analíticos e/ou sintéticos.[30]

Apesar de sérias objecções, relativas à extensão do infinito, sem recorrer

[27] Cf. KREISEL, G., "A variant to Hilbert's Theory of the Foundations of Arithmetic", in: *Britsch Journal for the Philosophy of Science*, 4 (1953/54), pp. 16-25.

[28] Cf. CORRY, L., "Hilbert and physics, (1900-1915)", in: J. Gray, *The Symbolic Universe Geometry and Physics*, 1890-1930, Oxford University Press, Oxford, 1999, pp. 145-154.

[29] Cf. DIELS, H.-KRANZ, W., *Die Fragmente der Vorsokratiker*, W. de Gruyter, Berlin, 1934, frag. 1.

[30] Cf. HILBERT, D., "Uber das Unendliche", in: *Annalen*, 95 (1926), pp. 166-169.

a especulações metafísicas, Hilbert colocou o problema do infinito na natureza física, ao considerar o Universo como um "todo".[31]

Segundo Hilbert, o infinito desempenha um papel muito importante em muitos domínios da geometria e da matemática em geral, sobretudo, como vimos na Análise Matemática.

Na perspectiva de Hilbert, que consagrou uma obra aos fundamentos da Geometria, este ramo métrico da Matemática, conduz necessariamente ao postulado do espaço-infinito. Mesmo que isso seja válido formalmente, poderá não o ser para a ordem real.[32]

A Análise Matemática não é suficiente para a compreensão da natureza do infinito. Surge uma disciplina mais geral, de carácter filosófico, que infunde nova luz no valor e sentido do infinito, que fora introduzida por Cantor, denominada —teoria dos conjuntos—, de modo particular com o nome de teoria dos números transfinitos.

O infinito, afirmou Hilbert, não se encontra na realidade física, nem é objecto de experiência, da observação.

Como Hilbert se enquadra no formalismo da Matemática a ciência da quantidade abstracta é autónoma de lógica simbólica.[33]

Hilbert não faz qualquer considerando sobre o infinito como perfeição do ser (*esse*), tal como encontramos em S. Tomás, Descartes, Leibnitz e, sobretudo, Espinosa.

O infinito matemático é somente pensado pela matemática, dado que é uma qualidade de qualidade formal e secundária do entendimento abstracto.[34]

O matemático de Koenigsberg colocou, de forma adequada, as relações entre lógica e a matemática e seguiu de perto o pensamento do filósofo de Koenigsberg (1724-1804), ao afirmar que a matemática não se fundamenta somente na lógica. Fala-nos de uma lógica conectiva —*inhaltliche Logik*— ou de uma "lógica real" que assegure a exactidão da nossa dedução.[34] A matemática não poderá ser somente fundamentada pela lógica, mas necessita dos fundamentos gnoseológicos e ontológicos, para caracterizar ora o valor e limites das proposições formais, ora o grau de perfeição ou o existir das mesmas.

Assim, o *princeps mathematicorum* retém que a matemática seria como um albergue com dois tipos de fórmulas. Primeiramente com comunicações intuitivas de asserções finitas. Em segundo lugar, com fórmulas que podem significar pouco, mas constituem a estrutura ideal das teorias matemáticas.

---

[31] Cf. TORRETTI, R., *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1978, pp. 141, 145, 154, 155, 185-188, 189, 190, 193-202.

[32] Cf. HILBERT, D.-BERNAYS, P., *Die Grundlagen der Geometrie*, 10ed., Teubner, Stuttgart, 1968, 25-36.

[33] Cf. PUTNAM, H., "The thesis that Mathematics is logic", in: *Bertrand Russell-Philosopher of the Century*, G. Allen, London, 1964, pp. 2-12.

[34] Cf. QUINE, W. V., *From a Logical Point of view*, Cambridge University Press, Cambridge, 1953, pp. 56-68.

Finalmente, dizer que Hilbert termina por salientar que o "infinito matemático" (potencial e actual) se apresenta como a ideia orientadora no sentido kantiano. Assim, Hilbert optou pelo "formalismo" em Matemática perante o logicismo e o intuicionismo.[35]

Conclusão

A matemática transformou-se num tribunal supremo para decidir perguntas fundamentais com base concreta, em que todos podem concordar e onde cada proposição pode ser controlada.

Um exemplo do tipo das perguntas fundamentais que podem ser levadas a cabo é a tese de que cada problema matemático tem solução. Estamos todos convencidos que é realmente assim. De facto uma das atracções principais ao lidar com um problema matemático é que ouvimos este grito dentro de nós: Há um problema, vamos encontrar a resposta! Agora a teoria de prova não pode fornecer um método geral para resolver cada problema matemático. Não existe tal método. Contudo, a prova falha completamente dentro do espaço da nossa teoria.

Quando Cantor descobriu os números transfinitos, chamados números de segunda classe, a pergunta que se levantou imediatamente, é se este método transfinito de contagem permite definir conteúdos conhecidos da outra parte que não são contáveis em sentido ordinário.

Se os pontos de um intervalo, isto é, os números reais, podem ser contados por meio de uma tabela dada previamente então surgirá o famoso problema do contínuo que Cantor colocou. Embora alguns matemáticos pensassem que poderiam dispor deste problema, negando a sua existência, as seguintes observações mostram quão errado eles estavam: o problema da continuidade é ajustado fora de outros problemas pela sua beleza. Mais, oferece a vantagem sobre outros que reunem estas duas qualidades: por um lado, métodos novos são requeridos para a sua solução, desde que métodos velhos não resolvam, por outro, a solução própria é de grande importância por causa dos resultados a serem obtidos.

O resultado principal é que o infinito não se encontra realizado em lugar algum. Nem existe na natureza nem fornece uma base legítima para o pensamento racional. Contrariamente às antigas aspirações de Frege e de Dedekind, adquirimos a convicção de que, como condição prévia à possibilidade, são indispensáveis certas representações e certos juízos intuitivos de que a lógica sozinha não é suficiente. As operações com o infinito podem ser feitas com o finito.

Se, de acordo com Kant, entendemos por ideia um conceito da razão que transcende toda a experiência e mediante o qual o concreto é preenchido no sentido da totalidade, poderemos dizer que ao infinito resta, pura e simplesmente, o papel de ser uma ideia na qual podemos acreditar sem hesitação.

✠

[35] Cf. MANNO, A. G., *Filosofia della Matematica*, natura e fondamento della matematica, Marzorati Editore, Milano, 1972, pp. 206-207.