



**LA RELEVANCIA DEL TAMAÑO DEL  
MERCADO META EN LAS  
DECISIONES DE INVERSIÓN  
EMPRESARIA**

**Lic. Luis V. Fortino**

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA ARGENTINA**

**Santa María de los Buenos Aires**

**2 de julio de 2020**

**Director de Tesis  
Dr. Michael Connolly**

**Miembros del Jurado**

**Dra. María Elisa Belfiori  
Dra. María Lorena Garegnani  
Dr. Damián Pierri**

*a mi esposa Liliana*  
*soporte y guía*

# Índice general

	Página
Índice de figuras	vii
Índice de cuadros	x
Prólogo	xiv
Abstract	xvi
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
I. Breve Estado de la Cuestión . . . . .	3
II. Aspectos Complementarios . . . . .	15
III. Descripción General del problema . . . . .	19
IV. Síntesis de los Resultados de esta Tesis . . . . .	27
V. Organización General de la Tesis . . . . .	37
<b>2. El Modelo</b>	<b>39</b>
I. El Mercado Meta . . . . .	40
II. Estimación de la Demanda del Mercado Meta . . . . .	42

III. Modelo Ampliado de la ‘q’ de Tobin . . . . .	49
IV. Presentación y Resolución del Modelo . . . . .	59
V. Estado Estacionario . . . . .	65
VI. Diagrama de Fase . . . . .	65
VII. Aplicación Efectiva de la Restricción del Mercado Meta . . . . .	69
VIII. Resolución del Modelo Loglinealizado . . . . .	70
IX. Conclusiones y Comentarios del Modelo . . . . .	71
<b>3. Estimación Econométrica</b>	<b>74</b>
I. Introducción . . . . .	74
II. Ajustes del modelo . . . . .	77
III. Caso de Aplicación: Estados Unidos 1952-1976 . . . . .	84
IV. Variaciones al Modelo . . . . .	103
V. Caso de Aplicación Estados Unidos 1950-2010 . . . . .	105
<b>4. Conclusiones de la Tesis</b>	<b>119</b>
I. Caminos de Investigación . . . . .	121
II. Aplicaciones a la Teoría Económica . . . . .	124
III. Aplicaciones a la Política Económica . . . . .	125
	<b>127</b>
<b>A. Anexo A: Conceptos Preliminares</b>	<b>128</b>
I. Teoría del Control Óptimo . . . . .	128
II. Algunos Aspectos de la ‘q’ de Tobin . . . . .	133

III. Series de Tiempo . . . . .	137
<b>B. Anexo B: Comprobaciones Algebraicas del Modelo Ampliado</b>	<b>149</b>
I. Mercado Meta . . . . .	149
II. Modelo Ampliado . . . . .	154
III. Estado Estacionario . . . . .	163
IV. Aplicación Efectiva de la Restricción Mixta . . . . .	164
V. Loglinealización . . . . .	167
VI. Resumen y Presentación Matricial . . . . .	174
VII. Estabilidad del Modelo . . . . .	175
VIII. Resolución del Modelo Loglinealizado . . . . .	178
<b>C. Anexo C: Cuadros y Figuras Econométricas</b>	<b>182</b>
I. Estimación 1952-76 . . . . .	188
II. Variaciones al Modelo . . . . .	202
III. Caso USA 1950-2010 . . . . .	204

Bibliografía

# Índice de figuras

1.1. Curvas LM e IS (Tobin, 1969) . . . . .	2
1.2. Shock Externo en el Nivel de Ventas de la Industria . . . . .	21
1.3. Causalidad en el Sentido de Granger si no hubiera cointegración . . . . .	33
2.1. Costos de ajuste del Modelo . . . . .	56
2.2. Diagrama de Fase . . . . .	67
2.3. Diagrama de Fase con la Restricción Mixta Activa . . . . .	70
3.1. Dispersiones entre $(I/K)$ , la “q” de Tobin y el Mercado Meta . . . . .	85
3.2. Evolución de las Variables . . . . .	86
3.3. Causalidad cuando las variables NO están cointegradas . . . . .	98
A.1. Test de Límites . . . . .	146
B.1. Punto de Silla del Modelo Ampliado . . . . .	177
C.1. Base de Datos Utilizada . . . . .	184
C.2. Comportamiento Histórico de las Variables . . . . .	185
C.3. Matriz de Correlaciones . . . . .	185
C.4. Regresión Inicial . . . . .	186

C.5. Estimación Recursiva de los Residuos del Modelo . . . . .	186
C.6. Estimación del Modelo Incluyendo Variables Binarias . . . . .	188
C.7. Estimación del Modelo Incluyendo la Tasa Prime . . . . .	189
C.8. Pruebas de Estacionariedad de los Residuos . . . . .	189
C.9. Pruebas de Raíz Unitaria de las Series . . . . .	190
C.10. Criterios para la Selección del Número de Rezagos . . . . .	191
C.11. Test de Cointegración de Johansen . . . . .	191
C.12. Modelo de Corrección de Errores . . . . .	192
C.13. Significatividad de las variables del Modelo de Corrección de Errores .	193
C.14. Causalidad en el Sentido de Granger . . . . .	193
C.15. Verificaciones del Modelo de Corrección de Errores . . . . .	194
C.16. Test de Gregory y Hansen: Cointegración con Cambio Estructural . .	194
C.17. Cointegración con Cambio Estructural: Relación de Largo Plazo . . .	195
C.18. Cointegración con Cambio Estructural: Variable Binaria en 1958 . . .	195
C.19. Estimación de Cointegración sin el Mercado Meta . . . . .	196
C.20. Significatividad del Modelo de Corrección de Errores sin ‘LMM’ . . .	196
C.21. Residuos de la Regresión . . . . .	198
C.22. Relevancia del Mercado Meta . . . . .	199
C.23. Normalidad de los Residuos de la Regresión . . . . .	199
C.24. Pruebas de Homoscedasticidad . . . . .	201
C.25. Pruebas de Heteroscedasticidad Condicional . . . . .	202
C.26. Ausencia de Colinealidad . . . . .	203

C.27. Test de Especificación del Modelo . . . . .	204
C.28. Estimación del Modelo en Niveles . . . . .	205
C.29. Estimación del Modelo sin la ‘q’ de Tobin . . . . .	205
C.30. Modelo de Corrección de Errores (sin la ‘q’ de Tobin) . . . . .	206
C.31. Test de Rango de Johansen para 1950-2010 . . . . .	206
C.32. Estimación del Modelo Cointegrado para 1950-2010 . . . . .	207
C.33. Test de Wald para 1950-2010 . . . . .	207
C.34. Modelos Largo Plazo con y sin ‘dummies’: 1950-2010 . . . . .	208
C.35. Matriz de Correlaciones 1950-2010 . . . . .	209
C.36. Esquema del Bound Test - 1950/2010 . . . . .	210
C.37. Estimación del Modelo para 1950-2010 . . . . .	210
C.38. Estimación del Modelo 1950-2010 sin la variable ‘CREPIB’ . . . . .	211
C.39. Estimación ARDL para 1950-2010 . . . . .	211
C.40. Pruebas de Comportamiento 1950-2010 . . . . .	212
C.41. Estabilidad CUSUM: 1950-2010 . . . . .	213
C.42. Estabilidad CUSUMQ: 1950-2010 . . . . .	213

# Índice de cuadros

1.1. Resultados Resumidos de las Regresiones Efectuadas . . . . .	36
2.1. Variables y Parámetros del Consumo en el Mercado Meta . . . . .	45
2.2. Supuestos de la ‘q’ de Tobin Ampliada . . . . .	50
2.3. Parámetros del Modelo Ampliado . . . . .	61
2.4. Variables del Modelo Ampliado . . . . .	61
2.5. Nomenclatura del Modelo Ampliado . . . . .	62
2.6. Valores de $\bar{T}$ , $\bar{K}$ y $\bar{q}$ en el Estado Estacionario . . . . .	66
2.7. Ecuaciones cuando la Restricción Mixta se Cumple con Igualdad . . .	69
2.8. Ecuaciones de la Solución del Modelo Reducido Loglinealizado . . . .	71
3.1. Variables y Parámetros del Modelo Empírico . . . . .	82
3.2. Test de Gregory-Hansen: Síntesis . . . . .	99
3.3. Test de Gregory-Hansen: Binaria ‘dulmm’ en 1958 . . . . .	100
3.4. Comparación de las Ecuaciones con ‘MM’ o con ‘RD’ . . . . .	101
3.5. Cálculo de la ‘q’ de Tobin a partir del Z 1 de la FED . . . . .	106
3.6. Test de Gregory-Hansen: 1950-2010 . . . . .	108
3.7. Resultados de la Prueba de Cointegración de Pesaran: 1950-2010 . . .	111

3.8. Estadísticos del ECM 1950-2010 . . . . .	115
3.9. Resumen de Estimaciones . . . . .	118
A.1. Variables y Parámetros de la ‘q’ de Tobin . . . . .	134
B.1. Nomenclatura utilizada en la Loglinealización . . . . .	168
B.2. Nomenclatura de la Loglinealización . . . . .	173
C.1. Descripción de las Series de Tiempo de Estados Unidos . . . . .	183
C.2. Estimaciones Previas Realizadas con el Modelo 1952-1976 . . . . .	187
C.3. Estimaciones Previas Realizadas con el Modelo 1950-2010 . . . . .	209
C.4. Exogeneidad en el ECM 1950-2010 . . . . .	214

# Agradecimientos

Deseo agradecer a todas las personas que hicieron posible que mantuviera el esfuerzo de desarrollar esta Tesis, y en especial a aquellos que con sus comentarios y consejos, me dieron una guía adicional de estudio.

Marcelo Resico, Director del Departamento de Doctorado de la UCA, ha sido un acompañante invaluable en esta experiencia académica, y además de estar presente y predispuesto en toda ocasión, me brindó importantes comentarios y sugerencias a partir de su larga experiencia académica y profesional.

Los Miembros del Jurado han enriquecido sustancialmente esta Tesis con sus revisiones, por lo cual estoy muy agradecido. Por caso, los comentarios de la Dra. María Elisa Belfiori acerca de la diagramación, organización y exposición de los temas y en especial los puntos referidos a la necesidad de clarificar la contribución de esta Tesis de una manera más amplia así como la redacción concisa de las conclusiones, han permitido mostrar conceptos que estaban algo ocultos y diagramar más ágilmente los diferentes Capítulos, logrando descripciones más precisas y un formato más acorde al de una Tesis.

La necesidad de clarificar el concepto de Exogeneidad Fuerte de acuerdo con la tipología de Exogeneidad tripartita de (Engle and Richard, 1983) señalada por la Dra. María Lorena Garegnani, también permitió realizar una descripción del término y su relación con la Tesis, mejorando la descripción de los conceptos y dando fundamento a la estimación del Modelo Ampliado utilizando una regresión condicionada a los valores de las variables explicativas.

Otro aporte muy detallado e importante para esta Tesis provino de la revisión del

Dr. Damián Pierri. Sus observaciones acerca de los modelos de inventario, las preferencias cuasilineales con equilibrio general, la ubicación del stock de capital cuando la restricción del Mercado Meta se encuentra activa y las condiciones de holgura complementaria del Modelo entre otras, permitieron precisar los criterios de esos puntos, mejorando sustancialmente la percepción de muchos conceptos y la inclusión de otros nuevos.

Mi Director de Tesis, el Dr. Michael Connolly, me ha ayudado muchísimo a “separar la paja del trigo”, focalizar en lo importante y cuidar la presentación. No sólo logró transmitirme recomendaciones y conocimientos muy importantes, sino que además su calidez humana ha sido relevante para el aprendizaje y el esfuerzo que significó este trabajo. A pesar de vivir a más de 7.000 kilómetros de distancia, siempre estuvo atento a mis inquietudes y siguió mis pasos en todo momento.

Quiero mencionar también al Profesor Salvador Ortigueira de la University of Miami, quien con incisivas preguntas me hizo ver varios puntos a completar, en especial los referidos a la efectiva aplicación de la restricción del Mercado Meta en el estado estacionario y la fundamentación del análisis de equilibrio parcial aplicado en la Tesis.

A Hilda Lizzi y Ángel Digilio les debo un reconocimiento especial, ya que fueron una ayuda invaluable para acceder a parte de la bibliografía consultada.

No tengo forma de agradecer a mi esposa Liliana, a quien le dedico este trabajo, por haber aceptado que muchas veces le dedicara más tiempo a la Tesis que a ella misma.

A todos aquellos que no nombro, miembros de la UCA y el Doctorado, profesores, compañeros de estudio y de trabajo, amigos y conocidos, muchas gracias. Aún sin saberlo me han ayudado mucho, y lo valoro.

Los errores que subsisten, a pesar de todo el apoyo que me han brindado, me pertenecen y los asumo en su totalidad.

# Resumen

Aún cuando la teoría económica ha identificado los componentes de la inversión, no ha sido posible contar con una formulación general que explique su comportamiento y pueda ser utilizada para pronosticar su evolución futura. También, y desde los primeros trabajos que trataron el tema, quedó claro que existe una gran dificultad para determinar las variables relevantes y el funcionamiento mismo de los mecanismos que llevan a un empresario a aumentar o disminuir su stock de capital.

Fue (Tobin, 1969) el primero en mencionar la relación existente entre el valor del capital que tiene una empresa y el valor que el mercado de capitales le asigna a esa empresa a través del precio de sus acciones en la bolsa de valores. Sin embargo, como en general se ha supuesto que el empresario es *'precio aceptante'* y por ello no tendría que ocuparse del volumen de ventas, se ha concluido que la *'q'* de Tobin contiene toda la información necesaria para decidir.

Pero al incluir rigideces en el modelo, el mecanismo de información vía precios se interrumpe y el mercado no se equilibra automáticamente, ya que las señales de precios no reflejarán las verdaderas posibilidades de venta del producto. También es cierto que bajo los supuesto de competencia perfecta aplicados, la función de beneficio empresario queda indeterminada. Confirmando estos puntos, los estudios empíricos no han podido obtener coeficientes de ajuste importantes, lo cual nos anima a plantear que el elemento faltante en la teoría de la *'q'* de Tobin, es la inclusión explícita del tamaño del mercado de venta de la producción en el modelo (al que llamamos *'Mercado Meta'*), de manera que el volumen de inversión sea realizado con ajuste a la cantidad de unidades producidas que podrán venderse efectivamente.

Es así que en esta Tesis verificamos que la inclusión explícita del Mercado Meta en la formulación de la 'q' de Tobin, no sólo complementa el modelo tradicional, sino que mejora sustancialmente la estimación econométrica al detectar la cointegración de las series involucradas y confirmar, entre otros puntos, que:

- El modelo incluyendo el Mercado Meta, es estable teórica y dinámicamente, así como el Mercado Meta es relevante estadística y teóricamente .
- Nuestro modelo ampliado cumple las condiciones necesarias y suficientes de la teoría del control óptimo y tiene trayectorias de comportamiento optimal similares a las del modelo de la 'q' de Tobin tradicional (sin el Mercado Meta). La restricción del Mercado Meta está activa en el estado estacionario, lo que significa que es relevante para explicar la inversión.
- El Mercado Meta, además de actuar como catalizador para detectar la cointegración, otorga justificación teórica a modelos de la 'q' de Tobin ampliada y de competencia imperfecta, cuyas variables actuarían como '*proxi*' del mercado.
- Cuando no se incluye el Mercado Meta, el modelo queda mal especificado. Por el contrario, todas las pruebas estadísticas en las dos verificaciones empíricas que realizamos con nuestro Modelo que incluye el Mercado Meta, resultaron correctas con un  $\bar{R}^2$  superior al 80 %, sin autocorrelación ni heteroscedasticidad.
- Al estimar para el período 1950-2010 un modelo de corrección de errores en logaritmos, el resultado de largo plazo muestra causalidad en el sentido de Granger desde las variables explicativas ('q' de Tobin, Mercado Meta, relación de crédito a GDP y tasa de interés), hacia la relación de inversión a capital. En el corto plazo hay causalidad en el sentido de Granger de la 'q' de Tobin a la relación de inversión a capital. La velocidad de ajuste entre el corto y el largo plazo es del 61 % de la discrepancia en cada año, *ceteris paribus*.

Nuestro enfoque complementa la teoría de la 'q' de Tobin y, de acuerdo a como esté valorada la empresa en el mercado de capitales (o sea, el precio de sus acciones), el inversor emitirá más acciones, tomará deuda mediante la emisión de bonos o créditos bancarios, o usará capital propio para financiar la inversión.

# Abstract

Using the traditional Tobin's  $q$  – the market value of a firm divided by its book value – with competitive markets in inputs and products and quadratic installation costs, we explicitly restrict the level of production to limit it to the quantities that are expected to be sold. We identify amount expected to be sold as the size of the target market, which it expects to supply.

This Expanded Model is solved by Optimal Control, verifies the necessary and sufficient conditions, is stable and has trajectories similar to the traditional Tobin's model. The target market restriction, on the other hand, is operative in the steady state, indicating that it is relevant. The econometric analysis shows that the target market, in addition to being the catalyst to detect cointegration, would grant theoretical justification to some augmented Tobin's  $q$  and imperfect competition models, in which the variables used would be acting as proxies of the target market.

Estimates made with data from the United States for the periods 1952-1976 and 1950-2010 yielded statistical *las pruebas* with the predicted sign, with an  $R^2$  greater than 80 %, without autocorrelation or heteroskedasticity. Finally, estimating an error correction model in logarithms for the USA 1950-2010, exhibited causality in Granger's sense on the long-term model, from the explanatory variables (Tobin's  $q$ , target market, credit to GDP ratio and first difference of interest rate), to the investment to capital ratio.

In the short term, there is causality in Granger's sense from Tobin's  $q$  to the ratio of investment to capital. The speed of adjustment between the short and long term is 61 % of the discrepancy in each year, *ceteris paribus*.

Our approach does not invalidate the Tobin's  $q$  theory, but complements it. Depending on how the company is valued in the capital market, will issue more shares, take debt by issuing bonds or bank credits, or use own capital to finance investment.

# Capítulo 1

## Introducción

El objeto de esta Tesis es mostrar la necesidad e importancia de incluir explícitamente en la ecuación de inversión del modelo de la ‘q’ de Tobin, la estimación del Mercado Meta (el tamaño del mercado de venta de la producción que se define en la página 42) . Presentamos un Modelo Ampliado similar al tradicionalmente utilizado, pero con una restricción adicional correspondiente al tamaño del mercado, cuyos resultados son corroborados de manera teórica y empírica.

Esta formulación del modelo sigue la intuición del trabajo original de (Tobin, 1969), que plantea una curva LM Keynesiana estándar en función de la variable ‘q’, definida como el valor del capital relativo a su costo de reemplazo. Más adelante veremos detalles técnicos más precisos, pero baste por ahora con señalar que es el propio Tobin, respaldando su explicación en un gráfico similar al de la Figura 1.1, quien indica que esa curva LM debe ser completada mediante una curva IS, a fin de encontrar el equilibrio entre la oferta y la demanda<sup>1</sup>.

Las sucesivas representaciones de esta potente teoría que relaciona el valor de la empresa con el costo de reposición de su capital, fueron generando estilizaciones hasta llegar a la síntesis neoclásica realizada por (Hayashi, 1982), quien eliminó la curva del mercado de bienes y afirmó que en la ‘q’ se encuentra toda la información que necesita el inversor para tomar su decisión.

---

<sup>1</sup>/ Cf (Tobin, 1969), página 21 para la cita y página 22 para la Figura número 3 del artículo.

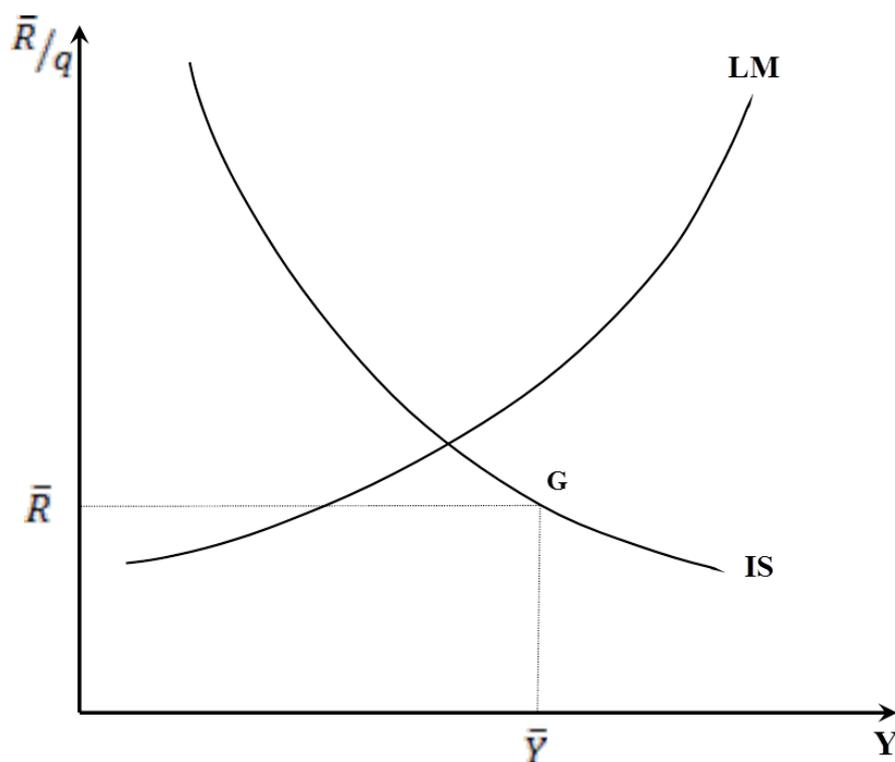


Figura 1.1: Curvas LM e IS (Tobin, 1969)

La ausencia del mercado de bienes fue acompañada con supuestos de rendimientos constantes a escala y competencia perfecta, que llevaron a la indeterminación de la oferta debido a la propia forma de construcción de la Síntesis<sup>2</sup>. Para resolver la indeterminación, se impuso como condición adicional que el nivel de producto viene dado exógenamente<sup>3</sup>, a fin de establecer el nivel de capital óptimo.

Los problemas que acarrearón estos supuestos tan restrictivos, desembocaron rápidamente en la incapacidad empírica del modelo para verificar la teoría. Al propio problema de estimar el valor de 'q', se le agregaron otros como la correlación entre las variables y los bajos niveles del coeficiente de determinación.

A nuestro entender, y siguiendo el planteo de (Tobin, 1969), la ecuación de inversión debe incluir el mercado de bienes al que está dirigida la misma, a fin de que se determine dentro del modelo, el nivel de producción que busca el empresario. Esto es importante ya que la inversión estimada determinará el futuro nivel de capital de la economía que, para que sea el óptimo, debe estar relacionado con el volumen de

<sup>2</sup>/ Ver la Sección B del Anexo A en la página 135 para más detalles.

<sup>3</sup>/ Cf (Hayashi, 1982), página 215.

producción en cada período.

De esta manera, nuestro Modelo Ampliado que incluye explícitamente el Mercado Meta en la ecuación de inversión, evita la indeterminación de la oferta de bienes ya que el nivel de producción se fija internamente. Por otra parte, la consideración de una curva IS en el modelo da respaldo a la elección del Producto Bruto Interno como tamaño del Mercado Meta para las estimaciones empíricas, a la vez que evita la correlación entre las variables gracias a la cointegración de las mismas, logrando con ello un mejor  $R^2$ .

## I. Breve Estado de la Cuestión

### A. Inversiones Consideradas

No hace falta aclarar la importancia de la inversión en el proceso económico de cualquier país, ya que resulta determinante a la hora de definir temas centrales como el desarrollo, el crecimiento económico, el desempleo y tantos otros ejes fundamentales.

Por ello, entender su funcionamiento resulta primordial, y para hacerlo, debemos empezar por la composición misma del término. Parecería un tema menor, pero si bien las cuentas nacionales miden la inversión mediante tres conceptos: (i) fija, (ii) inventarios y (iii) vivienda; existen otros componentes que no se registran en estos rubros.

Mencionemos en primer término a los bienes de consumo durables como heladeras, lavarropas, automóviles, etc., que proveen servicios de consumo durante más de un período de tiempo. Si bien incrementan el stock de capital en un sentido amplio, son contabilizados por las cuentas nacionales como gastos de consumo y no integran la inversión. Un caso similar es el de la infraestructura pública, como carreteras, puentes y otros, que también es considerada gasto de consumo por parte del gobierno.

Otro rasgo que distingue al tipo de capital, se refiere a si es “reproducible” o no. Pueden hacerse nuevas casas o fábricas, pero no puede aumentarse la cantidad de tierra, o de minerales del suelo, entre otros. Estos son bienes “agotables”, llamados

así porque a medida que se usan se agotan. También se los conoce como “no renovables”. Notemos en este caso que cuando por ejemplo extraemos petróleo de un pozo, lo que estaríamos haciendo es una “inversión negativa” de ese recurso. Sin embargo, esto tampoco es considerado por las cuentas nacionales.

También son ignoradas las formas de capital no físico, cuyo mejor ejemplo son los recursos humanos. Cuanto más capacitada está la fuerza laboral y empresarial de un país, mayor debería ser la productividad laboral y de la inversión. Sin embargo la educación, por ejemplo, también es considerada gasto de consumo por las cuentas nacionales. Similar tratamiento lleva el tema de investigación y desarrollo, que comprende incluso actividades científico-tecnológicas.

Como vemos, son varios los conceptos que desde un punto de vista económico podrían considerarse como inversión, pero que al no ser registrados como tales por las cuentas nacionales, no son considerados en los diferentes estudios, y tampoco podremos abarcarlos en esta Tesis. Al respecto, (Eisner, 1988) consideró que en 1981 la inversión en Estados Unidos habría sido alrededor de veinte puntos del PBI superior a la registrada, si se hubieran considerado estos rubros.

Otro aspecto que debemos considerar, es el referido a quién hace la inversión, ya que en los modelos macroeconómicos agregados se considera por simplicidad que son las familias, como propietarias de las empresas, quienes llevan adelante las inversiones. En nuestro caso, vamos a separar consumidores de empresarios, y serán estos últimos los encargados de realizar las inversiones de capital que aquí estudiamos.

Esto nos permitirá asumir que el empresario maximizará el valor de la empresa, en lugar de recurrir a la maximización de la utilidad por parte del consumidor. También nos liberará de un efecto no deseado, que es el de tener que considerar la riqueza monetaria de las familias, y nos permitirá focalizarnos en el stock de capital de las empresas

En términos contables sabemos que la inversión de un período equivale a la diferencia entre el stock de capital de ese período y el anterior más la depreciación producida sobre el stock del período anterior. Formalmente podemos representarlo como:

$$I_t = K_t - K_{t-1} + \delta K_{t-1} = K_t - (1 - \delta)K_{t-1} \quad (1.1)$$

Donde:  $I_t$ : inversión en el período 't'  
 $K_t$ : stock de capital en el período 't'  
 $\delta$ : tasa de depreciación, en tanto por uno

Se trata sin embargo, de la ecuación ex-post de la inversión, que no resulta por sí sola de gran utilidad a la hora de estimar cuál será el volumen de inversión.

Para ello, y sin resultar exhaustivos, existen dos corrientes principales de razonamiento en la literatura económica, referidos a la forma de estimar el comportamiento de la inversión (o los motivos por los cuales se desarrolla la misma). Estas corrientes son la teoría de 'El Acelerador' y su cuasi continuación que incorpora los costos de ajuste del capital por un lado, y por el otro la Teoría de la 'q de Tobin' . Ambas son descritas a continuación.

## B. La Teoría del Acelerador

El modelo del Acelerador parte del supuesto de que existe una relación estable entre el stock de capital que una empresa desea mantener y su nivel de producción y sugiere que el monto deseado de capital ( $K^*$ ) es una fracción constante ( $\gamma$ ) del producto ( $Y$ ) (Blanchard, 1981a) <sup>4</sup>

$$K^* = \gamma \cdot Y \quad (1.2)$$

Esto deriva en que bajo determinadas condiciones <sup>5</sup>, la productividad marginal del capital, que equivale a la tasa de interés ( $r$ ) más la tasa de depreciación ( $\delta$ ), resulta ser un múltiplo del nivel de producto. En función de ello, la relación ' $\gamma$ ' será estable siempre que  $r+\delta$  no varíe mucho en el tiempo.

<sup>4</sup>/ Uno de los primeros trabajos clásicos de la teoría del acelerador (luego ampliada y difundida por Samuelson), fue el de J.M.Clark (1917)

<sup>5</sup>/ Funciones de producción con rendimientos constantes a escala, mercados competitivos y oferta de factores (excepto para el capital) perfectamente elásticos.

Si las empresas pudieran incrementar (o reducir) su stock de capital sin demoras ni costos, el stock deseado de capital debería coincidir con el real, y la inversión neta debería ser similar a la planteada en (1.1)<sup>6</sup>:

$$I_{Neta} = K_{t-1}^* - K_{t-2} = \gamma Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2} = \gamma (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \quad (1.3)$$

La ecuación 1.3 en realidad nos está diciendo que la inversión neta es proporcional a la variación del Producto más que al nivel del mismo. Cuando hay un aumento del Producto, la Inversión se acelera para abastecer la mayor demanda y, de ahí, el nombre de esta teoría.

Notemos antes de continuar algunas cosas:

- Lo que este modelo nos dice es que la inversión crecerá como respuesta a un aumento del producto, cuando en realidad el proceso es inverso, ya que para que haya aumento del producto, debe haber habido previamente un proceso de inversión de sentido amplio <sup>7</sup>.
- Este modelo supone que la inversión siempre es suficiente para mantener el stock de capital.
- para que ‘ $\gamma$ ’ sea constante, el costo del capital debe ser fijo.
- cuando se agrega incertidumbre, como no se conoce el nivel de producción del período siguiente, también debe suponerse que coincidirá con el óptimo ‘ $Y^*$ ’.

Podemos plantear ahora la ecuación de Inversión del Acelerador junto con las del Consumo (C) y el Gasto Público (G), y desarrollar un modelo Keynesiano básico muy simple como el siguiente:

---

<sup>6</sup>/ La ecuación para la inversión bruta reflejada en 1.1 viene dada por  $I_t = \gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \delta K_{t-1}$

<sup>7</sup>/ Que comprende inversión reproductiva o al menos aumento del capital de trabajo, si obviamos los casos de aumento de la productividad de los insumos de producción.

$$\left. \begin{array}{l} C_t = \alpha \cdot Y_{t-1} \\ I_t = \gamma \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{array} \right\} \Rightarrow Y_t = \alpha Y_{t-1} + \gamma Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2} + G_t = (\alpha + \gamma) Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2} + G_t$$

También como ya dijimos, tradicionalmente se supone que el stock de capital se ajusta automáticamente y sin costos, lo cual en la práctica tampoco es cierto ya que desde que se toma la decisión de inversión hasta que se inicia la nueva producción, suelen pasar meses y hasta años, dependiendo del tipo de sector económico, nivel de tecnología, etc. Tampoco es tan simple reducir el stock de capital más allá de la tasa de depreciación, ya que es bastante dificultoso venderlo rápidamente.

Todo esto llevó a los economistas a reconocer que el stock de capital deseado no coincide siempre plenamente con el real, surgiendo modelos de ajuste de inventarios y más recientemente, de costo de ajuste del capital (Lucas Jr, 1967), que plantean un mecanismo de ajuste parcial entre el stock deseado y el real, reformulando la primera parte de (1.3) como:

$$I_{Neta} = g \cdot (K_{t-1}^* - K_{t-2}) \quad (1.4)$$

Donde  $0 < g \leq 1$  es un parámetro conocido, denominado coeficiente de ajuste parcial. Cuando  $g=1$  estamos en la ecuación del Acelerador (1.3), y a medida que  $g$  se acerca a cero, más lento es el ajuste, por lo que en realidad  $g$  mide la velocidad con la que el stock efectivo de capital se acerca al deseado.

Debemos notar por otro lado que este costo de ajuste debe medir también el exceso de stock de capital, ya que el haber invertido de más también hace diferir el saldo real con el deseado. Por lo general para reflejar estos costos de ajuste, se aplican funciones de pérdida cuadráticas, que implican que la pérdida para la empresa equivale al cuadrado de la diferencia entre el stock deseado y el real <sup>8</sup>, de lo cual surge que la

---

<sup>8</sup>/ Si la diferencia entre el stock deseado y el real es de 3; la pérdida para la empresa es  $9 = 3^2$ .

pérdida global equivale a

$$Pérdida_t = c_1(K_{t-1}^* - K_{t-2})^2 + c_2(K_{t-1} - K_{t-2})^2 \quad (1.5)$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes.

### C. La Teoría de la ‘q’ de Tobin

Si planteamos este problema en términos dinámicos y sin ecuaciones de comportamiento específicas, podemos resolver la maximización de los beneficios de la empresa, utilizando la técnica del Control Óptimo<sup>9</sup>. Para ello hemos de considerar a  $I(t)$  como variable de control y  $k(t)$  como variable de estado <sup>10</sup>.

Vamos a suponer un mercado con ‘N’ firmas idénticas en el cual el beneficio de la empresa representativa ‘ $\pi$ ’ es proporcional a su stock de capital ( $k_t$ ) y decreciente con el stock de capital de la Industria en su conjunto  $K(t)$ , de modo que expresaríamos  $\pi[K(t)] \cdot k(t)$  <sup>11</sup>. La hipótesis del modelo, es que los costos de ajuste del capital  $\Psi[I(t)]$  son una función convexa de la tasa de variación del stock de capital de la empresa, y el valor presente de sus beneficios descontados, considerando que tanto el precio de los bienes producidos por la empresa como el de los bienes de inversión son iguales a uno, y que está representado por:

$$\Pi(t) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-rt} \{ \pi[K(t)]k(t) - I(t) - \Psi[I(t)] \} dt \quad (1.6)$$

Vamos a introducir ahora la restricción presupuestaria en términos dinámicos, que vendrá dada por la relación entre el stock de capital de la empresa y su nivel de inversión:  $k(t) = k(t-1) + I(t)$ ; por lo que la empresa debe

$$Maximizar \int_{t=0}^{\infty} e^{-rt} \{ \pi[K(t)]k(t) - I(t) - \Psi[I(t)] \} dt \quad (1.7)$$

---

<sup>9</sup>/ Una sucinta explicación de la teoría del control óptimo y del principio del máximo puede verse en la sección I del Capítulo 2 de esta Tesis, en la página 128.

<sup>10</sup>/ Ya que el valor de  $k(t)$  viene determinado por las decisiones tomadas en el pasado.

<sup>11</sup>/ El beneficio de la empresa representativa equivale a una proporción  $k(t)/K(t)$  del de la Industria, con  $\pi' < 0$

$$\text{Sujeto a : } \dot{K}(t) = I(t) - \delta k(t)$$

Cuyo Hamiltoniano en valor presente viene dado por:

$$H [K(t), I(t)] = \pi[K(t)]k(t) - I(t) - \Psi[I(t)] + q(t) [I(t) - \delta k(t)] \quad (1.8)$$

Donde  $q(t)$  corresponde al precio sombra de la variación del stock de capital de la empresa, siendo por lo tanto la variable de coestado del modelo. La resolución del problema de Control Óptimo requiere como primera condición que la derivada del Hamiltoniano (1.8) con respecto a la variable de control  $[I(t)]$  sea igual a cero para cada  $t$ , lo cual puede expresarse como:

$$1 + \Psi'_I = q(t) \quad (1.9)$$

Esto nos dice que el costo de incorporación de una unidad adicional de capital ' $q_t$ ' es equivalente al valor de compra del bien de capital (que habíamos supuesto igual a 1), más el costo marginal de la variación del stock de capital.

La segunda condición del Principio del Máximo, requiere que el negativo de la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de estado  $k(t)$ , sea igual a la tasa de variación del precio sombra ' $\dot{q}(t)$ ', lo cual nos lleva a:

$$\pi[K(t)] = r q(t) - \dot{q}(t) \quad (1.10)$$

Que nos indica que el ingreso marginal del capital <sup>12</sup> debe ser equivalente al costo de oportunidad de una unidad de capital, representado por la diferencia entre el interés real ' $r \cdot q$ ' y la variación en el valor del capital en el período. Por último, la condición de transversalidad establece que no será óptimo conservar capital valioso indefinidamente, por lo cual:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} q(t) K(t) = 0$$

---

<sup>12</sup>/  $\text{IMg } K = \frac{\partial \pi(K_t) k_t}{\partial k_t} = \pi[K(t)]$ .

Como mencionamos en la ecuación (1.9),  $q(t)$  indica el efecto que tendría una unidad adicional de capital sobre los beneficios empresarios, por lo que también podemos definirlo como el valor presente descontado de los ingresos marginales futuros de una unidad de capital:

$$q(t) = \int_{\tau=t}^{\infty} e^{-r(\tau-t)} \pi[K(\tau)] dt$$

Desde este punto de vista, podemos dar una interpretación alternativa a  $q$ , considerándolo como el valor de mercado de una unidad de capital (utilizando el supuesto de mercado eficiente). Si avanzamos un paso más, y suponemos que además existe un mercado de acciones en el que cotiza la empresa, su valor de mercado debería estar en línea con su stock de capital, y como hemos supuesto que el valor del bien de capital es 1;  $q$  termina reflejando la relación entre el valor de mercado de una unidad de capital y su costo de reposición. Por lo tanto, y basándonos en (1.9), la empresa invertirá si el valor de mercado del capital es superior a su costo de reposición. A esta relación se la conoce como la **q de Tobin**.

Debemos notar que desde este punto de vista, lo que nos interesa es el valor marginal de ‘ $q$ ’ más que su valor medio, aun cuando se verifica que estos coincidirán cuando hay rendimientos constantes a escala y mercados competitivos (Hayashi, 1982)

## D. Desarrollos Recientes

La medida empírica habitual, que llamamos ‘ $q$ ’ de Tobin, supone que el valor actual de la empresa puede medirse por su valoración en el mercado de capitales. Bajo los supuestos de empresas precio aceptantes y funciones de producción y costo de ajuste de la inversión homogéneas de primer grado, (Hayashi, 1982) afirma que los precios de las acciones en el mercado de valores capturarán “toda la información relevante” sobre la rentabilidad futura esperada.

Sin embargo, cuando las condiciones de competencia perfecta no se cumplen, o

cuando los precios de las acciones en el mercado de valores están influenciados por “burbujas” transitorias o cualquier otro factor que no sea el valor actual descontado de las ganancias esperadas, la ‘q’ de Tobin no incorpora toda la información relevante sobre la rentabilidad futura, provocando problemas de estimación tanto del valor de la propia ‘q’ como de la inversión.

Para esos casos se han probado con relativo éxito empírico, versiones ampliadas del modelo canónico planteado por (Hayashi, 1982) entre otros<sup>13</sup>, agregando variables adicionales como ventas actuales y rezagadas o expectativas empresarias sobre ventas futuras. En este sentido, (Cooper and Ejarque, 2001) utilizaron este mecanismo con datos simulados en un modelo donde las empresas no son precio aceptantes, verificando que la ‘q’ media en ese caso no es una medida representativa de la inversión.

Una vertiente de la literatura se focalizó en el impacto que las restricciones financieras y las imperfecciones en el mercado de capitales tienen sobre la inversión corporativa. Esta corriente iniciada por (Fazzari et al., 1987) bajo la denominación de ‘racionamiento de capital’, generó muchos estudios empíricos que agregaron variables para medir el flujo de efectivo en modelos empíricos y relacionar las tasas de inversión con la ‘q’ de Tobin. Estudios como los de (Schiantarelli, 1996), (Hubbard, 1997) y (Bond and Van Reenen, ) detectaron coeficientes significativos en las estimaciones de los flujos de caja, lo cual consideraron una evidencia sobre la restricción que le impone la disponibilidad de fondos internos a la inversión.

También la literatura analiza el flujo de efectivo segmentando grupos de empresas que tienen una mayor prima de riesgo financiero, aunque con varios inconvenientes ya que muchas veces los parámetros adicionales estimados no son diferentes de cero para todos los segmentos considerados. (Kaplan and Zingales, 1997), (Fazzari et al., 2000) y (Kaplan and Zingales, 2000) entre otros, argumentan que las empresas que enfrentan una prima mayor de riesgo necesitan tener menor variación en los flujos de caja de la inversión.

Otras investigaciones que utilizan datos de empresas estadounidenses por el contra-

---

<sup>13</sup>/ Llamamos *canónico* al modelo tradicional de la ‘q’ de Tobin que se muestra en la ecuación 1.7 y su restricción.

rio, encuentran que los coeficientes de las variables del flujo de efectivo pueden no ser robustas. (Erickson and Whited, 2000) por caso, desarrollan un método generalizado de estimador de momentos utilizando condiciones para el momento de orden superior, que puede corregir la presencia de "burbujas" persistentes, siempre que las mismas sean independientes del valor de la empresa y del valor descontado de las ganancias futuras.

En el mismo sentido, (Cummins et al., 1999) afirman que  $q_{marginal} \neq q_{media}$  cuando hay "burbujas" persistentes en los mercados de valores y verifican que la 'q' de Tobin no se puede aproximar utilizando la 'q' media, cuando las burbujas están correlacionadas con el valor actual de la empresa. En esos casos, no habría variables instrumentales válidas disponibles para la medida habitual de la 'q' de Tobin construida utilizando valoraciones del mercado de capitales.

(Bond and Cummins, 2001) mientras tanto, utilizan una estimación directa del valor actual descontado de las ganancias futuras, pero construido aplicando los pronósticos de ganancia individual realizados por los analistas del mercado de valores. También encuentran que los estimadores de los flujos de caja no son relevantes cuando se usa esta medición en lugar del valor de acciones de la empresa en el mercado de capitales. (Cummins et al., 1999) por su parte, indican que el flujo de caja se convierte en insignificante en ese caso para todas las empresas por segmentos que se han utilizado comúnmente en la literatura empírica sobre restricciones de inversión y financiamiento. Otros estudios como los de (Bond and Cummins, 2001) y (Bond and Mulkay, ) verifican que el coeficiente de cobertura de intereses está inversamente relacionado con el flujo de caja.

Vemos así que la inclusión de variables, de flujo de caja u otras, en las estimaciones de la inversión, pueden estar señalando fallas en la 'q' de Tobin para capturar "toda la información relevante" sobre la rentabilidad esperada de la inversión. Estas variables agregadas al modelo canónico podrían estar capturando expectativas de rentabilidad a largo plazo que son relevantes para explicar la inversión y que escapan en la medición del valor medio de 'q'.

Similares inconvenientes han surgido en otras aplicaciones recientes desde distintas

vertientes, como son los medios de comunicación (harrigan2018), la estructura accionaria (Rostami2015) y la industria bancaria (Ali2016) entre otros, en los que los problemas de estimación tanto de la ‘q’ de Tobin como de la inversión han seguido siempre presentes.

Complementariamente, estas fallas de estimación que se encuentran también podrían reflejar especificaciones erróneas del modelo canónico básico, relacionadas con el poder de mercado, los rendimientos decrecientes a escala o componentes no convexos de los costos de ajuste, así como con la presencia de restricciones financieras.

Un factor adicional que podría ser causante o solución de algunos de estos problemas y es el que exploraremos a lo largo de esta Tesis, es el referido a la formulación incompleta del modelo canónico, en el cual estaría faltando incluir de una manera explícita, la estimación del tamaño potencial del mercado al que se enfrentará el inversor.

## **E. Alternativas y Estimaciones Relevadas**

Muchos autores incorporaron otras variables al modelo de la ‘q’ de Tobin, a fin de poder reconciliarla con los datos empíricos y evitar la autocorrelación de los residuos, entre otros inconvenientes. Algunos tuvieron mejores resultados que otros, aunque todavía ninguno fue concluyente, por lo que la discusión sigue abierta en este sentido.

Uno de los mecanismos fue incorporar el efecto impositivo, y ha servido en muchos modelos para mejorar la estimación, identificando cambios de parámetros económicos (Summers, 1981). Sin embargo, también parece ser cierto que este tema en países menos desarrollados no debería afectar tanto.

Dado que la inversión fluctúa mucho más que el PIB, agregar un factor de flexibilidad mediante la inclusión de rezagos (o lags) en los coeficientes, genera una mejor aproximación (Clark, 1979). Tanto la incorporación de rezagos en la estimación, como la distribución en el tiempo de la decisión de invertir y del desembolso de fondos y duración efectiva de los procesos de inversión, también fueron elementos muy empleados en los 70’s. Un buen resumen de estos avances puede verse en el análisis de

(Jorgenson et al., 1970).

También se considera a veces, que las modificaciones del capital son realizadas mediante ampliaciones o construcciones y bastante menos en el stock existente, por eso desplazan el costo de alquiler del capital un período y las inversiones pasan a depender del ‘nivel’ del alquiler en lugar de la ‘diferencia’.

Otra variante muy utilizada en las estimaciones, ha sido la inclusión de indicadores referidos a las encuestas de expectativas de inversión de las empresas, que al incorporar información no medible en la economía, resultan ser un buen estimador en la mayor parte de los modelos econométricos que las emplean.

Una alternativa también utilizada en las estimaciones empíricas, ha sido agregar términos que reflejen el cash flow y el margen de ganancia de la empresa, para mostrar la capacidad de financiamiento autónomo de la inversión.

Una opción también utilizada, ha sido dividir las variables por el PIB potencial para corregir la heteroscedasticidad del modelo, dado que la desviación estándar de los residuos en principio varía de manera proporcional al tamaño de la economía.

Muchos de los problemas de la estimación de la teoría de la inversión, han surgido por fallas en la medición de la ‘q’ de Tobin, asociadas con la agregación de las variables y la competencia imperfecta existente en la realidad, en lugar de los mercados competitivos que en general propone la teoría.

También hay evidencias acerca de la necesidad de una mejor especificación del modelo, que parecería ser una de las principales causas de la autocorrelación presente en la mayoría de las estimaciones.

Si bien autores como (Schaller, 1990) sostienen que el principal problema de especificación del modelo está dado por los problemas de agregación que presenta la economía, a nuestro entender, y sin desconocer que la agregación también influye y mucho, la ausencia del tamaño del mercado potencial es una causa importante de errores de especificación, que a su vez motivaría muchas veces la autocorrelación de los residuos de la estimación.

Una cuestión adicional es que la teoría considera que el empresario produce exac-

tamente lo que el mercado quiere comprar (en general ni siquiera hay variación de inventarios), porque supone implícitamente que la demanda será siempre suficiente para su nivel de producción o bien que el inversor la conoce de antemano.

## II. Aspectos Complementarios

### A. Ventajas e Inconvenientes de los Modelos

Una ventaja de la teoría de la ‘q’ de Tobin es que analiza lo que va a pasar y no lo que pasó, como era el caso del modelo del acelerador neoclásico. De esta manera, incorpora las expectativas y los costos de ajuste de la inversión que permiten una mejor explicación de la realidad, determinando mediante la optimización dinámica (tanto bajo la teoría del control óptimo como con programación dinámica), el volumen de producción y las sendas de equilibrio del stock de capital y su precio sombra.

Sin embargo, nada dice acerca de la venta de la producción que se planeó. Se optimiza la producción y se supone que todo se vende. Algunos estudios incorporaron la variación de inventarios, pero no tuvieron un gran desarrollo<sup>14</sup>. Vamos a ver formalmente más adelante los motivos de este interrogante,<sup>15</sup> pero anticipamos aquí que al suponer mercados competitivos, se ha aceptado por añadidura el ajuste instantáneo que se produce en competencia perfecta. No obstante, al introducir una ecuación de costo de ajuste de la inversión, se está agregando una distorsión que impediría por sí misma ese equilibrio automático.

Esta ausencia de ajuste automático en el stock de capital, estaría abriendo la posibilidad de que el capital pueda aumentar o disminuir independientemente del comportamiento del mercado de venta del producto, poniendo en tela de juicio el supuesto de que como el empresario decide optimalmente, su stock de capital siempre será

---

<sup>14</sup>/ Nos referimos a aquellos modelos que desde la perspectiva de la organización industrial (por ejemplo (Lindenberg and Ross, 1981)) buscaron mejorar la aproximación, pero no nos referimos a los modelos Dinámicos (S s) de inventarios.

<sup>15</sup>/ Más adelante, en la Sección II.C en la página 17 analizaremos brevemente algunos puntos de los artículos de (Lucas Jr and Prescott, 1971) y de (Hayashi, 1982)

óptimo. Es por eso que a nuestro entender, incorporar explícitamente en el modelo de la 'q' de Tobin las cantidades que el empresario espera vender (o sea, el tamaño del Mercado Meta) puede superar este inconveniente. Es este razonamiento el que nos lleva a plantear y desarrollar esta Tesis, buscando dar respuesta al interrogante planteado, mejorando así la capacidad explicativa de la teoría y la estimación empírica del Modelo.

Para ello, y como iremos desarrollando a lo largo de este estudio, vamos a incorporar explícitamente en las ecuaciones de comportamiento del modelo, el mercado al cual el inversor tiene acceso para vender su producción futura.

El mercado accesible para el inversor, será aquel al cual la empresa puede acceder libremente y sin restricciones de ningún tipo legal, arancelario, monopolístico, etc. Europa por ejemplo es un mercado interesante, pero está cerrado para muchas exportaciones de distintos países. Otros mercados están abiertos, pero son más lejanos y tienen un costo de transporte que también limita el acceso. Discutiremos estas cuestiones y daremos una definición formal en la Sección I.A del Capítulo 2 en la página 42.

## **B. Características de la 'q' de Tobin**

Puede demostrarse que bajo los supuestos habituales, la 'q' marginal que plantea Tobin resultará inferior a la 'q' media observable en la práctica. Esto surge del supuesto de rendimientos marginales decrecientes de los beneficios empresarios, que hace que los mismos aumenten proporcionalmente menos que el stock de capital. Por ello, el marginal de 'q' es menor que el valor medio.

Adicionalmente al problema de la observación de la 'q' de Tobin, surge el de la volatilidad diaria del precio de las acciones, valor este necesario para calcular 'q', que hace bastante difícil cualquier aproximación para valuar la empresa frente al valor de reposición del capital (Blanchard and Fischer, 1989).

Vemos entonces que la 'q' es muy interesante teóricamente, pero como está planteada refleja más una elección sobre cómo financiar una inversión que ya se ha decidido

realizar. Si el stock de capital de la empresa vale menos que lo que está dispuesto a pagar el mercado por él, la empresa optimizadora verá que le conviene financiarse emitiendo acciones en lugar de deuda, pero la decisión de invertir tiene que haber sido previa a considerar este punto, ya que de lo contrario una disminución del precio del capital, por ejemplo, haría que se invirtiera sin límites, lo cual no se verifica en los bienes de alta obsolescencia tecnológica, como podrían ser entre otros las computadoras, que han reducido sus precios a la mitad cada siete años aproximadamente.

En otras palabras, sostenemos que el empresario a la hora de invertir, analiza cuál será el beneficio económico de la inversión<sup>16</sup> y, si resulta positivo, continúa con el siguiente escalón representado por la forma de financiamiento de la inversión. Es en esa instancia cuando se pregunta si es mejor financiarse con acciones o con deuda, que es lo que nos explica la teoría de la ‘q’ de Tobin en su estado actual. Esto no quita que habiendo decidido invertir, al analizar las alternativas de financiamiento termine desechando la inversión.

Nuestro objetivo en esta Tesis es complementar el modelo canónico de la teoría de la ‘q’ de Tobin con la inclusión del tamaño del mercado al que tiene acceso el empresario, contemplando tanto la decisión de inversión como la de financiamiento de manera conjunta.

### **C. La Ausencia del Tamaño del Mercado**

Es así que en la versión actual de la teoría de la ‘q’ de Tobin, cuando un empresario produce una cantidad determinada, es porque en algún momento pasado tomó la decisión de invertir de manera óptima, lo que le permitió tener la escala de producción actual. En este esquema, la inversión termina siendo una aproximación del mercado accesible, toda vez que el empresario invierte si tiene un mercado abierto que le genere una rentabilidad mayor a la inversión. Ese nivel de inversión óptimo en cada período determina finalmente cuál es el tamaño de planta y con ello también,

---

<sup>16</sup>/ Esto es, estimará el ingreso por ventas futuras que podrá realizar menos los costos en que incurrirá, descontará los valores resultantes a la tasa de interés correspondiente, y comparará el valor actual neto de sus beneficios futuros con el monto a invertir.

cual será el nivel de producción óptimo.

(Lucas Jr and Prescott, 1971) uniendo estos puntos, concluyen que puede dejarse de lado el tamaño del mercado, ya que la evaluación de los ingresos futuros es realizada por los operadores del mercado de capitales, por lo que el empresario no debe preocuparse por la demanda de su producto. Sin embargo, a continuación definen esa demanda del producto como función del nivel de producción, con lo cual estaríamos cayendo en un razonamiento circular.

En términos prácticos, esto choca directamente con las variaciones especulativas propias de los mercados financieros, que pueden hacer que en un instante una inversión aceptada pase a ser rechazada por un simple cambio de la cotización del precio de las acciones, que podría ser resultado de eventos que nada tienen que ver con el mercado o la empresa en particular.

Es por ello que a nuestro entender, coincidiendo con (Tobin, 1969), el análisis del mercado que realiza el empresario es más profundo y debe ser incluido en el modelo, ya que de lo contrario quedaría limitado a la decisión de financiamiento, como ya comentamos. No es que esté equivocado el razonamiento de (Lucas Jr and Prescott, 1971), el punto es que sólo se enfoca en la parte del financiamiento, y asume que ya ha sido tomada la decisión de invertir.

Por el contrario, en nuestra Tesis proponemos que es posible integrar en un sólo modelo de la función de inversión, tanto a las decisiones de inversión, dominadas por el análisis de los beneficios futuros descontados que obtendrá el empresario, con la decisión de financiamiento que decida si emitir deuda o acciones para financiarse, incorporando la teoría de la 'q' de Tobin.

Complementando lo anterior, (Hayashi, 1982) postula en su síntesis neoclásica como ya hemos dicho, que la función de inversión es independiente tanto de la función de producción como de la curva de demanda del producto de la empresa. Basa esta afirmación en que durante el proceso de resolución de las sendas óptimas de las variables de estado y de control (capital, insumos e inversión respectivamente), la 'q' de Tobin resulta igual a la variable de coestado (llamada ' $\lambda$ ' en su formulación) dividida por el precio de los bienes de inversión.

Más allá de la complejidad matemática, lo que debe quedar claro es que este es tan solo uno de los pasos intermedios a resolver para encontrar la solución de un óptimo dinámico. En otras palabras, lo que afirma (Hayashi, 1982) es cierto, pero para un punto “t” en el tiempo, y no necesariamente para toda la senda óptima. Si bien lo anticipamos aquí sin demostración, mostraremos mediante la ecuación (2.24) de la Sección B del Capítulo 3 en la página 63 y siguientes, el origen de nuestra afirmación.

### III. Descripción General del problema

En términos generales el empresario analizará cuáles son sus ingresos y cuáles son sus gastos, y tratará de obtener la mayor ganancia posible. Si llamamos  $\Pi_t$  a la ganancia neta del período ‘t’<sup>17</sup>, podemos plantearla como:

$$\Pi_t = P F(K_t, L_t) - wL_t - P^I I_t - bP^I I_t^2 \quad (1.11)$$

Donde:	$\Pi_t$	Ganancia empresaria neta en el período ‘t’
	$P$	Precio de los bienes producidos por el empresario
	$P^I$	Precio de los bienes de inversión (o ‘bienes de capital’)
	$F(K_t, L_t)$	Función de producción que expresa la transformación de una cantidad de insumos (‘K’ y ‘L’) en una cantidad de bienes finales
	$K_t$	Stock de capital de la empresa al inicio del período ‘t’
	$L_t$	Unidades de trabajo aplicadas en el proceso productivo durante el período ‘t’
	$w$	Salario de los trabajadores
	$I_t$	Nivel de inversión bruta de la empresa en el período ‘t’
	$b$	Constante positiva

Debemos notar que hemos dejado fijos los precios de los bienes y factores, por lo cual no llevan el subíndice de tiempo ni ‘P’, ni ‘ $P^I$ ’ ni ‘w’. Además, hemos agregado una

---

<sup>17</sup>/ Agregamos el subíndice ‘t’ porque trabajamos en tiempo discreto y estamos interesados en la dinámica del proceso, sabiendo que el empresario buscará que sea máxima su ganancia neta actual y futura, y no sólo la de un período.

función de costo de ajustes de la inversión ( $bP^I I_t^2$ ) que refleja la pérdida que tiene la empresa al invertir<sup>18</sup>. La inversión que se aplica en cada período productivo puede obtenerse como la diferencia del stock de capital entre un período y el anterior, y es equivalente a la inversión bruta del período menos la depreciación de capital, que aquí llamaremos ‘ $\delta$ ’<sup>19</sup>:

$$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t; \quad \text{con } 0 < \delta < 1$$

Si aceptamos que todos los beneficios de la empresa se distribuyen como dividendos, el objetivo de obtener la máxima ganancia en el tiempo será equivalente a lograr el mayor valor de la empresa para los accionistas, que viene representado como el flujo futuro de ganancias descontadas a la tasa de costo del capital<sup>20</sup>. Si llamamos ‘ $V_o$ ’ al valor de la empresa en el momento cero (el actual) y  $r_t$  al costo del capital, podemos expresar el valor de la empresa como:

$$V_o = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+r_t} \right)^t [P F(K_t, L_t) - wL_t - P^I I_t - bP^I I_t^2] \quad (1.12)$$

Es interesante notar que la ecuación (1.12) también puede llevarnos a comprobar el Teorema de Modigliani-Miller que expresa que, si los mercados de capitales son perfectos tienen un comportamiento racional y hay previsión perfecta, la política de dividendos no es relevante a la hora de decidir cómo se financia una inversión<sup>21</sup>.

<sup>18</sup>/ Este concepto será explicado en la Sección III.C del Capítulo 2 (página 52) más adelante, por lo que sólo diremos aquí que esto se debe por ejemplo a las unidades que dejan de fabricarse mientras se instala un nuevo torno en una planta.

<sup>19</sup>/ A  $\delta$  también la suponemos constante en el tiempo, y representa el deterioro físico del stock de capital debido al uso del mismo. Notemos que esta ecuación también puede expresarse como la más conocida  $K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t$

<sup>20</sup>/ Supondremos aquí que este costo de capital no debiera estar influido por valuaciones especulativas o burbujas financieras que pudieran existir en los mercados de capitales

<sup>21</sup>/ No podemos dejar de resaltar la importancia de que se cumplan los supuestos indicados, ya que por ejemplo una distorsión debida a la aplicación de impuestos, cambiará el resultado final del Teorema.

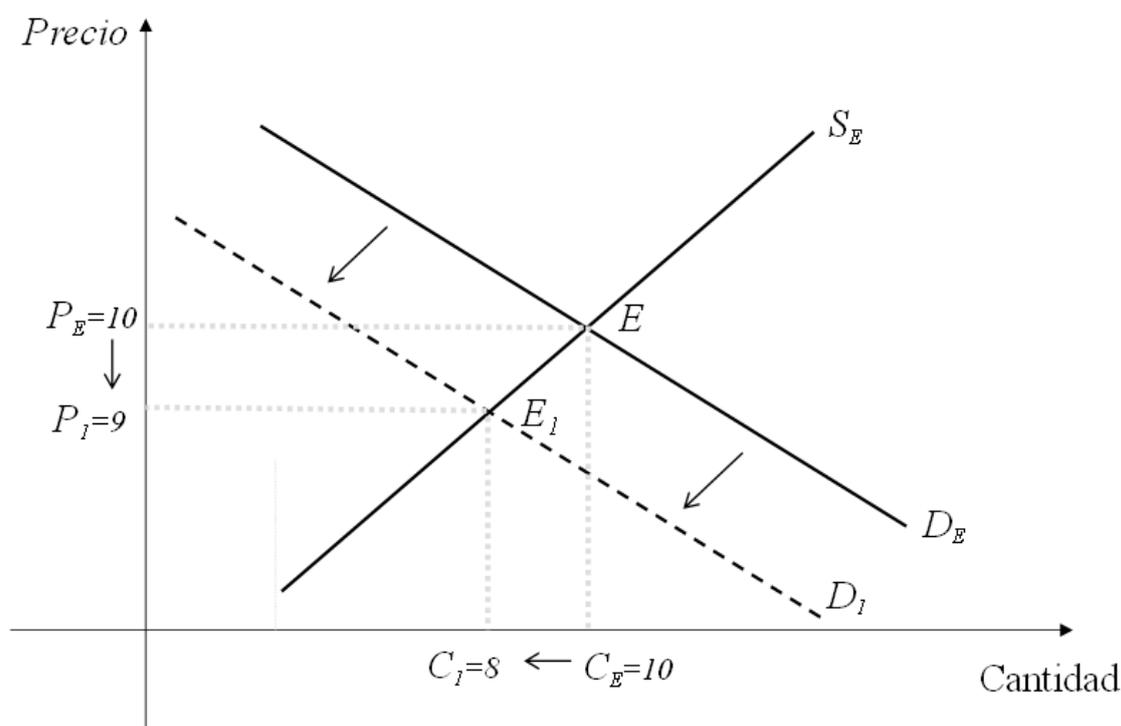


Figura 1.2: Shock Externo en el Nivel de Ventas de la Industria

### A. Mecanismos de Transmisión de Información

Vemos entonces que el empresario al evaluar el valor de la empresa, considera su producción potencial, toda vez que estima la cantidad que producirá y la multiplica por el precio de venta que espera por su producto. A ello le resta el costo de los insumos y el valor de las inversiones a realizar, quedando un beneficio neto período a período que, sumado y descontado a la tasa ‘r’ hasta el día de valuación, generará el valor de la empresa. Pero qué pasaría si hubiera un shock externo que disminuyera la demanda del producto en el mercado donde vende la empresa, ¿este modelo sería capaz de ajustar al cambio?. Veamos.

Analicemos en primer término, lo que sucede en el mercado de productos de la empresa. En un gráfico de oferta y demanda, el shock vendría reflejado por un desplazamiento de esta última hacia la izquierda, como se muestra en la Figura 1.2, donde la curva de demanda se desplaza de ‘ $D_E$ ’ a ‘ $D_1$ ’, cambiando el punto de equilibrio desde ‘E’ a ‘ $E_1$ ’. Obviamente esto cambia las cantidades y precios de un equilibrio a otro, reduciendo las cantidades vendidas (en este ejemplo simulado), de 10 a 8 y el precio de venta de 10 a 9. Hasta aquí nada es nuevo, pero analicemos

cómo se transmite este cambio en el modelo de la ecuación 1.12, quitando el símbolo de suma y la tasa de descuento, para simplificar el análisis y la explicación<sup>22</sup>:

$$\Pi_t = P F(K_t, L_t) - wL_t - P^I I_t - bP^I I_t^2 \quad (1.13)$$

Veamos detenidamente esta ecuación, y notemos que se reflejará el impacto de la variación del precio en el mercado, pero la función de producción no contiene ningún elemento que la haga reaccionar a este shock de demanda por sí misma, salvo el precio del producto.

Analicemos numéricamente lo que podría suceder, sabiendo que esta es una de las infinitas alternativas que podrían producirse, y cuyos resultados podemos evaluar más fácilmente con la ayuda del Cuadro siguiente:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 \text{Inicial:} & 10 & = & 10 * 10 & - & 2 * 15 & - & 10 * 2 & - & 1 * 10 * 4 \\
 & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 \Pi_t & = & P & F(K_t, L_t) & - & wL_t & - & P^I I_t & - & bP^I I_t^2 \\
 & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 \text{Final:} & 6 & = & 9 * 10 & - & 2 * 15 & - & 9 * 2 & - & 1 * 9 * 4
 \end{array}$$

En síntesis, hemos supuesto un beneficio inicial de \$ 10 y un nivel de producción de 10 unidades, con 15 empleados con un salario de \$ 2 cada uno, una inversión de 2 unidades y el precio de los bienes de capital igual al precio del producto. La variación del precio es la que habíamos dicho (de \$ 10 baja a \$ 9), y aunque no hay lugar para la variación de las cantidades vendidas, la producción ajustará a la baja debido a que la disminución del beneficio provocará la reducción del nivel de inversión. Al reducirse el beneficio que otorga la inversión, la senda óptima de stock de capital arrojará una necesidad de producción menor.

Vamos a focalizar aquí dos cuestiones que serán útiles para entender el razonamiento que aplicamos más adelante, en términos más rigurosos.

### 1. Mecanismos de transmisión

<sup>22</sup>/ Nada cambiaría si utilizáramos el valor de la empresa en el análisis.

Más adelante haremos el planteo formal, pero este ejemplo nos sirve para ver que al resolver el problema del empresario mediante la teoría del control óptimo, lo que se hace es utilizar las variables de control para establecer el comportamiento de la variable de estado. En términos más sencillos aún, lo que haremos será encontrar las sendas óptimas de las variables de control que maneja el empresario, la inversión 'I' y la cantidad de trabajo 'L', para establecer el comportamiento del stock de capital 'K'. En el caso del ejemplo planteado, la cantidad de mano de obra requerida y el nivel de inversión solicitado se ajustan a la caída del precio de venta, y el resultado será una menor senda óptima del valor de la inversión y de la cantidad de mano de obra, que llevarán a una menor acumulación de capital<sup>23</sup>.

## 2. Precios del producto

En este caso lo que queremos señalar es la importancia del mecanismo o señal de transmisión que provocan los precios, como elemento de vínculo directo con el mercado donde el empresario vende su producción. Pero lo que nos interesa mencionar en realidad, es que aunque luego utilicemos el supuesto de precio unitario, el mismo siempre estará integrado en la ecuación del modelo, por eso cuando realicemos la estimación econométrica tomaremos los valores de producción en dólares que incluyen la cantidad vendida multiplicada por los precios, sin discriminar ninguno de los dos.

## B. Empresas Precio Aceptante

Está claro entonces el mecanismo de ajuste planteado, pero es necesario notar que esta forma de transmisión de información a través de los precios requiere de mercados competitivos en los que el empresario pueda vender toda su producción sin inconvenientes. Estos son los supuestos generales de la competencia perfecta, y lo que nos cuestionamos aquí es el valor de aceptar este supuesto restrictivo para analizar el desempeño de las inversiones que se realizan tanto en mercados competitivos como no competitivos.

---

<sup>23</sup>/ Sería más común plantear un salario 'w' variable que también ajustaría a la baja, pero no lo hacemos para evitar tener que incluir el mercado de trabajo en el análisis.

Muchos son los ejemplos que podríamos dar para rechazar este supuesto, sobre todo si tomamos el caso del comercio internacional en el que las barreras, arancelarias u otras, están presentes. Pero sin ir a esos casos extremos, el solo hecho de agregar rigideces como impuestos y tarifas o el propio costo de transporte, hace que perdamos este mecanismo de ajuste como forma de transmisión clara y perfecta de las señales de los precios del mercado hacia los volúmenes de producción.

Si bien el significado de que una empresa sea '*precio aceptante*' (Varian, 1992) alude a que toma el precio del mercado y no puede influir en él (no tiene posición monopólica ni es fijador de precios), resulta habitual que también se acepte en los modelos de la 'q' de Tobin, la conducta de '*empresa competitiva*', que incluye además la posibilidad de vender todo lo que se quiera al precio de mercado. Esta distorsión es la que justifica la inclusión, en forma explícita, del tamaño del mercado objetivo que el empresario puede abastecer, de manera de reemplazar la señal de precios de mercado por una estimación de los volúmenes esperados de venta.

Podemos aceptar que el empresario que va a decidir una inversión toma como dados los precios de su producto, ya que o bien se trata de un producto existente y los precios ya están vigentes en el mercado al que se va a dirigir, o bien es un producto nuevo y está dispuesto a aceptar el que fije el mercado una vez que inicie la venta de un nuevo producto. Suponer que el inversor tiene capacidad para fijar el precio del producto, implicaría referirnos sólo a mercados no competitivos, cuando el objetivo es abarcar un espectro lo más amplio posible de las inversiones. Igualmente, no es que el precio no pueda variar, se trata de que no lo va a hacer por cambios en las cantidades producidas y vendidas por la empresa, que por lo tanto es incapaz de influir en ese precio.

El punto que está en discusión entonces, es que el supuesto de demanda ilimitada del producto no parece ajustarse a la realidad, ya que las señales de precio no se transmiten a la escala de producción, dado que no se puede vender todo lo que se quiera. Es por ello que resulta necesario incluir en el modelo, una restricción que específicamente relacione el nivel de producción con el volumen de ventas potencial.

En modelos como los de Ramsey, así como en la mayoría de los EDGE que derivan

de él, la producción se enfrenta con el consumo y de su interacción surgen tanto las señales de producción como los límites a la misma.

Por ser de equilibrio parcial, el modelo de la ‘q’ de Tobin vincula el nivel de producción sólo con el valor del bien de capital y descansa en las señales de precio para ajustar el volumen producido, recurriendo implícitamente a los supuestos de la competencia perfecta que como mencionamos, no están vigentes en muchos de los mercados en los que se va a invertir<sup>24</sup>.

Por ello, la incorporación explícita de una restricción a las posibilidades de venta de la producción, mejorará tanto la capacidad explicativa del modelo como el ajuste empírico del mismo.

Notemos también que al considerar que es el empresario inversor el que realiza la estimación de sus ventas futuras, estamos incorporando los casos de mercados de productos que operan tanto en competencia perfecta así como con otros tipos de funcionamiento (monopolístico, oligopólico, etc.), abarcando así otros casos posibles.

Resumiendo, en esta Tesis vamos a considerar que el empresario estima su demanda potencial a través del estudio de la maximización de la utilidad que realizan los consumidores a los que espera abastecer con su producto en cada mercado. El resultado de esta estimación es un dato para nuestro Modelo Ampliado.

### C. La ‘q’ Media y la Marginal

Aceptaremos como válida la Proposición I de (Hayashi, 1982) que nos dice que la ‘q’ media (observable), coincide con la marginal (no observable), cuando las funciones de producción y de costo de ajuste de la inversión son homogéneas de primer grado y la empresa es precio aceptante<sup>25</sup>.

Nos preguntamos entonces cómo queda este supuesto, si mantenemos la restricción de *precio aceptante* pero no nos apoyamos en el supuesto de *empresa competitiva* (y

---

<sup>24</sup>/ Vamos a mostrar y verificar en la Sección II.B del Capítulo 2 (cf. página 135), que cuando se cumplen los supuestos de la teoría de la ‘q’ de Tobin, la función de oferta del empresario puede no estar bien definida y sus beneficios resultarían crecientes o sin límite.

<sup>25</sup>/ Verificamos esta afirmación en la Sección II.?? del Apéndice A en la página ??.

mercado ilimitado del producto).

Pues bien, como puede verificarse en la demostración de la Proposición I dada por (Hayashi, 1982), ambas variables siguen coincidiendo en esas condiciones, debido a que la ‘q’ media es independiente del stock inicial de capital, ya que los rendimientos son constantes a escala y por lo tanto las inversiones tanto de la empresa “i” como la de la empresa “j” serán proporcionales<sup>26</sup>. Esto significa que:

$$\frac{I_i K'_i}{K_o} = \frac{I_j K'_j}{K_o}$$

Lo mismo sucederá con la decisión de cantidad de mano de obra (la otra variable de control del modelo), que verificará que:

$$\frac{L_i K'_i}{K_o} = \frac{L_j K'_j}{K_o}$$

Si la empresa es formadora de precios en el mercado objetivo (no es *precio aceptante*), la Proposición I también se cumple, pero agregando la elasticidad de demanda del producto, dado que en este caso el precio del bien es una variable adicional de la función de producción. Más allá de esto,  $q_{Mg} = q_{Me}$  y esta es la denominada Proposición II que también puede verse en (Hayashi, 1982).

## D. El Mercado Local

Antes de continuar tenemos que señalar que también habrá un mercado local en el cual el empresario contratará la mano de obra, y por lo tanto los consumidores serán también trabajadores.

Si bien el empresario se enfrenta a mercados ubicados en distintas localidades que pueden tener demandas diferentes, podemos considerar que para decidir su inversión sólo piensa en la demanda incremental o marginal que se produciría incorporando un nuevo mercado potencial<sup>27</sup>.

---

<sup>26</sup>/ Puede verse una verificación de la Proposición I basada sólo en la homogeneidad de ‘F’ y ‘ $\psi$ ’ en la Sección II.?? del Apéndice A en la página ?? más adelante.

<sup>27</sup>/ Esto puede no ser así, ya que la inversión puede planearse para el mercado actual también.

El supuesto implícito que estamos aplicando, en definitiva, es que la inversión a realizar y la producción que genere, sólo será destinada a ese nuevo mercado, y nada de ella se venderá en el mercado actual. También podemos pensar que el empresario toma su mercado y las ventas actuales como dados, y proyecta nuevas inversiones para cubrir un nuevo mercado, que puede estar tanto en el país como en el exterior. Su demanda total, en este caso, vendría dada por la suma de las cantidades que surjan del proceso de maximización de la utilidad del nuevo consumidor en cada nuevo mercado, más la demanda actual.

La maximización anterior de la utilidad nos llevará a obtener las sendas óptimas de consumo y ocio del individuo, y de ellas deducir la cantidad de horas de trabajo que el consumidor está dispuesto a ofrecer para maximizar su utilidad.

Pero en el caso de la cantidad de horas trabajadas, el empresario mirará sólo la maximización de la utilidad de los consumidores de su localidad o país, que son quienes brindarán su oferta laboral.

Tenemos entonces que el empresario analizará simultáneamente dos aspectos:

- la demanda potencial que existe para su producto, que surgirá a partir de la maximización del consumo que realizan los integrantes de sus mercados objetivo,
- la cantidad de mano de obra que deberá contratar, dado el salario de mercado obtenido a partir de la cantidad de horas que están dispuestos a trabajar sus potenciales empleados, esto es, aquellos que viven cerca de su establecimiento.

## **IV. Síntesis de los Resultados de esta Tesis**

Nuestro análisis parte de un modelo de equilibrio parcial con fundamentación microeconómica, en el que los participantes de los mercados optimizan sus decisiones. Todos los consumidores se desenvuelven en una economía competitiva, sin barreras ni impuestos, mediante un consumidor promedio o representativo.

En este marco, analizamos el comportamiento de los empresarios que se enfrentan a

una decisión de inversión, y detectamos que además de pensar en cómo financiarla, lo cual estaría reflejado en la 'q' de Tobin, también observan cuál será el beneficio que obtendrán por la inversión, calculando cuántas unidades de la nueva producción podrán vender y a qué precio.

En la teoría tradicional de la 'q' de Tobin, las señales del mercado en el cual el empresario comercializa su producto se transmiten a través de los precios, gracias al supuesto de competencia perfecta que permite vender todo lo que se quiera al precio de mercado.

Vemos que este supuesto no podría ser aplicable para la teoría de la inversión en la práctica<sup>28</sup>, debido a que muchos mercados son no competitivos (monopolios naturales, etc.) o tienen rigideces y barreras (impuestos, tarifas, fletes, etc.) y en ellos también se realizan inversiones.

También mencionamos<sup>29</sup> que al utilizar el supuesto de competencia perfecta y una función de producción homogénea de primer grado, la oferta del producto queda indeterminada, lo cual es un factor adicional para rechazar la competencia perfecta.

Dado que el supuesto de rendimientos constantes a escala es necesario para que se cumpla la Proposición I de (Hayashi, 1982), explicamos que a corto plazo la función de producción tendrá rendimientos decrecientes a escala, evitando entonces la indeterminación de la función de beneficios de la empresa.

Adicionalmente, también verificamos que la Proposición I se cumple sin necesidad de que haya competencia perfecta en el mercado de productos del empresario<sup>30</sup>, ya que es inherente a la concavidad de las funciones. Esto nos permitió continuar adelante con la investigación, utilizando funciones homogéneas de primer grado para la producción y los costos de ajuste, mercados competitivos para el consumo y los insumos, y empresas inversoras precio aceptantes.

Razonamos entonces que el supuesto del empresario que acepta el precio del mercado puede estar vigente en la teoría de la inversión, pero el supuesto de poder vender todo

---

<sup>28</sup>/ Ver las Secciones III. B y III.C en la página 23.

<sup>29</sup>/ Ver Sección III. B del Anexo A en la página 135

<sup>30</sup>/ Ver la Sección II. ?? del Anexo A en la página ??

lo que se quiera al precio de mercado (demanda sin límite), no podría sostenerse.

Para reemplazarlo en nuestro Modelo, asumimos que el valor de las cantidades vendidas vendrá determinado por el tamaño del mercado al cual puede tener acceso el empresario, con un precio rentable de venta de su producto. Llamamos Mercado Meta a esta estimación del volumen de las ventas que espera realizar el empresario optimizador.

Decimos también que ese Mercado Meta que estudia el inversor, está integrado por todos los consumidores a los que les puede vender sus nuevos productos fabricados con la inversión que va a realizar, con un margen adecuado de ganancia empresarial, sin importar la ubicación geográfica de los mismos (cf. Sección I.A del Capítulo 2, en la página 42). La estimación del tamaño del mercado que realiza el inversor, la suponemos similar a la optimización que hacen los individuos para calcular su consumo óptimo.

Aplicando el supuesto de preferencias cuasilineales de los consumidores<sup>31</sup>, el proceso de agregación de la demanda que realiza el empresario, y confirmamos en la Sección II.A.1 del Capítulo 2 (página 44), que nuestro Modelo es de Equilibrio Parcial Competitivo.

Los consumidores en el Mercado Meta, mientras tanto, tienen vida infinita y deciden la cantidad de unidades a consumir de manera óptima, tomando los precios como dados y respetando la restricción presupuestaria intertemporal proveniente de sus niveles de numerario, ingresos y consumos futuros.

La producción se organiza también con mercados competitivos de insumos integrados por empresas precio-aceptantes, y mercados de productos en los que las empresas no son fijadoras de precio y cuyo volumen de ventas está relacionado con el tamaño del mercado objetivo. Todas tienen funciones de producción y funciones de costo de ajuste de la inversión homogéneas de primer grado. Esto nos asegura el cumplimiento de las condiciones de la Proposición I de (Hayashi, 1982)<sup>32</sup>, y la igualdad entre la 'q' media observada en la realidad y la 'q' marginal no observable.

---

<sup>31</sup>/ Ver (Mas-Colell and Green, 1995) para los detalles.

<sup>32</sup>/ Ver los comentarios realizados en la Sección III.C en la página 25

## A. El Modelo Teórico

Nuestra Tesis plantea un modelo basado en la teoría de la 'q' de Tobin, al que le incorporamos una restricción adicional, que viene dada por la necesidad de que el nivel de producción planeado no supere el tamaño del Mercado Meta proyectado.

El tamaño de este Mercado Meta, se determina en términos teóricos mediante una estimación de la maximización de la utilidad que realizan los consumidores, y que arroja como resultado la senda de consumo óptimo que adoptarán.

El modelo así planteado, se resuelve mediante el principio del máximo de Pontryagin, aplicando una nueva restricción mixta sobre las variables de estado y de control, para asegurar que la senda de producción resulte menor o igual a la senda de consumo, representativa del Mercado Meta.

La solución de este modelo nos llevó a un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales, que fueron sintetizadas en el sistema reducido de dos ecuaciones diferenciales que puede verse en la ecuación (2.26) de la página 65.

Despejamos a continuación el Estado Estacionario y representamos un diagrama de fases, que resultó similar al del modelo general de Tobin, sin la restricción del Mercado Meta.

Investigamos la aplicación efectiva de la restricción incorporada sobre el Mercado Meta, lo que nos llevó a concluir que el mismo tiene un valor diferente de cero en el Estado Estacionario, por lo que resulta un término relevante desde el punto de vista teórico.

A continuación, loglinealizamos el modelo reducido y verificamos sus condiciones de estabilidad que, al tener la matriz del sistema determinante negativo, se cumplen mediante un sendero de ensilladura (cf: página 176). También resolvimos el modelo loglinealizado y encontramos una solución general para el mismo que puede verse en el Cuadro 2.8 de la página 71.

## B. Verificación Empírica 1952-1976

Determinado el modelo teórico, realizamos una evaluación empírica y luego de una breve revisión de la literatura y las condiciones de aplicación, seleccionamos el caso de Estados Unidos entre 1952 y 1976, para el cual contamos con una estimación de los valores de la ‘q’ de Tobin realizada por (Von Furstenberg et al., 1977).

A fin de confrontar nuestro modelo con la realidad, realizamos algunos ajustes, como la aplicación de logaritmos a las variables, que nos llevaron a plantear nuestra ecuación empírica (3.3) de la página 83.

Utilizando datos de la Federal Reserve Economic Data (FRED), el Penn World Table (PWT) y (Von Furstenberg et al., 1977), hicimos una sucinta revisión del comportamiento de las variables durante el período de tiempo del estudio.

Fruto de ello, descubrimos un cambio de tendencia en la ‘q’ de Tobin a fines de los años cincuenta, que podría haber sido provocado por una variación en los parámetros del Modelo, producida o ayudada por los cambios que la propia economía estadounidense tuvo en todo este período.

También este análisis nos permitió detectar un comportamiento similar de las tres principales variables<sup>33</sup>, que nos llevó a considerar la posibilidad de cointegración de las mismas.

Cuando realizamos una primera estimación de nuestra ecuación empírica (3.3) comprobamos que había variación de parámetros en 1958 y en 1975, por lo que para superarla incorporamos dos variables binarias o ficticias en esos años. También vimos que la tasa de interés no resultó estadísticamente significativa para la estimación, por lo que resolvimos quitarla de la misma.

La estimación realizada, cuya ecuación (3.6) puede verse en la página 102 dio una buena bondad de ajuste sin autocorrelación ni heteroscedasticidad, y con residuos de la regresión estacionarios. A partir de nuestra presunción de cointegración, verificamos que las tres series involucradas tienen raíz unitaria y sus primeras diferencias son estacionarias, por lo que resultan Integradas de Primer Orden, que es la primera

---

<sup>33</sup> /  $(I/K)^2$ , la ‘q’ de Tobin y el Mercado Meta

condición para la cointegración.

Respecto a la segunda condición, que corresponde a la existencia de una combinación lineal de las series involucradas que permita obtener residuos estacionarios, vimos que la misma se cumplía al aplicar la prueba de Dickey-Fuller Aumentado (DFA), no obstante lo cual realizamos también la prueba de rango de Johansen y comprobamos que efectivamente las variables del Modelo están cointegradas.

A partir de este resultado, estimamos el Modelo de largo plazo y el Modelo de Corrección de Errores (ECM), con lo que verificamos que efectivamente las variables de nuestro Modelo tienen un comportamiento conjunto en el largo plazo (esto es, están cointegradas), con una significatividad del 94 %. Adicionalmente, la velocidad de ajuste del corto al largo plazo según la estimación, equivale al 69 % de la brecha en cada período. Vimos asimismo que el ECM estimado, no presenta autocorrelación ni heteroscedasticidad

También pudimos comprobar mediante el Modelo de Corrección de Errores, que en el corto plazo hay causalidad en el sentido de Granger de la 'q' de Tobin a la relación de inversión a capital, y que no es significativa la causalidad del Mercado Meta hacia la relación de inversión a capital. Por otra parte, pudimos verificar que la 'q' de Tobin y el Mercado Meta son variables exógenas débil, lo que nos permitió estimar la ecuación de largo plazo de (I/K) en forma condicional a 'LQ' y 'LMM'.

A fin de evaluar el comportamiento del Modelo cointegrado y los cambios estructurales, aplicamos los test de (Gregory and Hansen, 1996a), y detectamos que si bien hay evidencias de cointegración, la misma no puede confirmarse para todos los casos debido al cambio en los parámetros del Modelo.

Esta ambigüedad de los resultados de la prueba nos impidió avanzar más allá, a pesar de lo cual dos cosas quedaron claras en la estimación con datos de Estados Unidos 1952-1976:

1. hay cointegración, y
2. el Mercado Meta es estadísticamente relevante.

Frente a estos resultados, y aún conociendo que por tratarse de variables cointegradas

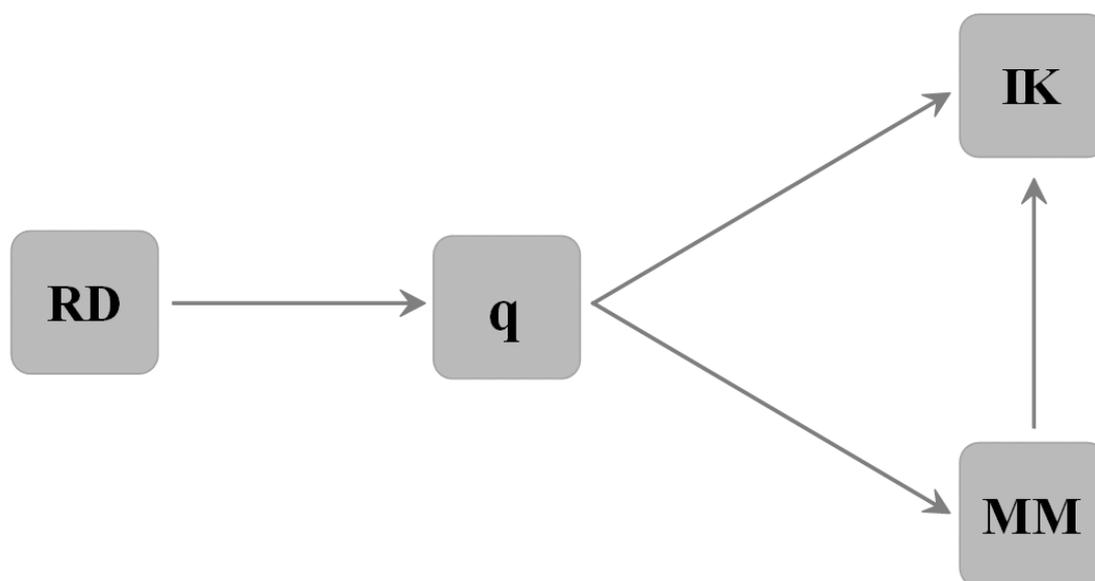


Figura 1.3: Causalidad en el Sentido de Granger si no hubiera cointegración

no sería aplicable la prueba de causalidad en el sentido de Granger basado en la distribución 'F'<sup>34</sup>, nos animamos a partir de esta duda que introduce el resultado de la prueba de (Gregory and Hansen, 1996a), a realizar igualmente la prueba de Granger de causalidad con las variables (I/K), 'q' de Tobin, Mercado Meta y Tasa de Interés Prime.

El mismo indicó una alta significatividad en la causalidad de la tasa de interés y de la 'q' de Tobin hacia el Mercado Meta y la relación de inversión a capital (I/K).

Una posible interpretación del resultado anterior se da en la Figura 1.3, en la que puede suponerse que la tasa de interés *'precede'* a la 'q' de Tobin<sup>35</sup>, y a través de ella impacta en el Mercado Meta y la relación de Inversión a capital. A su vez, el Mercado Meta también influye en (I/K).

Con estos resultados, volvimos a plantear el Modelo empírico de la ecuación (3.6) en la página 102, que equivale a la formulación cointegrada de largo plazo junto con las dos variables ficticias, para realizar las comprobaciones estadísticas correspondientes, que mostraron la ausencia de autocorrelación, de heteroscedasticidad y de

<sup>34</sup>/ Ver Sección III.F del Capítulo 2 en la página 146 . El test de Granger fue aplicado a las primeras diferencias de las variables, a fin de hacerlas estacionarias.

<sup>35</sup>/ El cuadro de la Figura C.14 en la página 193 y el gráfico de la Figura 3.3 en la página 98 muestran causalidad de 'RD' a 'Q', pero no a la inversa.

colinealidad, la normalidad de los residuos y la correcta especificación del Modelo. Estos resultados pueden verse en la Sección III.F en la página 197 y siguientes del Capítulo 3.

La significatividad y no redundancia del parámetro del Mercado Meta, también son analizadas en el Capítulo 3, Sección III.D, páginas 100 y siguientes, donde comprobamos que la ausencia del Mercado Meta en la ecuación produce un menor  $R^2$ , no se verifica cointegración y no hay causalidad de largo plazo en el sentido de Granger, desde las variables del modelo estimado hacia la relación de inversión a capital. Por otra parte, este modelo sin ‘MM’ arroja dudas en el corto plazo, sobre la causalidad en el sentido de Granger de la ‘q’ hacia  $(I/K)$ , y no se verifica causalidad de la tasa de interés.

Realizamos adicionalmente dos variaciones de nuestro Modelo, que nos mostraron que si bien la estimación en niveles tendría mejor bondad de ajuste que la realizada en logaritmos, la relación de largo plazo de las variables es algo más débil.

La segunda variación se refirió a la estimación de  $(I/K)^2$  utilizando sólo el Mercado Meta como variable explicativa, junto con la ordenada al origen y las dos variables ficticias (ver Panel ‘a’ de la Figura C.29 en la página 205). Como se puede ver, la estimación es muy buena y no tiene autocorrelación (tampoco es heteroscedástica), y la prueba de rango de cointegración de Johansen detectó al menos una ecuación cointegrada.

A pesar de estos buenos resultados, vimos que al ser el valor del parámetro ‘C(1)’ menor que ‘-1’ se verifica un error de especificación, que junto con las apreciaciones acerca del modelo sin Mercado Meta, nos hacen concluir que la correcta especificación del Modelo debería incluir tanto a la ‘q’ de Tobin como al Mercado Meta, al menos para tener las variables cointegradas.

### **C. Verificación Empírica 1950-2010**

Como forma de ampliar los resultados, y a fin de corroborar el funcionamiento del Modelo con una muestra diferente y con más observaciones, analizamos de nuevo el

caso de Estados Unidos, pero tomando un período más amplio (61 años), y cambiando los valores de la 'q' de Tobin por una nueva estimación realizada por (Mihaljevic, 2010). Dado que los resultados obtenidos coinciden en lo cualitativo con los hallados anteriormente, concluimos que el Modelo resulta válido no sólo para la realización de 1952-1976.

También nos mostró este ejercicio, que el reducido tamaño de la muestra original de sólo 25 observaciones, resultó suficiente para comprobar la cointegración de las variables y detectar las relaciones de corto y largo plazo que hemos visto, todo lo cual resulta ahora confirmado.

Incluimos como variables explicativas a la relación de crédito a GDP (que si bien está correlacionada con el Mercado Meta, reduce la autocorrelación de los residuos), y la tasa de interés. Con respecto a esta última, vimos que la tasa 'Prime' ajusta mejor que la 'de descuento', y además es la 'primera diferencia' de la tasa prime la más relevante, por lo que la incorporamos a la estimación.

Siguiendo el mismo camino que en el caso anterior, verificamos el comportamiento del modelo cointegrado en presencia de cambios estructurales. El test de (Gregory and Hansen, 1996a) detectó un posible cambio estructural en 1994 y la presencia de cointegración en todos los casos, salvo cuando el quiebre afecta a la constante, la pendiente y la tendencia conjuntamente, aunque el rechazo fue con un valor muy pequeño (5,93 frente a un tabulado de 5,96), lo que permitiría aceptarlo reduciendo la significatividad del 95 % de la prueba.

Comparamos a continuación, una estimación del Modelo con variables binarias y otra sin ellas, a fin de verificar la influencia de los cambios estructurales en la estimación. Mediante una ecuación ARDL verificamos que se mantiene la cointegración y el Modelo tiene mejor ajuste sin 'binarias' que con ellas, a la vez que aumenta la significatividad de los parámetros de la 'q' de Tobin y el Mercado Meta. Las variables binarias, mientras tanto, no resultaron significativas.

A partir de este resultado decidimos estimar el Modelo sin las variables binarias, pero dado que tenemos series de tiempo con diferente orden de integración <sup>36</sup>, aplicamos

---

<sup>36</sup>/ Recordemos que incluimos la primer diferencia de la tasa de interés, que es estacionaria,

Cuadro 1.1: Resultados Resumidos de las Regresiones Efectuadas

Concepto	1952-1976	1950-2010
$R^2$ Largo Plazo	79,4 %	87,8 %
$\bar{R}^2$ Corto Plazo	64,0 %	86,7 %
Autocorrelación: 1 lag	No	No
Autocorrelación: 2 lag	No	No
Heteroscedasticidad	No	No
Relevancia de MM	Si	Si
Cointegración	Si	Si
Normalidad de los Residuos	Si	Si
Velocidad de Ajuste CP-LP	69 %	61 %

la prueba de cointegración de (Pesaran and Smith, 2001). El resultado resultó muy auspicioso, ya que como muestra el Cuadro 3.7 de la página 111, todas las variables están cointegradas, salvo la 'q' de Tobin. Esto podría explicar por qué no se detectó cointegración en estimaciones anteriores que no incluían el Mercado Meta.

Con este resultado, algunas series del Modelo están cointegradas y otras no, por lo que el método de estimación a emplear es el del Modelo de Corrección de Errores para la relación de inversión a capital (I/K), que es la que nos interesa y está cointegrada.

También verificamos que las variables del modelo de Corrección de Errores (VEC) son *exógenas débiles* salvo la relación de inversión a capital (LIK2), siendo correcta entonces la estimación condicionada del modelo de largo plazo de (I/K) a las variables LQ1, LMM, CREPIB y  $\Delta(RD)$ .

En la estimación aplicamos el procedimiento de dos etapas de Engle-Granger, que arrojó los resultados que pueden verse en la ecuación (3.8) de la página 112 para el largo plazo, y el Modelo de Corrección de Errores de corto plazo en la ecuación (3.9) en la página 113.

Las comprobaciones estadísticas, por su parte, confirmaron el buen comportamiento mientras que las demás variables son I(1)

del Modelo, que resultó dinámicamente estable con un  $\bar{R}^2 = 86,7\%$ , sin autocorrelación ni heteroscedasticidad. Puede verse un resumen de las pruebas realizadas en el Cuadro 3.8 en la página 115.

A modo de síntesis de resultados, detallamos en el Cuadro 1.1 de manera comparativa los valores principales de la estimación efectuada para el período 1952-1976 y para 1950-2010, donde vemos que sin correlación ni heteroscedasticidad, ambas estimaciones tienen similar velocidad de ajuste y muestran que el Mercado Meta es relevante.

## V. Organización General de la Tesis

En términos generales plantearemos dos mercados, uno de factores de producción en el que se determina el salario y la cantidad de horas trabajadas, ubicado idealmente en la cercanía de la planta productiva, y el otro al que llamaremos Mercado Meta, el cual el inversor analiza para cuantificar la cantidad potencial a vender y el precio (o el markup) que podrá obtener en el óptimo.

En este segundo mercado se despeja, mediante la maximización de la utilidad del consumidor, la senda de consumo óptimo a lo largo del tiempo que determinará la demanda del producto. Este razonamiento se basa en que la función de utilidad indirecta, que representa la maximización de la utilidad para distintos valores, se convierte en la curva de demanda Marshalliana para los diferentes precios de venta, la cual a su vez expresa la demanda potencial que el inversor puede esperar para su producto.

Obtenida la senda de consumo, nuestro Modelo de equilibrio parcial evalúa la inversión que resulta de resolver el modelo de la 'q' de Tobin, restringido a que las cantidades vendidas no superen la estimación del mercado potencial que espera alcanzar el inversor (el Mercado Meta). A fin de facilitar la agregación de la demanda, usaremos una economía con agentes idénticos con vidas infinitas, que tienen preferencias cuasilineales.

En lo que resta de esta Tesis, vamos a definir con precisión en el Capítulo 2 el

Mercado Meta y plantearemos el desarrollo teórico de nuestro Modelo, incorporando la restricción en el volumen de producción. A continuación resolvemos el Modelo Ampliado y verificamos la estabilidad y el cumplimiento de las condiciones necesarias y suficientes del Principio del Máximo. La significatividad de la nueva restricción en el estado estacionario se comprueba a continuación y se desarrollan los diagramas de fase. El Capítulo finaliza con la loglinealización y solución del sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo.

En el Capítulo 3 incluimos la verificación del comportamiento empírico del Modelo mediante una estimación econométrica, ajustando en primer término el modelo teórico a las posibilidades reales. Este análisis abarca dos estimaciones de la economía estadounidense, una para el período 1952-76 y la otra para 1950-2010 así como varias de las ramificaciones y alternativas de estimación aplicadas. Para cada caso, también se comprueba el comportamiento estadístico de los resultados y se agrega un resumen final.

El Capítulo 4 contiene las conclusiones generales y particulares de la Tesis. A continuación se detallan posibles caminos de investigación y las aplicaciones de los resultados obtenidos, tanto a la teoría como a la política económica.

La Tesis finaliza con tres Anexos, el primero de los cuales se refiere a explicaciones teóricas, el segundo a verificaciones algebraicas del Modelo y tercero contiene cuadros econométricos complementarios.

# Capítulo 2

## El Modelo

Hemos completado hasta aquí la exposición de algunas limitaciones del modelo tradicional. Vamos a detallar a continuación la solución que propone nuestro modelo, incorporando la restricción del Mercado Meta. Para ello, vamos a resolver el mercado de consumo y la 'q' de Tobin utilizando funciones específicas para ambas, así como para la función de producción y la función de costos de ajuste de la inversión.

Como mencionamos en la Introducción, la transmisión de las señales del volumen de venta a través de los precios del producto, quedan interrumpidas cuando no se verifican los supuestos de la competencia perfecta. También hemos notado que, aunque rigideces como los impuestos y los costos de transporte van contra esos supuestos, sería posible proponer una conducta precio-aceptante para estudiar la inversión, ya que la misma puede aplicarse tanto en industrias competitivas como no competitivas.

Vimos en este sentido que podíamos mantener el supuesto competitivo en lo que hace a la aceptación de los precios, pero que no resultaría posible vender todo lo que se produzca al precio de equilibrio en los mercados reales.

Por ello, y a fin de volver a vincular las cantidades vendidas con el nivel de producción, agregaremos una restricción explícita sobre el tamaño del mercado potencial que analiza el empresario antes de decidirse a realizar una inversión.

Esta restricción tiene el objeto de servir como reemplazo de las señales de precio

de venta del producto, y guiará al empresario para establecer, en forma optimal, el tamaño de su inversión.

Como veremos, el empresario buscará maximizar su función de beneficios, pero aun cuando analiza el comportamiento de los consumidores potenciales de su Mercado Meta a fin de estimar la demanda que enfrentará su producción, no buscará maximizar la utilidad de los mismos, algo que está fuera de su alcance. Esto es útil destacarlo, dado que el Modelo que analizamos no es de equilibrio general, sino que solamente se refiere al comportamiento de la inversión, y el empresario utiliza la maximización de los consumidores como mecanismo para estimar la venta potencial de su producto.

## I. El Mercado Meta

Vamos entonces a dar una definición más precisa, de lo que consideramos es el mercado al que se dirige el empresario que está planeando invertir, al cual llamaremos ‘Mercado Meta’ (o también MM). Dado que el inversor estará considerando ampliar su producción, tendrá en cuenta todas las unidades que podría llegar a vender en cualquiera de los mercados a los que tenga acceso, sean actuales o futuros, locales o externos.

Este concepto por lo tanto, no distingue entre diferentes países sino que la clave está dada en la posibilidad que tiene el empresario de vender su producto en un determinado lugar. Debemos notar que a diferencia de lo que sucede dentro de un modelo general sin restricciones al intercambio, en la práctica aparecen limitaciones y no se da la posibilidad del libre acceso a cualquier mercado, todo lo cual será evaluado por el inversor antes de decidir.

En primer lugar tenemos que considerar la restricción económica que impone el costo de transporte del producto en el mundo. Esto es evidente en mercaderías cuya relación entre peso y volumen no es la habitual, lo cual puede encarecer notablemente el flete<sup>1</sup>. Otra barrera natural para acceder a un mercado es el tipo de acondicio-

---

<sup>1</sup>/ Como son aquellas mercaderías que o bien tienen mucho peso para su volumen como el cemento, o bien tienen mucho volumen para su peso, como la gomaespuma

namiento del producto. En aquellos productos conocidos como *frescos* que deben asegurar la cadena de frío, el costo de transporte será importante e influirá en el margen de ganancia.

Podríamos citar muchos ejemplos más, pero a lo que nos estamos refiriendo es en definitiva, al precio con el cual el producto llega a un mercado, el cual en el marco de rigideces en la competencia que estamos planteando en esta Tesis, será una restricción directa para poder vender o no nuestro producto.

Existen también otras barreras formales e informales, como las tarifas, los aranceles y las cuotas de importación entre otras, que son comunes en el comercio internacional y que también determinan cuál será el precio final al que se podrá colocar un producto en un determinado mercado.

Finalmente, también tenemos barreras de acceso a los mercados que sin ser netamente económicas, también influyen en el precio final. Contamos aquí las barreras fito sanitarias, por ejemplo, así como los requerimientos de registro de productos y/o cumplimiento de normativas específicas de los mismos. En un nivel todavía más riguroso, podríamos incluir los requerimientos de ciertos países de contar con socios locales para acceder a sus mercados.

Todas estas trabas, y muchas otras más que ni siquiera mencionamos, hacen que el empresario deba estudiar antes de realizar su inversión, cuál será el volumen del mercado total al cual tendrá acceso efectivo con su producto, y a qué relación entre el precio de venta y los costos podrá hacerlo<sup>2</sup>.

Resaltamos en este punto que estos aspectos económicos señalados así como también muchos no económicos, aplican también en forma directa a los mercados internos de los países, donde se mantienen barreras de distancia, impuestos u otras como las señaladas.

En base a estos criterios, definimos el Mercado Meta de la siguiente manera:

---

<sup>2</sup>/ Aquí lo que está mirando el empresario en definitiva, es cuál será su rentabilidad por producto, de manera de poder calcular el rendimiento de su inversión

## A. Definición: Mercado Meta

El Mercado Meta para el empresario que decide una nueva inversión, está conformado por todos los consumidores a los que les puede vender sus nuevos productos o servicios, con un margen adecuado de ganancia empresaria, y sin importar la ubicación geográfica de los mismos.

## II. Estimación de la Demanda del Mercado Meta

Como anticipamos en la introducción, el empresario calcula cuál es su demanda potencial para saber cuántas unidades podrá vender, lo cual le permitirá estimar su beneficio. Hemos dicho también que el empresario es *precio aceptante*, en el sentido que toma como dado el nivel de precios del mercado, aunque esto no significa que a ese precio pueda vender todas las cantidades que quiera de su producto, sino que se enfrenta a una curva de demanda Marshalliana típica con pendiente negativa.

Para establecer cuáles son las cantidades que puede vender, el inversor realiza una estimación similar a la que hacen los consumidores, considerando que cuando ellos maximizan su función de utilidad, obtienen una senda de consumo óptimo que utilizarán para maximizar su utilidad y riqueza financiera.

Como sabemos, los puntos óptimos de la maximización de utilidad del consumidor se convierten en la demanda Marshalliana para los diferentes precios de venta, con lo cual el empresario tiene los valores de precios y cantidades a los que se enfrentará su producto.

## A. La Senda del Consumo en el Mercado Meta

Para simplificar nuestro análisis, vamos a considerar que si bien la oferta y la demanda se agregan<sup>3</sup>, existe un consumidor promedio de los mercados objetivo del inversor,

---

<sup>3</sup>/ Puede verse una descripción del proceso de agregación en (Mas-Colell and Green, 1995) página 316 y siguientes.

de manera que puede suponerse la existencia de un individuo representativo que nos permitirá mantener el análisis más acotado.

En base a ello, las preferencias de los consumidores en el Mercado Meta serán cuasilineales y estarán representadas por una función de utilidad cuasilineal compuesta por el numerario que llamaremos ‘N’, más una función con elasticidad de sustitución intertemporal constante correspondiente al bien que venderá el empresario, y que vienen representadas por<sup>4</sup>:

$$U [N(t), M(t)] = \int_0^{\infty} \left( N(t) + \frac{M(t)^{(1-\frac{1}{\bar{\sigma}})} - 1}{1 - \frac{1}{\bar{\sigma}}} \right) \cdot e^{-\bar{\beta}t} dt \quad \text{con } \bar{\sigma} > 0 \quad (2.1)$$

Donde ‘M(t)’ refleja el consumo en el Mercado Meta y ‘N(t)’ es el numerario que representa la agregación de todos los demás bienes de la economía y que por simplicidad permitimos que pueda tomar valores negativos. Podría parecer imposible identificar un consumidor representativo en mercados distantes y diferentes. Sin embargo, debemos tener presente que aún cuando culturalmente se vinculen muy poco, el producto los identifica través de los atributos que se le incorporan para ello (Kotler, 1996). Es de esta manera que se pueden encontrar similitudes en los consumidores de productos como McDonald, Coca Cola, Honda u otros que habitan en regiones muy diferentes. Esto por supuesto no evita los problemas de agregación económica, aunque tampoco debería agravarlos sustancialmente.

Consideramos en nuestro modelo que la elasticidad de sustitución intertemporal, que mide la sensibilidad de las variaciones en el consumo entre un período y otro ante cambios en la tasa de interés, es constante. Suponemos que nuestro consumidor representativo tiene vida infinita, y nos focalizaremos en la restricción presupuestaria intertemporal, ya que al ser su período de maximización infinito, debemos darle la posibilidad al consumidor de trasladar su riqueza a lo largo del tiempo. Vamos a considerar entonces la variable N(t) que refleja la totalidad de los demás bienes que tiene el individuo en el período ‘t’, incluyendo sus activos financieros.

---

<sup>4</sup>/ Más detalles sobre las funciones con elasticidad de sustitución intertemporal constante pueden verse en (De la Fuente, 2000).

Su restricción presupuestaria viene representada por  $\dot{N}(t) = [r(t) - \bar{n}] N(t) + Y(t) - M(t)$ . Tenemos entonces las dos ecuaciones para resolver el problema de optimización del consumidor, quien deberá:

$$\max_{M(t)} \int_0^{\infty} \left( N(t) + \frac{M(t)^{(1-\frac{1}{\sigma})} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}} \right) \cdot e^{-\bar{\beta}t} dt \quad (2.2)$$

sujeto a:

$$\dot{N}(t) = [r(t) - \bar{n}] N(t) + Y(t) - M(t) \quad \text{con } N(0) = \bar{N}_0 \quad (2.3)$$

Cuya nomenclatura puede verse en el Cuadro 2.1

Vale la pena mencionar que estamos considerando una tasa intertemporal subjetiva de descuento del individuo  $\bar{\beta}$  fija, pero nada cambiaría en nuestro análisis y resultados, salvo la mayor complejidad del cálculo, si la reemplazáramos por  $e^{-\beta t} = e^{-\int_0^t \beta(s) ds}$ .

### A.1. Equilibrio Competitivo Parcial

Vamos a corroborar en primer término que la función de utilidad es cuasilineal, y por lo tanto podremos utilizar el análisis de equilibrio parcial en lugar del general. La ecuación planteada es:

$$U [N(t), M(t)] = N(t) + \frac{M(t)^{(1-\frac{1}{\sigma})} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

Debemos verificar que las variaciones en el ingreso no generan efecto riqueza sobre  $M(t)$ , o sea que cuando la relación marginal de sustitución (RMS) se iguala con la relación económica de sustitución (RES) en el óptimo,  $M(t)$  no depende del ingreso, que en nuestro caso está incorporado en el numerario junto con el resto de los bienes.

$$RMS = -\frac{\frac{\partial U}{\partial M(t)}}{\frac{\partial U}{\partial N(t)}} = -\frac{M(t)^{\frac{-1}{\sigma}}}{1} = -M(t)^{\frac{-1}{\sigma}}$$

Cuadro 2.1: Variables y Parámetros del Consumo en el Mercado Meta

Nombre	Descripción
<i>Variables</i>	
$\lambda(t)$	Variable de coestado del Principio del Máximo
$r(t)$ :	Tasa de interés en 't' (exógena)
$p_N$	precio del numerario (exógeno)
$p_M$	precio del bien en el Mercado Meta (exógeno)
$M(t)$ :	Consumo total en el Mercado Meta en 't'
$N(t)$ :	Numerario en 't'
$Y(t)$ :	Ingresos en 't'
<i>Parámetros</i>	
$\bar{\beta}$ :	Tasa de descuento subjetiva intertemporal de los consumidores
$\bar{\sigma}$ :	Elasticidad intertemporal de sustitución
$\bar{n}$ :	Tasa de crecimiento de la población.
$\bar{M}(0)$	Valor presente descontado al momento cero del flujo futuro del consumo en el Mercado Meta
$\bar{N}(0)$	Valor presente descontado al momento cero del flujo futuro del numerario en el Mercado Meta
$\bar{Y}(0)$	Valor presente descontado al momento cero del flujo futuro de ingresos en el Mercado Meta

Podemos plantear el problema para una ecuación de presupuesto totalmente general que venga dada por  $R(t) = p_N N(t) + p_M M(t)$ , donde  $p_N =$  precio del numerario y  $p_M =$  precio del bien en el Mercado Meta. Entonces:

$$R(t) = p_N N(t) + p_M M(t) \Rightarrow p_M M(t) = R(t) - p_N N(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(t) = \frac{R(t)}{p_M} - \frac{p_N}{p_M} N(t)$$

$$RES = \frac{\partial M(t)}{\partial N(t)} = -\frac{p_N}{p_M}$$

En el punto de maximización del consumidor el RMS y el RES se igualan, por lo que podemos despejar el Mercado Meta y verificar si depende de la riqueza:

$$RMS = RES \Rightarrow -M(t)^{\frac{-1}{\sigma}} = -\frac{p_N}{p_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(t)^{\frac{-1}{\sigma}} = \frac{p_N}{p_M}$$

$$\Rightarrow M(t) = \left(\frac{p_N}{p_M}\right)^{-\sigma} \quad (2.4)$$

Como la elasticidad de sustitución es constante,  $M(t)$  sólo está influido por las variaciones de precios y por lo tanto no depende de la riqueza ya que no cambiará para cualquier valor que ésta tome<sup>5</sup>. Este resultado nos habilita para poder aplicar un equilibrio parcial en el mercado de consumo y coincide con el comportamiento asumido en (Tobin, 1969), donde las decisiones de acumulación de riqueza son separables de las decisiones de asignación.

<sup>5</sup>/ Recordemos que en un equilibrio parcial, los precios son independientes de la riqueza (Mas-Colell and Green, 1995).

## B. Maximización del Consumidor

Para resolver este problema, el individuo busca encontrar la trayectoria óptima de la variable que puede controlar (el consumo representado por  $M(t)$  en nuestro caso), a fin de lograr por su intermedio que la trayectoria del numerario (variable de estado), sea máxima. Resolvemos entonces el problema del consumidor, considerando que  $M(t)$  es la variable de control y  $N(t)$  es la variable de estado. Planteamos el Hamiltoniano Valor Presente <sup>6</sup>, llamando  $\lambda$  a la variable de coestado<sup>7</sup>, como:

$$\mathcal{H}(t) = N(t) + \frac{M(t)^{(1-\frac{1}{\sigma})} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}} + \lambda(t) \{ [r(t) - \bar{n}] N(t) + Y(t) - M(t) \} \quad (2.5)$$

Aplicando el Principio del Máximo obtenemos la ecuación de Euler para el consumo dada por<sup>8</sup>:

$$\frac{\dot{M}(t)}{M(t)} = \bar{\sigma} [r(t) - \bar{\beta} - \bar{n}] \quad (2.6)$$

A partir de esta ecuación, aplicando la condición de transversalidad y la restricción presupuestaria, llegamos a la senda óptima de consumo en el Mercado Meta:

$$M(t) = \bar{M}_0 e^{\bar{\sigma} t [r(t) - \bar{\beta} - \bar{n}]} \quad (2.7)$$

que será utilizada por el empresario para estimar la demanda potencial que tendrá el producto.

Finalmente haremos una última simplificación antes de continuar. Dado que no estamos interesados en las implicancias que las tasas subjetivas de descuento y de crecimiento de la población tienen en la variación del consumo en el Mercado Meta, eliminaremos estos parámetros. Podemos hacerlo ya que el empresario sólo desea

---

<sup>6</sup>/ Ver la Sección I del Anexo A para los detalles técnicos del Control Óptimo y el Principio del Máximo de Pontryagin. Nos concentramos en el bien que produce el empresario, que es nuestro bien objetivo, aplicando un equilibrio competitivo parcial.

<sup>7</sup>/ Utilizamos esta nomenclatura para diferenciarla de la 'q' de Tobin usada más adelante.

<sup>8</sup>/ La deducción de esta condición así como de las demás condiciones necesarias y suficientes, pueden verse en el Anexo B al final de esta Tesis, en la página 149

conocer la senda óptima del consumo que le permitirá estimar la demanda de su producto, y por lo tanto cancelaremos estos valores para reducir nuestra ecuación de Euler (2.6) y de consumo en el Mercado Meta (2.7) como:

$$\dot{M}(t) = M(t) \bar{\sigma}r(t) \quad (2.8)$$

$$M(t) = \bar{M}_0 e^{\bar{\sigma}tr(t)} \quad (2.9)$$

La importancia de este desarrollo radica en que al haber encontrado la solución para la senda óptima de consumo, nos aseguramos que el empresario podrá estimar su demanda potencial en cada momento de tiempo.

En otras palabras, se aplica en cada momento del tiempo de la senda óptima, el mecanismo de construcción de la demanda Marshalliana ya mencionado<sup>9</sup>, el empresario puede estimar la demanda potencial a la que se enfrentará su producto en forma dinámica, y no tan sólo para un determinado momento 't'.

Podría parecer redundante el punto, ya que si el procedimiento sirve para un momento en el tiempo, también debe servir para todos. Sin embargo, lo que destacamos aquí es que además del procedimiento, hemos verificado que existe esa senda de consumo intertemporal y que el empresario podrá optimizar en términos dinámicos su función de beneficios, ya que ha podido estimar la demanda de su producto en el Mercado Meta en términos dinámicos y no sólo estáticos.

Hemos entonces establecido las ecuaciones correspondientes a la restricción presupuestaria en el Mercado Meta (2.3), y la senda óptima de consumo (2.8) que estima el inversor para conocer la demanda potencial de su producto. Las hemos agrupado en (2.10) por simplicidad, y reiteramos que el empresario estima la primera (2.10 (a)), para conocer la demanda de su producto en el Mercado Meta, y sólo la utiliza a tal fin. No puede modificarla ni influirla ya que no controla la función de utilidad de los consumidores ni la variable de control de ese modelo, que es  $M(t)$ .

---

<sup>9</sup>/ Ver la nota al pie número 3 en la página 42 y (Mas-Colell and Green, 1995) página 316 y siguientes para más detalles.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) \quad \dot{M}(t) = M(t) \bar{\sigma} r(t) & \text{con } M(0) = \bar{M}(0) \\ (b) \quad \dot{N}(t) = N(t) [r(t) - \bar{n}] + Y(t) - M(t) & \text{con } N(0) = \bar{N}(0) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

### III. Modelo Ampliado de la ‘q’ de Tobin

Una vez estimada la senda óptima del consumidor utilizando la función de utilidad cuasilineal (2.2), el empresario está en condiciones de visualizar la curva de demanda Marshalliana a la que se enfrenta en su Mercado Meta, que le será útil para determinar la cantidad de la producción que destinará al mercado de consumo.

Vamos entonces a resolver la *q de Tobin* utilizando funciones específicas para la producción y los costos de ajuste de la inversión, y también introduciremos en esta Sección, la restricción mixta sobre el tamaño del Mercado Meta, a fin de vincular las señales de venta del producto con el volumen de la producción.

Llamaremos “Ampliado” a nuestro Modelo a fin de diferenciarlo del canónico y resaltar a la vez que es el modelo tradicional ampliado con una restricción referida al Mercado Meta.

#### A. Generalidades

Coincidiendo con lo aplicado para el consumidor, vamos a suponer que las empresas son idénticas a fin de poder referirnos a una de ellas como empresa representativa. Todas buscan la maximización de sus beneficios y operan en un entorno competitivo.

Consideramos que la empresa representativa contrata mano de obra diariamente pagando un salario constante que denominaremos ‘ $\bar{w}$ ’, y utiliza una tecnología con retornos constantes a escala en función del capital físico instalado ‘ $K$ ’ y de la can-

Cuadro 2.2: Supuestos de la ‘q’ de Tobin Ampliada

Nº	Descripción
1.	La empresa no espera cambios en los precios de venta de sus productos, ni en los de los bienes de inversión así como tampoco en la tasa de interés.
2.	Asumimos que el empresario tiene expectativas estáticas.
3.	La tecnología no cambia
4.	Los mercados de contratación de insumos son competitivos
5.	El productor es <i>precio aceptante</i> en el Mercado Meta
6.	Las inversiones productivas están sujetas a un costo de ajuste provocado por la pérdida de ventas durante la instalación de nueva maquinaria
7.	La función de producción cumple con las condiciones de Inada.

tividad de mano de obra utilizada ‘ $L$ ’, representada por una función de producción homogénea de primer grado.

Asumimos que la función de producción es dos veces diferenciable, creciente, cóncava con respecto a cada factor productivo y con productividad marginal decreciente, lo cual expresa que al aumentar cualquiera de los factores (capital o trabajo), el producto aumenta, pero a medida que seguimos aumentando uno de ellos sin variar el otro, el crecimiento es cada vez menor. No incluimos cambio tecnológico a fin de mantener el modelo lo más simple posible.

También vamos a suponer que la Función de Producción cumple las Condiciones de Inada, por lo que si uno de los factores tiende a cero, su productividad marginal tiende a infinito y, por el contrario, cuando uno de los factores tiende a infinito, la productividad marginal del mismo tiende a cero. Finalmente también suponemos que para producir hacen falta ambos factores, lo que hace que los gráficos no contengan el origen en la Función. Todas estas condiciones se verifican más adelante.

## B. Función de Producción

La función de producción que aplicaremos es la tradicional de Cobb-Douglas, dada por:

$$F [K(t), L(t)] = K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})} \quad (2.11)$$

Esta función de producción nos asegura rendimientos constantes a escala (dado que es homogénea de primer grado)<sup>10</sup> y cuenta con las siguientes características:

$$\begin{aligned} F_K &= \bar{\alpha} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} > 0 & F_L &= (1 - \bar{\alpha}) \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} > 0 \\ F_{KK} &= \frac{\bar{\alpha}(\bar{\alpha} - 1)}{K} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} < 0 & F_{LL} &= \frac{\bar{\alpha}(\bar{\alpha} - 1)}{L} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} < 0 \\ F_{KL} &= F_{LK} = \frac{\bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha})}{K} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} > 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

y además vemos que tiene retornos constantes a escala:

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{\bar{\alpha}} (\lambda L)^{1-\bar{\alpha}} = \lambda^{\bar{\alpha}+1-\bar{\alpha}} K_t^{\bar{\alpha}} L_t^{(1-\bar{\alpha})} = \lambda F(K_t, L_t)$$

Un punto adicional que será bueno aclarar, es el referido al supuesto de precios unitarios e iguales que estamos utilizando. Notemos en primer lugar que considerar que los precios son unitarios, es tan solo una cuestión de escala, ya que cualquiera sea el precio, siempre puede escalarse para que resulte igual a uno<sup>11</sup>. Que el precio del

<sup>10</sup>/ Evitamos aquí la discusión acerca de los rendimientos crecientes a escala (incluso los decrecientes) ya que tampoco es ese nuestro foco de atención, toda vez que buscamos sólo verificar el impacto del tamaño del Mercado Meta en el volumen de inversión

<sup>11</sup>/ Esto es, si el precio es de \$5 y el volumen de producción es de 10 unidades, solo cambia la escala de medición si dividimos todo por cinco.

producto que vende el empresario coincida con el precio de los bienes de inversión, también es una cuestión de escala ya que podemos dividir a uno por el otro y expresarlos en la misma unidad.

Fuera de estas cuestiones, lo que debe quedar claro es que el precio del producto (así como el de los bienes de capital), sigue multiplicando a las unidades producidas que indica la función de producción, tanto en la ecuación (2.11), como antes lo hacía en la (1.13). Esto es importante dado que mantiene vigente el supuesto de empresa ‘precio aceptante’ que estamos empleando.

### C. Costos de Ajuste de la Inversión

La empresa realiza normalmente un flujo de inversiones en nuevo capital que denominamos ‘ $I$ ’, para lo cual afronta costos de instalación en cada nueva inversión, y el resultado neto de lo invertido menos los costos de instalación viene representado por la función

$$\Psi(I, K) \leq I \quad (2.13)$$

Lo cual puede leerse como que un nuevo aporte de inversiones de ‘ $I$ ’ unidades incrementará el stock de capital productivo en ‘ $\Psi$ ’ unidades. Como vamos a permitir que pueda existir la desinversión de capital, requerimos que también en estos casos deba afrontarse un costo, por lo cual  $\Psi < I$ . Esto representa los costos de desinstalación del capital. Existe una gran cantidad de trabajos que introducen costos de ajuste tanto en la inversión como en el capital.

Los costes de ajuste en el capital han sido considerados entre otros por (Jermann, 1998), (Edge, 2007), (Boldrin et al., 2001) y (De Cordoba and Kehoe, 2000). Por ejemplo, (Edge, 2007) muestra que la consideración de costes de ajuste en el capital junto con hábitos de consumo, hace que un modelo monetario RBC con precios rígidos sea capaz de generar efectos de liquidez que consisten en una disminución del tipo de interés nominal a corto plazo en respuesta a una perturbación monetaria expansiva, efecto que no se genera en el modelo RBC estándar.

Respecto a los costes de ajuste de la inversión también estos han sido considerados

extensamente en la literatura. En este sentido, (Christiano et al., 2005) muestran que la opción de considerar costes de ajuste en la inversión es preferible al supuesto de costes de ajuste en el capital, en términos de la capacidad del modelo para replicar la dinámica de la economía en términos de la respuesta del nivel de producción y la inversión ante una perturbación monetaria. También indican que la consideración de costes de ajuste en la inversión puede generar una respuesta de la dinámica consistente con la estimada ante una perturbación de política monetaria.

También (Burnside et al., 2004) muestran que un modelo RBC con costes de ajuste en la inversión puede explicar los efectos de una perturbación fiscal sobre las horas trabajadas y los salarios.

Yendo al punto central, podemos identificar dos tipos principales de costos de ajuste de la inversión, denominados costos externos e internos. Los primeros se relacionan con que la velocidad con la que se quiera ajustar el stock de capital influirá en el precio que deberá pagarse por un nuevo bien o por los costos de desinstalarlo en menor tiempo. Es claro que la compra de un bien de capital requiere en general que el mismo sea fabricado sobre las especificaciones que realiza la propia empresa, que incluye aspectos como tamaños, versiones, tipos de energía de funcionamiento, etc., que alargan el proceso de fabricación y cualquier aceleración de tiempos deberá ser pagada por la empresa.

Los costos de ajuste internos, por su parte, se refieren sobre todo a las pérdidas de producción que genera la instalación (o desinstalación) de un bien de capital, ya que desplaza recursos que dejan de estar disponibles para la producción y generan menor volumen de venta

En síntesis, podemos pensar que  $\Psi$  es el valor *neto* de todos aquellos costos de instalación o desinstalación que deban asumirse para realizar una inversión, incluyendo los correspondientes a las pérdidas de producción. Por eso, cuando la inversión es nula, la función también se anula. Esta formulación busca fundamentalmente representar las rigideces del stock de capital, que no puede modificarse a corto plazo sin incurrir en costos de ajuste que por lo general son proporcionalmente mayores cuanto más rápido pretenda la empresa ajustar el capital, y cuanto menor sea su

stock de capital.

La función de costos de ajuste de la inversión mencionada en la ecuación (2.13) generalmente se asume cuadrática, y para justificar esta decisión, podemos partir del estándar en la literatura para estimaciones sectoriales de la ‘q’ de Tobin (Schaller, 1990), que buscan evitar, aunque en general no lo logran, la correlación serial en la ecuación de inversión.

Resulta relativamente sencillo llegar a esta formulación cuadrática, partiendo de una ecuación de costos de ajuste para empresas (o industrias) individuales. Si utilizamos el subíndice ‘i’ para indicar la *i*ésima empresa, manteniendo ‘t’ como subíndice de tiempo, podemos plantearnos (Schaller, 1990):

$$\Psi [K(t)_i, I(t)_i] = d [I(t)_i - g - h_i - m(t)_i]^2 K(t)_i \quad (2.14)$$

Donde:  $d =$  constante positiva  
 $g =$  tasa de inversión óptima para la cual el costo de ajuste es nulo  
 $h_i =$  efecto fijo particular para la empresa ‘i’  
 $m(t)_i =$  shocks sobre los costos de ajuste de la inversión

Dado que nuestra formulación es agregada y no sectorial, podemos eliminar el efecto fijo de las empresas ( $h_i$ )<sup>12</sup>, y como tampoco estamos interesados en estudiar el impacto de un shock en los costos de ajuste de la inversión, también podemos eliminar  $m(t)_i$ . Finalmente, también podemos quitar el factor ‘g’ dado que la inversión óptima será despejada durante el proceso de maximización mediante el Control Óptimo. Por lo tanto, también podemos quitar los subíndices ‘i’ y plantear nuestra ecuación de costos de ajuste de la inversión como:

$$\Psi [I(t), K(t)] = d \frac{[I(t)]^2}{K(t)} \quad (2.15)$$

---

<sup>12</sup>/ Estas generalizaciones que realizamos si bien son válidas, por supuesto le quitan riqueza al modelo. Podemos ver claramente que un modelo sectorial o mejor aún, uno ajustado para una sola empresa, se adaptaría mejor a los resultados que la formulación generalizada para toda la economía.

En nuestro caso vamos a utilizar una función de Costo de Ajuste de la Inversión, que es la generalmente aplicada en la literatura (Erickson and Whited, 2000), y que viene representada por:

$$\Psi [K(t), I(t)] = \frac{I(t)^2}{2K(t)} \quad (2.16)$$

Donde hemos considerado  $d = \frac{1}{2}$ . Vamos a verificar en primer término la forma de la función de costo de ajuste

$$\begin{aligned} \Psi_K &= -\frac{1}{2} \left( \frac{I}{K} \right)^2 < 0 & \Psi_I &= \frac{I}{K} > 0 \\ \Psi_{KK} &= \frac{I^2}{K^3} > 0 & \Psi_{KI} &= -\frac{I}{K^2} < 0 & \Psi_{II} &= \frac{1}{K} > 0 \\ \Psi(I, 0) &= \Psi(0, K) = 0 & \forall I, K & \end{aligned}$$

y notamos también que es homogénea de primer grado ya que

$$I \Psi_I + K \Psi_K = \Psi(I_t, K_t) \Rightarrow I \frac{I}{K} - \frac{K}{2} \left( \frac{I}{K} \right)^2 = \frac{I^2}{K} \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{2} \right)}_{=\frac{1}{2}} = \frac{I_t^2}{2 \cdot K_t} \quad (2.17)$$

Estas características corresponden a una función convexa, cuya representación gráfica puede verse en el gráfico de la Figura 2.1<sup>13</sup>.

Esta verificación mostrará su importancia en la etapa de estimación econométrica más adelante, ya que (Hayashi, 1982) demostró que cuando la empresa es precio aceptante y las funciones de producción y de costo de ajuste de la inversión son homogéneas de primer grado en  $(K, I, L)$ <sup>14</sup>, entonces la ‘q’ media coincide con la ‘q’

<sup>13</sup>/ El gráfico de la Figura 2.1 está construido para  $\bar{K} = 100$ . Señalemos que cuando componemos la función objetivo en la ecuación (2.21), el costo de ajuste de la inversión ingresará con término negativo, pasando por lo tanto a ser una función cóncava, como se verifica en la página 156 más adelante.

<sup>14</sup>/ Supuestos que se verifican en nuestro modelo, como hemos visto.

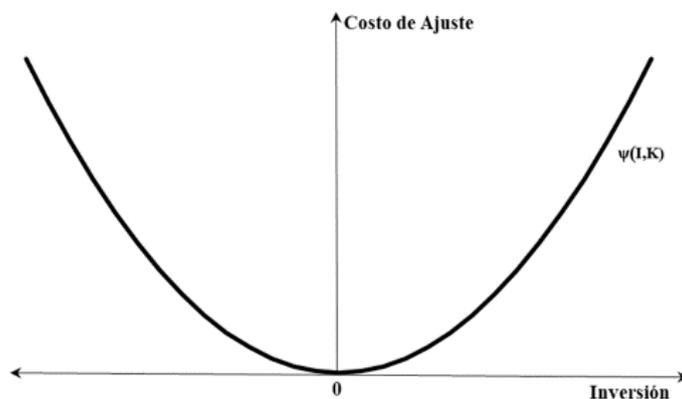


Figura 2.1: Costos de Ajuste de la Inversión con  $\Psi(I, K) = \frac{I^2}{2K}$

marginal en todos los puntos del sendero óptimo. Esto es importante dado que la ‘q’ marginal no es observable mientras que la ‘q’ media sí lo es.

Además, dado que la función de costos de ajuste de la inversión es convexa en (I) ya que  $\Psi_{II} > 0$ , entonces el sendero óptimo, si existe, será único<sup>15</sup>. Esto será así debido a que si hay retornos constantes a escala para todas las firmas de una industria, todas deberán tener el mismo ‘q’ medio porque los retornos son constantes. Esto hace que la ‘q’ media resulte independiente del stock inicial del capital (el tamaño) de cada empresa, y como el valor de mercado de una unidad marginal adicional de capital (=q) es equivalente a su precio por el cambio en el stock de capital, o sea  $\Delta K$  veces la ‘q’ media que es idéntica para todas las empresas, y por lo tanto también debe coincidir con la ‘q’ marginal.

#### D. Los Beneficios y el Valor de la Empresa

Los beneficios empresarios los definimos como la producción menos los insumos pagados (salarios en este caso), a cuyo resultado se le deduce la inversión y sus costos de ajuste, por lo que los beneficios de la firma en el período ‘t’ vienen representados

<sup>15</sup>/ Recordemos que la función se volverá cóncava, como ya dijimos.

por:

$$\Pi(t) = F [K(t), L(t)] - w L(t) - I(t) - \Psi [I(t), K(t)] \quad (2.18)$$

Vamos a suponer que las empresas distribuyen estos beneficios totalmente en forma de dividendos a los accionistas, de manera que el valor de la empresa viene dado por el flujo futuro de dividendos descontados. No es necesario que la empresa esté cotizando en una bolsa de valores para aplicar este procedimiento, tan sólo con suponer, como hemos hecho, que los mercados son competitivos y que las ganancias se distribuyen totalmente, el valor de la firma vendrá representado por la metodología del valor presente neto de los flujos futuros de ingresos (Weston et al., 1990). Notemos aquí que estamos permitiendo que haya dividendos negativos, en los cuales los accionistas deberían comprar más acciones de la empresa para financiar la inversión del período.

Existen como sabemos, aspectos opinables referidos a cómo se componen esos flujos futuros de fondos (si se toman o no las amortizaciones y de qué manera, etc), y sobre cuál es la tasa de costo del capital relevante para descontar los mismos. Obviaremos todas estas cuestiones, dado que no afectan significativamente en nuestro análisis, y supondremos que los flujos relevantes son expresados por (2.18), y la tasa de descuento, que llamamos ' $r(t)$ ', estará representada por la tasa del mercado de bonos.

También supondremos que la empresa no utiliza financiamiento (no está apalancada), a fin de evitar las complicaciones que se provocan debido al tratamiento impositivo diferencial de los intereses de la deuda.

Podemos entonces plantear el valor de la firma ' $V(0)$ ' como:

$$V(0) = \int_0^{\infty} e^{-r(t)} \Pi(t) dt \quad (2.19)$$

## E. La Restricción del Mercado Meta

Como habíamos adelantado en la Introducción, vamos a incluir en la formulación de la ‘q’ de Tobin una restricción que tenga presente y haga explícita la limitación del tamaño del mercado al cual el empresario inversor tiene acceso.

Sucintamente, lo que estamos considerando es el proceso decisorio de un inversor, quien antes de decidir si llevará adelante su proyecto o no, analiza qué resultado podría tener. Esto en términos económicos, y bajo los supuestos de maximización del valor de la empresa para el accionista, significa que el empresario analiza cuál es su ganancia esperada y la compara con la inversión a realizar. Aún cuando el proceso es bastante más complejo<sup>16</sup>, siguiendo estos lineamientos el inversor calculará la ganancia esperada restando los costos de producción de los ingresos esperados, y estos últimos a su vez estarán representados por la multiplicación de las unidades vendidas por el precio de cada una de ellas.

Este último factor, es el que pone de relieve la necesidad de incluir en el modelo, una estimación de la cantidad de unidades que se van a vender, lo cual tiene relación directa con el tamaño del mercado al cual podrá tener acceso el producto.

Debemos reiterar en este punto, que si bien el empresario estima la curva de demanda de su producto analizando el comportamiento del consumidor, no buscará maximizar la utilidad del individuo, algo que por otra parte está fuera de su alcance. El procedimiento de obtener la senda de consumo en el Mercado Meta, ‘ $M(t)$ ’, le sirve al empresario para conocer cuántas unidades podrá vender efectivamente a los diferentes precios posibles en cada mercado, lo cual necesita para calcular cuáles serán sus beneficios futuros.

No vamos a repetir los conceptos ya comentados sobre las causas, económicas o no, que restringen el acceso (costos, fletes, aranceles, cuotas, etc), pero sí formularemos la restricción como una limitación de la producción en función de las posibilidades de venta de la producción.

En otras palabras, la producción debería ser menor o igual que el consumo estimado

---

<sup>16</sup>/ El sólo hecho de incluir incertidumbre a la decisión de inversión, complicaría sustancialmente el análisis.

en el Mercado Meta, ya que todo aquello que se produzca en exceso terminará en inventarios no vendidos al final del ejercicio, que resultan ser un costo más de producción y por lo tanto no representan una política óptima. De esta manera, nuestra restricción puede plantearse como:

$$K(t)^{\bar{\alpha}}L(t)^{(1-\bar{\alpha})} \leq M(t)$$

Donde utilizamos la formulación del consumo en el Mercado Meta dada en la ecuación (2.9) de la página 48, en la que  $M(t) = \bar{M}(0) e^{\bar{\sigma}r(t)t}$ . Vamos a adecuar esta ecuación de manera que pueda incluirse en nuestro Modelo y resolverse por Control Óptimo. Para ello,

$$K(t)^{\bar{\alpha}}L(t)^{(1-\bar{\alpha})} \leq M(t) \Leftrightarrow \frac{K(t)^{\bar{\alpha}}L(t)^{(1-\bar{\alpha})}}{M(t)} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{K(t)^{\bar{\alpha}}L(t)^{(1-\bar{\alpha})}}{M(t)} \geq 0 \quad (2.20)$$

Dentro del planteo de la teoría del Control Óptimo, la parte derecha de la ecuación (2.20) es tratada como una restricción mixta que involucra tanto a la variable de estado  $K(t)$ , como a la variable de control  $I(t)$ .

Esta restricción que estamos imponiendo, limitará el volumen de producción e impedirá que la función de beneficios quede indeterminada<sup>17</sup>. También resolverá el problema del crecimiento del capital más allá del óptimo<sup>18</sup>, ya que al limitar la producción también impondrá un límite a la inversión y, por lo tanto, al stock de capital.

## IV. Presentación y Resolución del Modelo

Con los estos ajustes que hemos ido incorporando, la función que buscará maximizar el empresario, vendrá dada por:

---

<sup>17</sup>/ Véase la Sección II.B del capítulo 2 en la página 135.

<sup>18</sup>/ Véase la Sección II.A del Capítulo 2 en la página 133.

$$CU - \text{Óptimo}_{I(t), L(t)} \int_0^{\infty} e^{-r(t)} \left( K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})} - \bar{w} L(t) - I(t) - \frac{1}{2} \frac{I(t)^2}{K(t)} \right) dt$$

$0 \leq t \leq \infty$

sujeto a :

$$(a) \quad \dot{K}(t) = I(t) - \bar{\delta} K(t) \quad \text{con } K(0) = \bar{K}_0$$

$$(b) \quad 1 - \frac{K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})}}{M(t)} \geq 0; \quad \text{con } M(t) = \bar{M}(0) e^{\bar{\sigma} r(t)t}$$

$$(c) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) e^{-r(t)} \geq 0; \quad \text{Condición de Transversalidad (*)}$$

$$(e) \quad \mathbf{r} \left| \left( \frac{\partial h(t)}{\partial I(t)} \quad \frac{\partial h(t)}{\partial L(t)} \right) \right|_{K^*, I^*, L^*} = \text{Número de Restricciones Activas}$$

$$(f) \quad \mu(t) \geq 0, [= 0 \text{ si } h(K^*, L^*, t) > 0] \quad \text{Holgura Complementaria}$$

(2.21)

(\*): Esta condición de transversalidad también evita tener que plantear una restricción pura que exija que  $K(t) \geq 0$ , y da lugar a la Condición de Transversalidad (que para nuestro caso será condición suficiente),  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) e^{-r(t)} K(t) = 0$ .

La definición de los parámetros, las variables y la nomenclatura utilizada puede verse en los Cuadros 2.3, 2.4 y 2.5 respectivamente.

Como dijimos anteriormente, la variable de estado es el capital 'K', y las variables de control son la inversión 'I' y el nivel de empleo 'L'. Vamos a llamar a la variable de coestado 'q' y aplicaremos el Hamiltoniano Valor Presente ampliado al Lagrangiano Generalizado que contiene la restricción mixta que hemos impuesto. Asimismo, denominaremos ' $\mu$ ' al multiplicador asociado a la restricción mixta que impusimos a la producción en base al consumo en el Mercado Meta.

Con estas modificaciones, el Lagrangiano Generalizado Valor Presente queda defini-

Cuadro 2.3: Parámetros del Modelo Ampliado

Parámetro	Descripción
$\bar{\alpha}$	Elasticidad de la Producción con respecto al stock de capital ( $0 < \bar{\alpha} \leq 1$ )
$\bar{\delta}$	Tasa de depreciación del capital
$\bar{\sigma}$	Elasticidad de sustitución intertemporal del consumo en el Mercado Meta
$\bar{n}$	Tasa de crecimiento de la población
$\bar{w}$	Salario
$\bar{K}(0)$	Stock de capital en $t=0$
$\bar{M}(0)$	Nivel de consumo en el Mercado Meta en $t=0$
$\bar{N}(0)$	Dotación inicial de numerario en $t=0$

Cuadro 2.4: Variables del Modelo Ampliado

Variable	Descripción
$\mu(t)$	Multiplicador asociado a la restricción mixta $h(t)$
$q(t)$	Variable de co-estado que expresa el precio sombra del capital
$r(t)$	Tasa de rendimiento de los activos financieros (exógena)
$I(t)$	Inversión en capital nuevo del período
$K(t)$	Stock de capital físico instalado
$L(t)$	Cantidad de mano de obra empleada
$M(t)$	Consumo de las familias en el Mercado Meta
$N(t)$	Numerario de las familias del Mercado Meta
$Y(t)$	Producción o ingreso familiar total en el Mercado Meta

Cuadro 2.5: Nomenclatura del Modelo Ampliado

Símbolo	Descripción
$\Psi(t)$	Función de costos de ajuste de la inversión representados por $\Psi[I(t), K(t)] = \frac{I(t)^2}{2 \cdot K(t)}$
$\mathbf{B}^o$	Matriz del determinante orlado compuesto por una matriz hessiana bordeada con las primeras derivadas y el cero.
$\mathbf{B}_k^o$	Menor principal de orden 'k' de la matriz de un determinante orlado.
$h(t)$	Restricción mixta sobre la relación Mercado Meta a nivel de producción, representada por $h(t) = 1 - \frac{F(t)}{M(t)}$
$\mathbf{r}   \dots  _{K^*, I^*, L^*}$	Rango de la matriz de restricciones mixtas, evaluada en los valores óptimos de (KIL).
$\mathbf{F}(t)$	Función de producción representada por $F[K(t), L(t)] = K^\alpha L^{1-\alpha}$
$\mathbf{H}$	Matriz hessiana de una forma cuadrática
$\mathbf{H}_k$	Menor principal de orden 'k' de una matriz hessiana.
$\mathcal{H}(t)$	Hamiltoniano valor presente.
$\mathcal{L}(t)$	Lagrangiano generalizado valor presente.
(K,I,L)	Variables de estado y de control del Modelo, representativas del stock de capital K(t), la inversión I(t) y la cantidad de mano de obra L(t).
$\bar{\mathbf{M}}$	Matriz de primeras derivadas de las restricciones mixtas.
<i>Nomenclatura del Modelo Lineal matricial (en desvíos del Estado Estacionario)</i>	
Q	Vector de variables endógenas del sistema.
$\frac{\dot{Q}}{Q}$	Derivada logarítmica de la variable con respecto al tiempo.
B	Matriz principal o de las variables endógenas
D	Matriz de las variables exógenas
S	Vector de variables exógenas

do como<sup>19</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) = & \left( K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})} - \bar{w} L(t) - I(t) - \frac{I(t)^2}{2 K(t)} \right) + \\ & + q(t) [I(t) - \bar{\delta} K(t)] + \mu(t) \left( 1 - \frac{K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})}}{M(t)} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

La primer condición necesaria con respecto a la mano de obra viene dada por<sup>20</sup>:

$$\Rightarrow L(t)^* = K(t) \left[ \frac{(1-\bar{\alpha}) \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)}{\bar{w}} \right]^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \quad (2.23)$$

Mientras que la condición necesaria con respecto a la inversión es:

$$\Rightarrow I(t)^* = [q(t) - 1] K(t) \quad (2.24)$$

La segunda condición necesaria, mientras tanto, está dada por:

$$\dot{q}(t) = [r(t) + \bar{\delta}] q(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}-1} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) \quad (2.25)$$

Tenemos entonces dos ecuaciones que explican el comportamiento del inversor y que vienen dadas por las ecuaciones (1) y (2) en (B.20), que representan el proceso de maximización del beneficio que realiza el inversor. De esta manera el empresario elegirá la senda de las variables de control ‘ $L(t)$ ’ e ‘ $I(t)$ ’, que determinan el compor-

<sup>19</sup>/ Hemos optado por utilizar la letra cursiva  $\mathcal{L}(t)$  para el Lagrangiano, a fin de evitar que se confunda con la variable  $L(t)$  correspondiente al número de trabajadores

<sup>20</sup>/ La deducción de las condiciones necesarias y suficientes así como la demostración de los resultados expuestos, puede verse en el Anexo II al final de este Capítulo (página 154).

tamiento de la variable de estado ‘ $K(t)$ ’ para maximizar su función de beneficios.

Vemos entonces que de acuerdo al Modelo Ampliado que hemos planteado en la ecuación (2.21), el empresario maximiza su función de beneficios que ya deduce el costo de los insumos [ $\bar{w}L(t)$ ] y la inversión a realizar  $\left(I(t) + \frac{1}{2} \frac{I(t)^2}{K(t)}\right)$ , y luego destina el remanente de su producción a la venta en el Mercado Meta. Dos aspectos deben ser destacados en esta instancia:

1. Como tenemos incorporada la restricción referida al tamaño del Mercado Meta, el stock de capital estará limitado y la función de beneficios quedará determinada.
2. El comportamiento del inversor evita tener que plantear una restricción de factibilidad, dado que el ajuste se produce automáticamente en las unidades vendidas.

Vemos que se trata de un modelo no lineal, por lo que deberemos primero log-linearizarlo y luego resolverlo. Los parámetros del Modelo, como dijimos, están listados en el Cuadro 2.3 y las variables, expresadas en el momento ‘ $t$ ’, en el Cuadro 2.4.

En resumen, el empresario va a maximizar su función de beneficios, pero no maximizará la utilidad del consumidor (algo que estaría fuera de su alcance), por lo que sólo se concentrará en las dos ecuaciones de (B.20).

Vamos entonces a sintetizar un poco más estas ecuaciones, a fin de poder realizar luego una representación gráfica del Modelo. Llamaremos Modelo Ampliado Sintetizado a esta presentación, que mostramos a continuación<sup>21</sup> :

---

<sup>21</sup>/ El detalle del proceso seguido para obtenerlas puede verse en la Sección II.C del Apéndice B de esta Tesis, en la página 163

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \dot{q}(t) = q(t) [r(t) + \bar{\delta}] - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \\ (b) \quad \dot{K}(t) = [q(t) - 1 - \bar{\delta}] K(t) \quad \text{con } K(0) = \bar{K}(0) \end{array} \right. \quad (2.26)$$

## V. Estado Estacionario

Sabemos que en el Estado Estacionario, al que referiremos abreviadamente como ‘EE’, tanto  $\dot{q}$  como  $\dot{K}$  se anulan, por lo que podemos despejar los valores de  $\bar{q}$  y  $\bar{K}$  en el mismo y obtendremos las ecuaciones detalladas en el Cuadro 2.6<sup>22</sup>.

Donde vemos que a diferencia de la formulación original de la ‘q’ de Tobin, ahora la inversión depende de ‘q’ pero también del tamaño del Mercado Meta, ponderado por el salario y los factores tecnológicos de la función de producción. Resumimos las tres ecuaciones en el Cuadro 2.6

## VI. Diagrama de Fase

Vamos a realizar ahora un diagrama de fase de nuestro Modelo simplificado, utilizando los ejes ‘K,q’, con  $K(t)$  en el eje horizontal de abscisas y  $q(t)$  en el vertical de ordenadas. Tenemos entonces que expresar las funciones (a) y (b) de (2.26) con ‘q’ como variable independiente, y podremos calcular la pendiente en función mediante la primera derivada de la ecuación.

Vamos a empezar con el capital, y como haremos esta aproximación en el estado estacionario, utilizaremos el hecho de que tanto  $\dot{q}(t)$  como  $\dot{K}(t)$  son iguales a cero, por lo que podemos plantear:

---

<sup>22</sup>/ El detalle algebraico de las soluciones puede verse en la Sección III del Apéndice B de esta Tesis, en la página 163.

Cuadro 2.6: Valores de ' $\bar{I}$ ', ' $\bar{K}$ ' y ' $\bar{q}$ ' en el Estado Estacionario

$$\bar{q} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{I}}{\bar{K}} \right)^2 + \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\bar{\mu}}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}}}{\bar{r} + \bar{\delta}}$$

$$\bar{K} = \frac{\bar{I}}{\left\{ 2 \left[ (\bar{r} + \bar{\delta}) \bar{q} - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\bar{\mu}}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\bar{I} = \bar{K} \left\{ 2 \left[ (\bar{r} + \bar{\delta}) \bar{q} - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\bar{\mu}}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{K}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) - 1 - \bar{\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) = 1 + \bar{\delta} \quad (2.27)$$

Calculamos ahora la derivada de (2.27) con respecto a ' $K$ ', asumiendo que  $\dot{K} = 0$ :

$$\left. \frac{\partial q}{\partial K} \right|_{K(t)=0} = \left. \frac{\partial(1 + \bar{\delta})}{\partial K} \right|_{K(t)=0} = 0$$

Esto significa que, en el plano ' $K, q$ ' la curva estará representada por una recta horizontal, a la altura  $1 + \bar{\delta}$  del eje de ordenadas, como podemos apreciar en la Figura 2.2

Pasamos ahora al análisis de la ecuación (2.26)(a), planteando  $\dot{q} = 0$  y despejando ' $q$ ', para luego calcular la derivada y obtener la pendiente:

$$\dot{q}(t) = q(t) [r(t) + \bar{\delta}] - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [r(t) + \bar{\delta}] q(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 + \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \Rightarrow$$

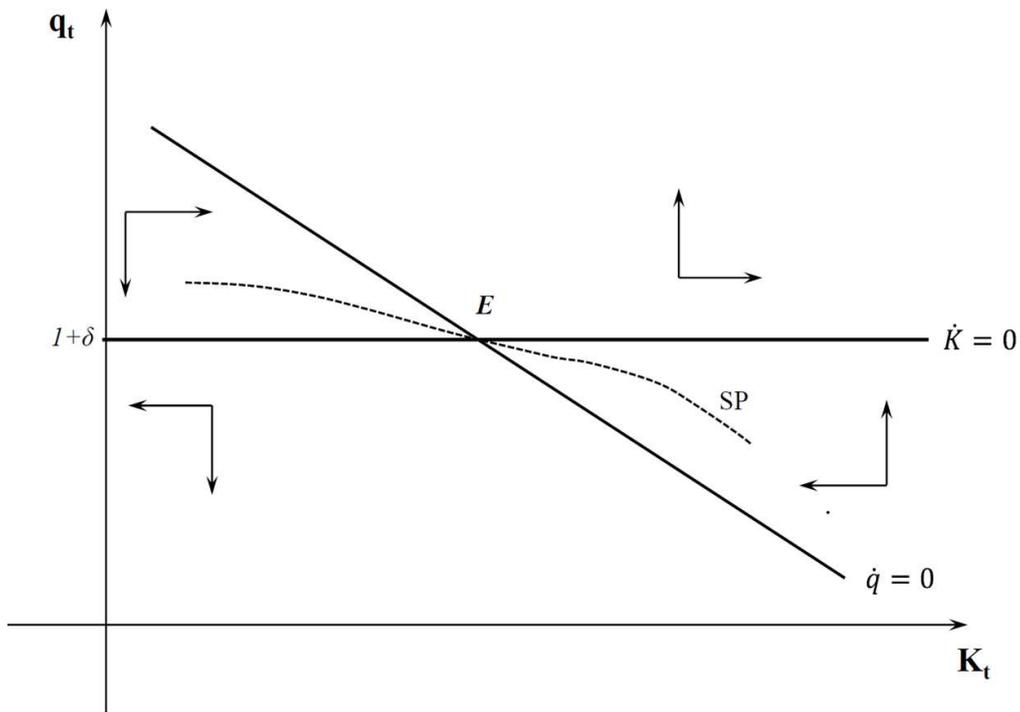


Figura 2.2: Diagrama de Fase

$$\Rightarrow q(t) = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 + \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}}}{r(t) + \bar{\delta}} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial q}{\partial K} \right|_{\dot{q}(t)=0} = \frac{\frac{-1}{K(t)} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2}{r(t) + \bar{\delta}} = \frac{(-)}{(+)} < 0 \quad (2.28)$$

Graficamos ambas curvas para el cuadrante 'K,q' en la Figura 2.2.

Hemos dibujado además de la ubicación de las ecuaciones en el Estado Estacionario, las flechas de dirección para aquellos puntos que se ubican por encima y por debajo del equilibrio, y la senda estable ('SP') en la que se podría ubicar el sendero de

ensilladura del modelo.

La Figura 2.2 nos muestra la dinámica de estas ecuaciones. Tiene en primer lugar dos líneas de trazo lleno que representan los puntos para los cuales  $\dot{K} = 0$  (la línea horizontal paralela al eje 'K' de las abcisas), que representan todos los puntos para los cuales el stock de capital es estacionario. La otra línea,  $\dot{q} = 0$  (la línea de pendiente negativa) muestra los puntos para los cuales la 'q' de Tobin es estacionaria. Ambas se cruzan en el punto 'E' de la Figura y determinan cuatro cuadrantes hacia sus lados.

Para cualquier punto situado por encima de  $\dot{K} = 0$ , esto es, para cualquier  $q > 1 + \delta$ , el stock de capital deberá aumentar, dado que  $\dot{K}$  es positivo. Por el contrario, los puntos situados por debajo de  $\dot{K} = 0$  implicarán una disminución del stock de capital, debido a que  $\dot{K}$  será negativo. Esto se representa en la Figura 2.2 mediante las flechas horizontales hacia la derecha o la izquierda, según que se encuentren por encima o por debajo de  $\dot{K} = 0$  respectivamente.

Similar interpretación podemos hacer con la línea de  $\dot{q} = 0$ , donde los puntos situados a su derecha nos indican que 'q' aumentará (porque  $\dot{q}$  es positiva), mientras que en los puntos a la izquierda disminuirá. Nuevamente la representación se realiza mediante las flechas, ahora verticales, hacia arriba o hacia abajo según que se ubiquen a la derecha o a la izquierda de  $\dot{q} = 0$ .

Tenemos como dijimos, cuatro cuadrantes y en cada uno el sentido en el cual se moverán las variables cuando se ubiquen fuera de las líneas del estado estacionario. Vemos así que para los puntos que están en los cuadrantes noreste y suroeste, las flechas nos indican que las trayectorias resultarán divergentes, ya que siempre se alejarán del punto de equilibrio del estado estacionario 'E'.

Los puntos de los cuadrantes noroeste y sudeste, por el contrario, tendrán una trayectoria convergente al punto de equilibrio, representada por el sentido de las flechas y por la línea de trazo quebrado (imaginaria) de punto de silla, que hemos denominado 'SP' en la Figura.

Cuadro 2.7: Ecuaciones del Modelo cuando la Restricción Mixta se Cumple con Igualdad

---



---


$$(a) \dot{q}(t)^{M=F} = [r(t) + \bar{\delta}] q(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{K(t)} \right)$$

$$(b) \dot{K}(t) = [q(t) - 1 - \bar{\delta}] K(t) \quad \text{con } K(0) = \bar{K}_o$$


---



---

## VII. Aplicación Efectiva de la Restricción del Mercado Meta

Para encontrar los puntos en los cuales está activa la restricción mixta que hemos impuesto sobre el tamaño del Mercado Meta, podemos utilizar la esencia del método de los multiplicadores de Lagrange. Esta idea tan simple e ingeniosa del conocido físico-matemático Joseph Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones de igualdad, consiste en ampliar la función objetivo a optimizar construyendo una nueva función llamada *Lagrangiana* en su honor, formada por la función original más la función de restricción igualada a cero al restarle su propio resultado.

Los detalles del procedimiento utilizado pueden verse en el Apéndice IV en la página 164 de este Capítulo, y las ecuaciones de solución se encuentran en el Cuadro 2.7 a continuación.

Incluimos también el diagrama de fase que representa la Restricción Mixta Activa que es similar al mostrado en la Figura 2.2, sólo que ahora la pendiente negativa de  $\dot{q} = 0$  es más pronunciada y el stock de capital de equilibrio será inferior, dado que la limitación que impone el Mercado Meta, que está activa, limita el volumen de producción y también el nivel de capital y mano de obra utilizado. A modo ejemplificativo, hemos comparado (2.28) con (B.30). Pueden verse ambas curvas en la Figura 2.3

Finalmente, la ecuación (2.29) correspondiente al multiplicador de la Restricción

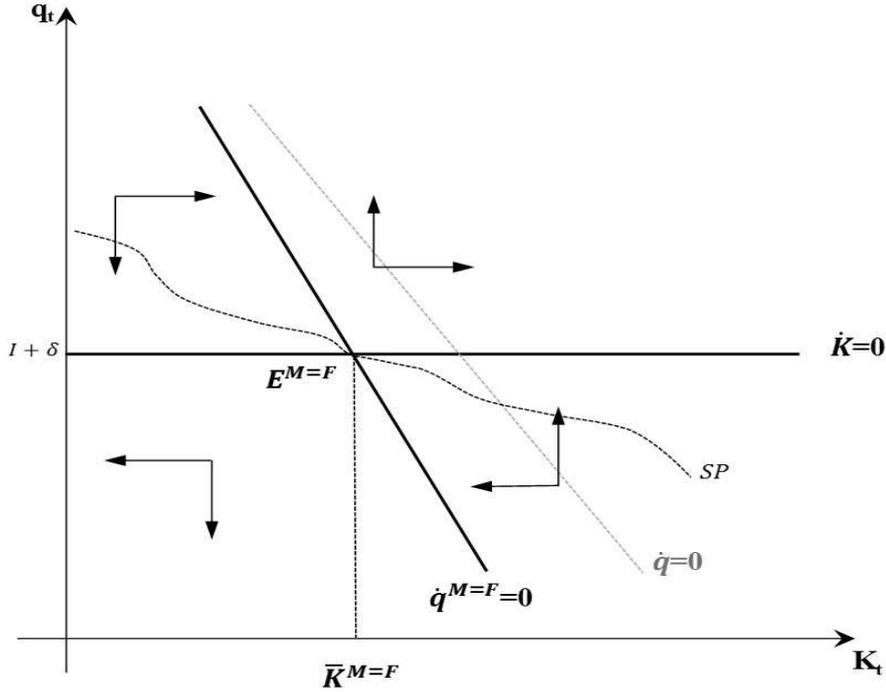


Figura 2.3: Diagrama de Fase con la Restricción Mixta Activa:  $M = \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}}$

Mixta nos está indicando que el mismo tiene valor distinto de cero en el Estado Estacionario (positivo debido a la holgura complementaria), lo que expresa que la restricción estará activa y será efectiva, por lo que es necesaria para la explicación del modelo.

$$\mu(t) = M(t) - \frac{\bar{K} \left[ q(t) [r(t) + \bar{\delta} + 1] - \frac{1}{2} [q(t)^2 + 1] \right]}{\bar{\alpha}} \quad (2.29)$$

## VIII. Resolución del Modelo Loglinealizado

Hemos verificado en el Anexo VII (página 175), que nuestro Modelo Ampliado es estable, y tiene un diagrama de fase de punto de silla, conocido como ‘*saddle point*’<sup>23</sup>. Para resolver nuestro Modelo Loglinealizado de las ecuaciones [B.37 (1) y (2)], por tratarse de un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones diferenciales de primer orden, tendremos que resolver en primer término la parte homogénea, para luego

<sup>23</sup>/ Puede verse un gráfico representativo en la página 174 del Anexo B

Cuadro 2.8: Ecuaciones de la Solución del Modelo Reducido Loglinealizado

$$\begin{aligned} \ln[q(t)] &= A_1 e^{Et} + A_2 \left( \frac{E}{E+C} \right) e^{-Ct} - \frac{r^*}{E} \tilde{r}(t) + \frac{F}{E} (\tilde{M}(t) + G) \\ \ln[K(t)] &= A_2 e^{-Ct} + \tilde{I}(t) \end{aligned}$$

resolver la no homogénea mediante el método de variación de parámetros (Zill and Cullen, 2009).

El procedimiento completo de la solución del Modelo puede verse en la Sección VIII del Anexo B en la página 178 , y el resultado general viene dado por la suma de las soluciones de las ecuaciones homogénea y particular y será:

$$\begin{bmatrix} \ln[q(t)] \\ \ln[K(t)] \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{Et} + A_2 \begin{bmatrix} \frac{E}{E+C} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-Ct} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{I}(t) - \begin{bmatrix} \frac{r^*}{E} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{r}(t) + \begin{bmatrix} \frac{F}{E} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{M}(t) + \begin{bmatrix} \frac{F}{E} \\ 0 \end{bmatrix} G \quad (2.30)$$

El resultado final con la solución del Modelo Reducido Loglinealizado puede verse en el Cuadro 2.8.

## IX. Conclusiones y Comentarios del Modelo

Hemos desarrollado un Modelo que partió del conocido planteo de la ‘q’ de Tobin con costos de ajuste cuadráticos, y agregamos como restricción explícita cuando el empresario analiza si invertir o no, la consideración de las cantidades de producto que se podrán vender efectivamente. Para ello, hemos tomado en consideración el Mercado Meta definido en la Sección I. A (página 42), que comprende todos los mercados a los que podría tener acceso el inversor para vender su producto, con un

margen de rentabilidad adecuado para su negocio.

El Modelo definido de esta forma, fue resuelto utilizando Control Óptimo, para lo cual se verificaron las condiciones de suficiencia (tipo Arrow) y se calcularon las condiciones necesarias, de las que despejamos los senderos óptimos de las variables, enlazando la producción con la posibilidad de venta con un ingreso razonable.

El Modelo general fue luego reducido a un sistema de dos diferenciales no lineales que se ven en la ecuación (2.26), que muestra la relevancia tanto del Mercado Meta como del multiplicador de la restricción mixta, ' $\mu(t)$ '. En este sentido, se analizó la conclusión generalizada acerca de que el empresario sólo debe observar el valor de 'q' (que refleja el precio sombra de los bienes de capital), ya que el mismo contiene toda la información necesaria para tomar su decisión de inversión<sup>24</sup>.

Esta conclusión ha surgido al considerar solamente una de las condiciones necesarias del Control Óptimo, sin haber incorporado las restantes. Al hacerlo, como se mencionó oportunamente, no se está obteniendo la senda óptima de los controles, sino que sólo se establece la relación de la inversión con el funcional a maximizar mediante el Hamiltoniano Valor Presente. En otras palabras, y desde un punto de vista matemático, la comentada conclusión no considera todos los pasos necesarios para determinar la senda óptima de la inversión, ya que sólo refleja la optimización estática de la función de beneficio empresario, con respecto a la inversión.

Aún más, debe notarse que el planteo del problema, tanto en los análisis de la 'q' de Tobin como en el nuestro, parte de maximizar el valor de la empresa ' $V_o$ ' que está representado mediante una ecuación integral que contempla el flujo futuro de los ingresos y egresos que deberá realizar el empresario, y cuyo resultado arrojará una ganancia esperada que si es positiva, derivará en la concreción de la inversión. Al igualar a cero la derivada de la función de beneficio empresario con respecto a la inversión, sólo se encuentra el máximo estático en el punto 't', sin que se consideren las sendas futuras de las variables del modelo en cuestión (K,I,L en nuestro caso, además de los multiplicadores y variables de coestado).

---

<sup>24</sup>/ Por ejemplo (Hayashi, 1982) página 218: "*All the information about the demand curve for the firm's output and the production function that are relevant to the investment decision is summarized by q*"

A partir de la flexibilización del supuesto de competencia perfecta en todos los mercados, manteniendo la condición de aceptación de precio de mercado que permite continuar utilizando la Proposición I de (Hayashi, 1982)<sup>25</sup>, consideramos necesario incorporar un mecanismo que genere la información del mercado de productos del inversor, de manera de acotar la cantidad producida.

Hemos asumido que se mantienen los supuestos de funciones homogéneas de primer grado para la producción y los costos de ajuste, ya que a pesar de producir una función de beneficios (y de oferta del producto) mal especificada, a corto plazo los rendimientos serán decrecientes a escala y superaríamos la indeterminación. Como vimos en la Sección III.B del Anexo A en la página 135, al suponer mercados de insumos competitivos, el ajuste automático del mercado laboral determinará una función de producción con rendimientos decrecientes a escala en el corto plazo.

Es por esto que incluimos una estimación de los ingresos futuros que arroja como resultado una expresión mucho más rica y completa para la inversión, y que para el Estado Estacionario puede verse en la ecuación (B.25) de la página 164, pero que no puede ser despejada sino hasta haber resuelto el sistema de ecuaciones diferenciales que presenta el Modelo no lineal.

A fin de solucionarlo, hemos loglinealizado el modelo Reducido, alrededor del Estado Estacionario, y verificamos su estabilidad en una senda de punto de silla. También hemos visto en un diagrama de fase que nuestro Modelo tiene un comportamiento similar al de la 'q' de Tobin tradicional en la literatura.

La solución general del Modelo en la ecuación (B.45) de la página 181 nos muestra que tanto el Mercado Meta como el multiplicador de la restricción mixta son relevantes a la hora de determinar el valor de 'q', mientras que la relación casi directa que existe entre el stock de capital y la inversión en nuestro modelo, nos alienta para encontrar una verificación empírica de los resultados obtenidos. En el siguiente Capítulo vamos a corroborar esta presunción, viendo cómo se relacionan las variables mediante la cointegración de las series, obteniendo una buena bondad de ajuste para el modelo.

---

<sup>25</sup>/ Ver demostración en la Sección II. ?? del Anexo A, en la página ??

# Capítulo 3

## Estimación Econométrica

### I. Introducción

Concluido nuestro planteo teórico, y desarrollado por completo el Modelo Ampliado, nos resta ahora la realización de una verificación empírica sobre la aplicación y la bondad de ajuste a la realidad del modelo.

No es nuestro objetivo una profunda y acabada aplicación que comprenda todos los aspectos posibles y los diferentes alcances de nuestra teoría, ya que excederíamos en mucho el objeto de esta Tesis. Sin embargo como se verá, los casos de aplicación y estudio confirmarán la teoría desarrollada, y darán sustento empírico a la misma.

Para ir despejando temas a incorporar, y mantener el estudio dentro de niveles acotados de discusión, comenzaremos por fijar algunos criterios que la bibliografía empírica ha confirmado, aunque fuera parcialmente, a fin de dar una justificación general que luego será utilizada en la elección del caso de aplicación.

Muchos autores han planteado que la inversión depende del flujo de caja de la empresa (y del que genera el mismo proyecto) que es lo que se evalúa para financiarla. Es por eso que medidas como el período de recupero del capital, que son menos acertadas que el valor actual neto, son utilizadas muchas veces para decidir si llevar adelante una inversión o no.

Nosotros vamos a excluir de nuestro estudio, los casos de racionamiento de capital, ya que como indica entre otros (Fazzari et al., 1987), los mismos estarían vinculados con la presencia de imperfecciones en el mercado de capitales. El razonamiento es que cuando las empresas pueden recurrir al financiamiento de un mercado de capitales competitivo, la restricción de capital deja de ser tan relevante.

Esto no invalida estudios como el de (Hubbard, 1997) en los que se citan investigaciones en las que se muestra la relevancia del racionamiento de capital a la hora de decidir una inversión. Este tipo de cuestiones, a decir de (Erickson and Whited, 2000), son las que invalidan el modelo neoclásico de inversión, y muestran que el mismo es incompleto. En nuestro caso, debemos agregar que en el caso de verificarse el racionamiento de capital, el tamaño del mercado accesible y el margen de ganancia aumentan el flujo futuro de fondos, y por lo tanto mejoran el financiamiento del proyecto de inversión, haciéndolo más viable.

Dado que nuestros casos de estudio están realizados en base a la economía estadounidense, que cuenta con el mercado de capitales más competitivo y amplio del mundo, consideramos que el racionamiento de capitales no resultaría significativo.

En otro orden, la literatura más reciente sobre la inversión se volcó a partir de los 80's al modelo de la 'q' de Tobin, que es el que hemos aplicado aquí también. Sin embargo, y a pesar de su amplia difusión y la cantidad de estimaciones realizadas, no se ha logrado una verificación empírica ampliamente aceptada, debido en parte a las complicaciones que presenta su estimación econométrica.

Pero más allá de estas cuestiones de medición, algunas de las cuales se detallan en los puntos siguientes, la teoría de la 'q' de Tobin puede encontrarse, según muchos autores [(Erickson and Whited, 2000), (Hoshi and Kashyap, 1990), etc], en las ideas del propio (Keynes, 1965), ya que en su Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero expresa textualmente que “no tiene sentido crear una nueva empresa incurriendo en un gasto mayor que aquel a que se puede comprar otra igual ya existente”<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>/ cf página 138 de la séptima edición en español de (Keynes, 1965), Fondo de Cultura Económica - 1965. Traducción de Eduardo Hornero, Revisión de Ángel Martín Pérez.

Obviamente la cita es atendible, pero no debemos olvidar que el valor de la empresa está condicionado por las expectativas (a las cuales Keynes prestó mucha atención), y si bien no lo menciona en este párrafo (que es el que generalmente se cita), está implícito en el contexto del razonamiento general de su libro.

Como se mencionó anteriormente, (Lucas Jr and Prescott, 1971) argumentan que al incorporar una función que refleje los costos de ajuste de la inversión, el valor de reposición del bien de capital (o más precisamente su precio sombra), deberá ser igual al valor del bien más sus costos marginales de instalación. Ya hemos comentado en la Introducción de esta Tesis, los inconvenientes que presentaba esta afirmación.

Iguales comentarios corresponden a lo mencionado por (Hayashi, 1982), en referencia a que el valor de la 'q' de Tobin será lo único que deba analizar el empresario a la hora de decidir si invierte o no, lo cual hemos desechado en el capítulo anterior. No obstante vale aclarar que validamos y utilizaremos la principal conclusión de ese trabajo, que afirma que la 'q' media (observable) coincidirá con la 'q' marginal (de Tobin, no observable), cuando tanto la función de producción como la función de costos de ajuste de la inversión del productor sean homogéneas de primer grado y la empresa sea precio aceptante.

Reiteramos aquí lo dicho en la Introducción, en el sentido que admitimos que el empresario no fija precios, aunque no consideramos que al precio del mercado pueda vender todo lo que produzca sin limitaciones, sino que asumimos que realiza una estimación de la demanda potencial de su producto. Así será posible que algunos de sus mercados potenciales sean competitivos y otros no.

Para justificar esto, nos basamos en que la igualdad de la q media y la marginal se cumplirá si las funciones de producción y de costo de ajuste de la inversión son homogéneas de primer grado, lo cual puede aplicarse tanto a mercados con competencia perfecta como imperfecta.

A partir de estos conceptos<sup>2</sup>, vamos a aplicar nuestro Modelo al caso concreto de los Estados Unidos entre los años 1952 y 1976 en primer término, y luego en el período

---

<sup>2</sup>/ Ausencia de racionamiento de capital, 'q' marginal='q' media, funciones de costo de ajuste de la inversión y de producción homogéneas de primer grado y empresas que aceptan precios pero no tienen demanda ilimitada

ampliado entre 1950 y 2010.

Este país cuenta con un mercado de capitales muy desarrollado, por lo que podemos obviar las limitaciones que impone el racionamiento de capital. También tiene acceso pleno al comercio internacional y mantiene relaciones económicas con todo el mundo, por lo que el mundo es su mercado <sup>3</sup>. Adicionalmente, también se trata de una economía altamente competitiva (la primera por tamaño mundial), para la cual puede suponerse que se aplican precios y salarios de competencia, sin mayor pérdida de generalidad.

## II. Ajustes del modelo

Como hemos verificado en el Capítulo anterior, nuestro Modelo cuenta con funciones homogéneas de primer grado tanto para la producción como para los costos de ajuste. Además hemos supuesto que el empresario es tomador de precios tanto para sus productos como para sus insumos, y por lo tanto, podemos tomar en nuestra estimación econométrica, el valor medio de la ‘q’ que es observable en el mercado.

El cálculo del valor de ‘q’, sin embargo, presenta una serie de controversias e inconvenientes prácticos que todavía no han sido plenamente resueltos. Además de la cuestión de que la ‘q’ marginal no es observable [algo que aquí salvamos al aceptar la Proposición 1 de (Hayashi, 1982)], como mencionamos anteriormente hay mucha discrepancia en la aceptación sobre la forma de medir la ‘q’, lo cual se acrecienta con el hecho de que las mediciones pueden realizarse para empresas o sectores individuales que posean cotización en un mercado de valores, pero son menos factibles en empresas sin cotización bursátil.

Frente a esta limitación, muchos autores consideran la extrapolación directa de análisis sectoriales amplios que comprenden diferentes industrias y empresas de los sectores principales a toda la economía. Este es el enfoque que realizamos en este trabajo, siguiendo los lineamientos y utilizando los valores de la ‘q’ para Estados Unidos en-

---

<sup>3</sup>/ Si bien es cierto que ha habido limitaciones a partir de la llamada “Guerra Fría” así como otras restricciones geopolíticas, el comercio con los demás países durante los períodos elegidos ha mantenido amplia vigencia

tre 1952 y 1976 publicados en (Von Furstenberg et al., 1977), Tabla 1, páginas 350 a 355 columna 9. Esto nos evitará tener que calcular estos valores.

La segunda cuestión de importancia que debemos superar en la estimación econométrica, está relacionada con la correlación serial de los residuos de la estimación. Este problema si bien no vuelve insesgados a los estimadores de Mínimos Cuadrados, los convierte en ineficientes para la inferencia estadística (Greene, 2000).

Tanto la autocorrelación como la heterocedasticidad generan errores de estimación en la varianza de los parámetros estimados, lo que impide poder utilizar intervalos de confianza basados en distribuciones exactas de probabilidad. Una solución propuesta para esta cuestión, viene dada por la construcción de los llamados ‘estimadores robustos’ de la varianza, aunque algunos autores no recomiendan su uso bajo ningún procedimiento (Mizon et al., 1995).

La mayoría de los autores coinciden, sin embargo, en que muchas veces la autocorrelación puede ser superada mediante la aplicación de los llamados Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles, y también están de acuerdo en afirmar que el fenómeno de la autocorrelación surge en la mayoría de los casos, por mala especificación del modelo económico (Greene, 2000). En nuestro caso, vamos a buscar que la autocorrelación, que está presente en la mayoría de las estimaciones que involucran a la ‘q’ de Tobin, pueda reducirse al incluir como variable de la regresión el tamaño del Mercado Meta.

Dado que consideramos que los problemas de autocorrelación surgen a partir de una especificación incompleta del modelo que deja de lado variables relevantes<sup>4</sup>, por lo que utilizaremos una versión del modelo de la “q” de Tobin ampliada, muchas veces empleado y referido como “*Augmented Tobin’s q*” (Kang, 2014).

Nuestro estudio nos mostrará finalmente, que el Mercado Meta resulta ser el catalizador necesario para que se produzca la cointegración de las variables que participan del modelo, lo cual permite aprovechar la correlación de las series a nuestro favor.

---

<sup>4</sup>/ El tamaño del Mercado Meta es el caso que nos ocupa, pero en el enfoque teórico de la “q” de Tobin están ausentes otras variables relevantes, como la capacidad instalada ociosa, índices de expectativas empresarias, etc.

## A. Modelo Empírico

Como muestran (Erickson and Whited, 2000) la mayoría de los estudios empíricos que verifican la ‘q’ de Tobin, utilizan una función de Costo de Ajuste de la Inversión similar a la que hemos aplicado aquí, cuadrática y homogénea de primer grado<sup>5</sup>. Al reemplazar la derivada del Costo de Ajuste con respecto a la inversión (nuestra  $\Psi_I$ ) en la ecuación de maximización (el ‘Lagrangiano’), obtienen la ecuación lineal a estimar.

(Erickson and Whited, 2000) parten de una función de maximización para cada empresa del panel que estudiaron, calculando el valor de la firma ‘i’ en el momento ‘t’:  $V_{it}$ , que de manera simplificada viene dado por:

$$V_{it} = E \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left( \prod_{s=1}^j b_{i,t+s} \right) [\Pi(K_{i,t+j}, \xi_{i,t+j}) - \Psi(I_{i,t+j}, K_{i,t+j}, \nu_{i,t+j}, h_{i,t+j}) - I_{i,t+j}] \mid \Omega_{ij} \right\}$$

Donde E=esperanza, ‘ $\Omega$ ’ es el conjunto de información, ‘b’ es la tasa de descuento, ‘K’ el capital, ‘I’ la inversión, ‘ $\Pi$ ’ la función de producción, ‘ $\Psi$ ’ es la función de Costo de Ajuste de la Inversión, ‘h’ es un vector de insumos y ‘ $\xi$  y  $\nu$ ’ son shocks externos. La empresa maximizará esta función, sujeta a la variación del stock de capital dada por  $K_{i,t+1} = (1 - d_i)K_{it} + I_{it}$ . Llamando ‘q’ a los multiplicadores de Lagrange, el proceso de optimización para cada empresa en el tiempo vendrá expresado por:

$$1 + \Psi_I(I, K, \nu, h) = q_i \quad \Rightarrow \quad \Psi_I = q_i - 1$$

En nuestro caso, partiremos de la primer ecuación del Modelo General Reducido [2.26 (a)], que reproducimos a continuación:

$$\dot{q}(t) = q(t) [r(t) + \bar{\delta}] - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \quad (3.1)$$

Si distribuimos la multiplicación en el primer término de la ecuación, y en el último

<sup>5</sup>/ Ver la ecuación (2.17) y las verificaciones realizadas en la página 55 y siguientes.

término de la derecha separamos la parte constante de la variables, obtendremos<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= q(t)r(t) + q(t)\bar{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} + \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} = \\ &= q(t)r(t) + q(t)\bar{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \Upsilon_i + \Upsilon_j \left( \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}}\end{aligned}$$

Donde los subíndices ‘ $i, j$ ’ de  $\Upsilon$  serán explicados en breve. Podemos también suponer como forma simplificadora, que el precio sombra de los bienes de capital, no varía, con lo que  $\dot{q} = 0$ . Este sería un escenario en el que se mantienen sin cambios los precios de los bienes de inversión, lo que nos permitirá poder despejar la relación I/K. Apuntamos a este concepto ya que es el más utilizado en la literatura a la hora de estimar la inversión.

Pasamos entonces todo el término  $\frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2$  a la izquierda y agrupamos el resto:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 = q(t)r(t) + q(t)\bar{\delta} - \Upsilon_i + \Upsilon_j \left( \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}}$$

Sabemos que para poder aplicar mínimos cuadrados, la ecuación debe ser lineal en los parámetros. Si despejamos aquí el cuadrado de ‘I/K’ aplicando raíz cuadrada a la parte derecha de la ecuación, perdemos la linealidad <sup>7</sup>. Por lo tanto, vamos a estimar directamente la relación de inversión a capital al cuadrado, pasando el dos multiplicando al lado derecho de la ecuación y reordenando, obtendremos (la definición de los parámetros puede verse en el Cuadro 3.1):

$$\left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 = \Upsilon_o + \Upsilon_1 q(t) + \Upsilon_2 \left( \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} + \Upsilon_3 q(t)r(t)$$

<sup>6</sup>/ No sería formalmente correcto, desde el punto de vista matemático, factorizar el último término ya que está elevado a una potencia. No obstante, por la forma de construcción de la ecuación y dado que se trata de estimar econométricamente un parámetro, hemos utilizado esta alternativa

<sup>7</sup>/ Puede comprobarse que utilizando (I/K) sin elevarlo al cuadrado, el modelo también es válido

Donde sólo nos falta definir el término del Mercado Meta. En primer lugar debemos notar que sería posible eliminar la potencia  $'1/\alpha'$ , ya que se trata de un término constante, y por lo tanto lo único que producirá en la estimación econométrica, es una variación de escala en el parámetro correspondiente ( $\Upsilon_2$ ). No obstante, como al aplicar más adelante logaritmos el valor de  $\frac{1}{\alpha}$  quedará subsumido en el parámetro  $\Upsilon_{2L}$ , no lo quitaremos explícitamente.

Nos falta definir entonces, cuál será el estimador o 'proxi' que utilizaremos para el Mercado Meta. Dado que el caso de aplicación que estudiaremos se refiere a una gran economía que por su tamaño tiene vinculación con todo el mundo, podemos tomar el Producto Bruto mundial como primera aproximación al Mercado Meta.

Vale la pena detenernos unos instantes para analizar la razonabilidad de nuestro 'proxi'. En primer lugar, Estados Unidos tiene posibilidad de vender sus productos a cualquier país, dado que no ha sufrido restricciones al comercio. Por otra parte, también es obvio que puede vender sus productos dentro de su propio país. Por lo tanto, cuando un empresario analice una nueva inversión, tomará en cuenta cuántas unidades puede vender en todo el mundo, a un precio aceptable para su estructura de costos, y ese podría ser el mercado objetivo a considerar.

Sin embargo, y luego de analizar el comportamiento de las ecuaciones utilizando el GDP Mundial y el de los Estados Unidos, hemos concluido que este último resulta preferible. Atribuimos este comportamiento al tamaño de la economía estadounidense, para la cual resulta menos relevante el ratio de comercio exterior, al menos durante el período considerado, por lo que el volumen de inversiones se destinaría en mayor proporción al mercado interno, antes que al de todo el mundo.

También es cierto que el GDP incorpora las exportaciones realizadas, por lo que estaríamos considerando lo que efectivamente se vendió al mundo, además de las ventas en el mercado doméstico. Todo esto provoca que la utilización del GDP de Estados Unidos en lugar del GDP mundial, resulte una mejor aproximación para nuestro Modelo.

Finalmente, la relación  $\frac{\mu(t)}{M(t)}$  puede ser tomada como un solo valor que llamaremos ' $M(t)$ ', y será el parámetro estimado ' $\widehat{\Upsilon}_2$ ' el encargado de reflejar el cambio de escala.

Cuadro 3.1: Variables y Parámetros del Modelo Empírico

Nombre	Descripción
Variables	
$\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2$ :	= relación de inversión a capital al cuadrado
$q_t$ :	= precio sombra de la unidad de inversión
$r_t$ :	= tasa de interés (exógena)
$M_t$ :	= Mercado Meta representado por el GDP de los Estados Unidos
$u_t$	= Término de error de la regresión
Parámetros	
$\Upsilon_o$ :	= $-2\bar{\alpha} \left(\frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}}\right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\alpha}}$
$\Upsilon_1$ :	= $2\bar{\delta}$
$\Upsilon_2$ :	= $2\bar{\alpha} \left(\frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}}\right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\alpha}}$
$\Upsilon_3$ :	= 2
en logaritmos	
$\Upsilon_{0L}$ :	= $-2\bar{\alpha} \left(\frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}}\right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\alpha}}$
$\Upsilon_{1L}$ :	= $(\Upsilon_1 + \Upsilon_3) = 2\bar{\delta} + 2 = 2(1 + \bar{\delta})$
$\Upsilon_{2L}$ :	= $2\bar{\alpha} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right) \left(\frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}}\right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\alpha}} = 2 \left(\frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}}\right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\alpha}}$
$\Upsilon_{3L}$ :	= 2

Nuestra ecuación de evaluación empírica en tiempo discreto será entonces:

$$\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 = \Upsilon_o + \Upsilon_1 q_t + \Upsilon_2 M_t + \Upsilon_3 q_t r_t + u_t \quad (3.2)$$

Donde incluimos el término de error de la regresión ‘ $u_t$ ’ y hemos detallado las variables y parámetros en el Cuadro 3.1. Así especificado, el modelo tiene el último término no lineal en las variables debido a la multiplicación de “ $q_t r_t$ ”. Consideraremos inicialmente el término compuesto (sabiendo que el modelo sigue siendo lineal en los parámetros), y luego separaremos ambos valores para mejorar el resultado de la estimación<sup>8</sup>.

Una alternativa que aplicaremos y nos permitirá mejorar la estimación, será el uso de logaritmos de las variables, pasando entonces el modelo a ser lineal en parámetros y variables, con lo que nuestra ecuación empírica (3.2) quedará como:

$$\begin{aligned} \ln \left[ \left( \frac{I_t}{K_t} \right)^2 \right] &= \Upsilon_{0L} + \Upsilon_{1L} \ln(q_t) + \Upsilon_{2L} \ln(M_t) + \Upsilon_{3L} \ln(q_t) + \Upsilon_{4L} \ln(r_t) + u_t = \\ &= \Upsilon_{0L} + (\Upsilon_{1L} + \Upsilon_{3L}) \ln(q_t) + \Upsilon_{2L} \ln(M_t) + \Upsilon_{4L} \ln(r_t) + u_t \Rightarrow \end{aligned}$$

Para arribar, luego de reenumerar los parámetros, a nuestro ‘**Modelo Empírico**’ a estimar<sup>9</sup>:

$$\ln \left[ \left( \frac{I_t}{K_t} \right)^2 \right] = \Upsilon_{0L} + \Upsilon_{1L} \ln(q_t) + \Upsilon_{2L} \ln(M_t) + \Upsilon_{3L} \ln(r_t) + u_t \quad (3.3)$$

---

<sup>8</sup>/ Veremos más adelante que utilizar la tasa de interés como variable explicativa, no mejora el funcionamiento del modelo durante este período, por lo que no será utilizada finalmente.

<sup>9</sup>/ Hemos resaltado la palabra ‘Modelo’, porque como vamos a analizar varias especificaciones diferentes, adoptaremos en lo sucesivo la aplicación de la mayúscula en la palabra ‘Modelo’ cuando nos refiramos a la estimación de la ecuación 3.3, y utilizaremos la palabra en minúsculas para referirnos a cualquiera de los otros modelos ensayados.

### **III. Caso de Aplicación: Estados Unidos 1952-1976**

Vamos a considerar el caso de la economía estadounidense, que si bien no ha sido muy estable debido a los cambios impositivos, entre otros, fue y es profusamente estudiado.

Como ya dijimos, tomaremos como base el artículo de (Von Furstenberg et al., 1977) que tiene publicados los valores de la “q” de Tobin estimada trimestralmente entre 1952 y 1976, de manera tal que evitaremos la discusión acerca de la forma de cálculo de la ‘q’. Uno de los objetivos de nuestra evaluación, es el de comparar el desempeño del modelo con estimaciones ya realizadas.

#### **A. Análisis de las Series de Datos**

Realizaremos en primer término, una descripción de los datos utilizados y el origen y fuente de los mismos. A continuación, vamos a analizar el comportamiento de las series durante el período de tiempo bajo análisis.

##### **A.1. Origen de los Datos**

Los datos utilizados en el análisis empírico de la Tesis, han sido tomados de cuatro fuentes más elaboraciones propias, referidas a la aplicación de logaritmos, primeras diferencias y variables binarias.

El Cuadro C.1 en la página 183 contiene un resumen del origen y los códigos utilizados en las regresiones de Eviews, que son bastante simples de comprender. Adicionalmente, en la Figura C.1 en la página 184 se han volcado los valores originales tomados de cada fuente.

##### **A.2. Análisis del Comportamiento de las Series**

Antes de comenzar con las regresiones econométricas, vamos a realizar un muy breve análisis de las Series involucradas. En primer lugar vamos a considerar cómo

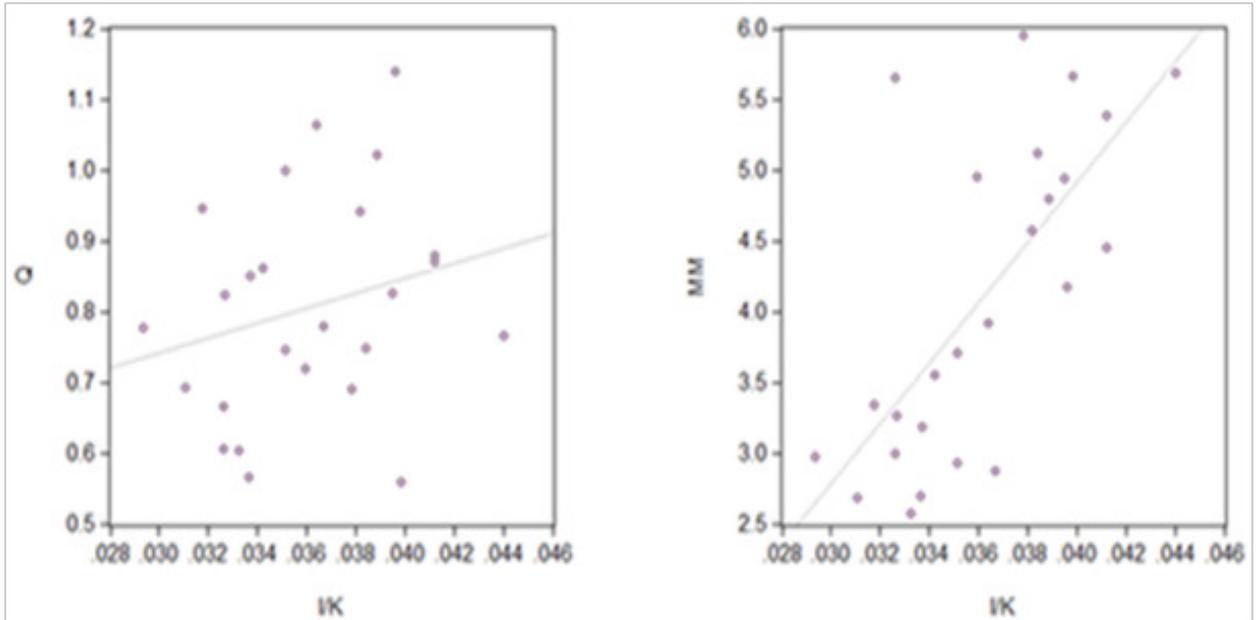


Figura 3.1: Dispersiones entre  $(\frac{I}{K})^2$ , la “q” de Tobin y el Mercado Meta

se relaciona  $(\frac{I}{K})^2$  con la “q” de Tobin y con el Mercado Meta<sup>10</sup>, recurriendo a gráficos de dispersión<sup>11</sup>, y utilizando la nomenclatura siguiente:

- IK =  $(\frac{I}{K})^2$  = Cuadrado de la Relación Inversión/Capital
- Q = “q” de Tobin
- MM = Mercado Objetivo

En el gráfico de la izquierda de la Figura 3.1 vemos el diagrama de dispersión entre la relación de inversión a capital y la ‘q’ de Tobin. Existe una leve correlación positiva, evidenciada por la línea de tendencia, que nos muestra la vinculación entre ambas variables. A pesar de ello, parecería que hay bastante aleatoriedad entre los puntos, toda vez que deberían dibujarse muchas líneas para poder unirlos.

Algo similar sucede con el gráfico de la derecha de la Figura 3.1, que vincula la relación de inversión a capital con el Mercado Meta, en este caso, el GDP de los Estados Unidos. Es similar en cuanto a la correlación positiva de las variables, pero a diferencia del gráfico anterior, la aleatoriedad del comportamiento de las variables no parecería estar garantizada, ya que podemos ver como la simple línea de tendencia

<sup>10</sup>/ A fin de simplificar la lectura, y siempre que no pueda provocar confusiones, también nos referiremos a la relación  $(\frac{I}{K})^2$  como ‘(I/K)’ a secas.

<sup>11</sup>/ Conocidos en inglés como “scatter plot”

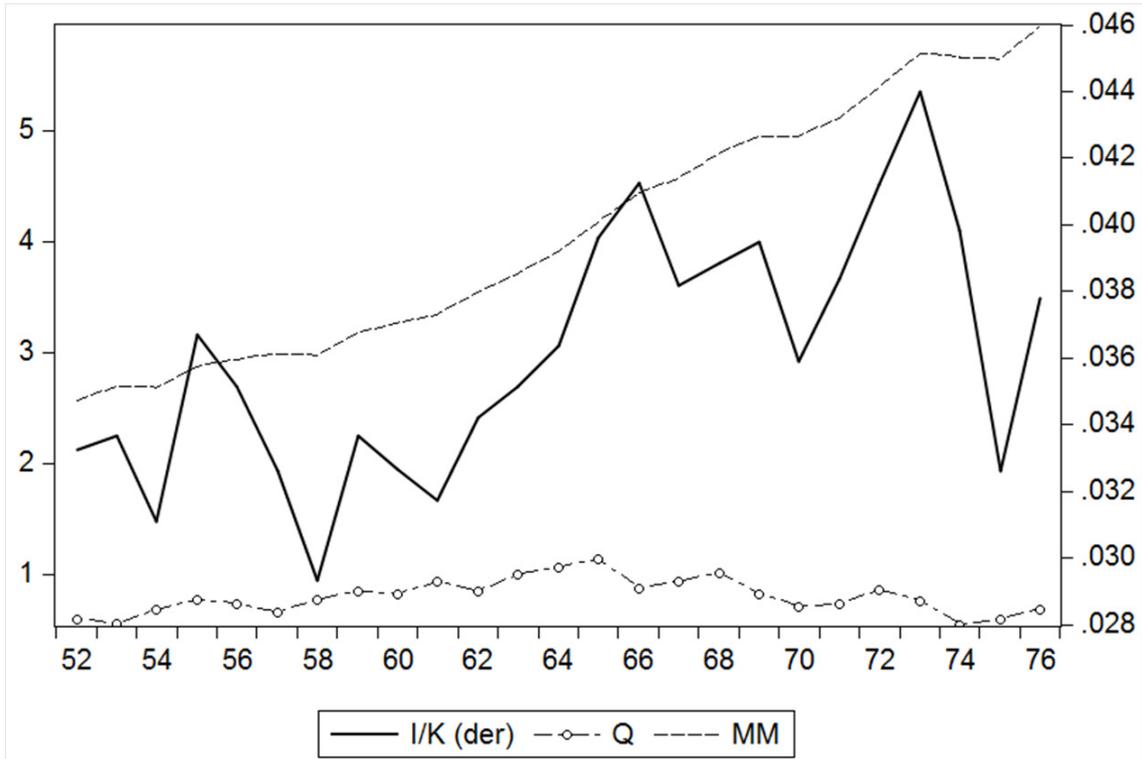


Figura 3.2: Evolución de la relación de Inversión a Capital, el Mercado Meta y la “q” de Tobin

alcanza para reunir a la mayoría de los puntos.

Esta relación bastante estrecha entre  $(\frac{I}{K})$  y el Mercado Meta nos indica que hay un comportamiento conjunto de las variables, y seguramente provocará autocorrelación en los residuos de las regresiones que busquen estimar el valor de la inversión. Como dijimos anteriormente, uno de los principales defectos de los estudios sobre la inversión que sólo se basan en la “q” de Tobin como variable explicativa es, además del bajo  $R^2$ , la presencia de correlación en los residuos de la regresión. Buscaremos salvar este inconveniente tan común en los puntos siguientes.

Para continuar con nuestro análisis preliminar de las variables, va a resultar interesante analizar de qué manera se comportaron en el tiempo las dos variables explicativas principales. En la Figura 3.2 vemos que el comportamiento de la “q” de Tobin y la estimación del Mercado Meta han tenido correlación, primero positiva y luego negativa.

En realidad lo que ha sucedido es que el tamaño del mercado ha tenido una tendencia de crecimiento constante en el tiempo, mientras que la ‘q’ de Tobin aumentó hasta

1965 luego de lo cual inició una tendencia decreciente.

Los dos gráficos siguientes son muy ejemplificativos del comportamiento de las variables y la relación que parecería existir entre ellas. Podemos ver en la Figura 3.2, que muestra la evolución conjunta en el tiempo de la 'q' de Tobin y la relación de inversión a capital, cómo ambas variables crecen y decrecen de manera casi idéntica.

Parecería ser en realidad que la 'q' de Tobin adelanta un período el comportamiento ascendente o descendente de (I/K).

No cabe duda que hay gran correlación entre estas dos variables, y probablemente encontremos en ellas, al menos para nuestro período de estudio, algún tipo de causalidad en el sentido de Granger que, a primera vista y antes de haber realizado las comprobaciones estadísticas necesarias, parecería ser de 'q' a (I/K). Más adelante comprobaremos esta afirmación.

Sigamos ahora con el análisis del comportamiento de nuestra variable objetivo (I/K), en relación con el Mercado Meta. Vemos en la Figura 3.2 que ambas comparten una misma tendencia creciente bastante estable en el caso del Mercado Meta, y algo más oscilante en la relación de inversión a capital. Incluso podemos apreciar que tanto al inicio (entre 1952 y 1960), como al final (entre 1974 y 1976), donde parecería que las series se distancian, los movimientos de suba o baja se corresponden mutuamente.

La diferencia absoluta de los valores, que nos llevó a realizar el gráfico con una doble escala, también nos permite apreciar que a lo largo de todo el período los cambios de tendencia han sido en principio simultáneos. Lo que podemos notar claramente, es que tanto en el caso anterior como en este, hay una tendencia de largo plazo compartida por las tres series, lo que nos llevará a analizar más adelante, la posibilidad de que haya cointegración entre las mismas. También detectamos un posible cambio de parámetros que si bien sabemos que existió (Summers, 1981), deberemos verificarlo estadísticamente para incorporarlo al Modelo.

En nuestras estimaciones, además de las tres variables ya descritas, hemos incluido otras que nos sirvieron para una mejor comprensión del Modelo, aunque luego fueran descartadas. Antes de continuar mencionamos que agregamos en la Figura C.2 en la

página 185, el comportamiento que tuvieron las mismas. Una descripción de estas variables puede verse en el Cuadro C.1 en la página 183

Para finalizar, puede verse la Matriz de Correlaciones entre las variables que usaremos en las estimaciones en la Figura C.3 en la página 185. Existe una importante correlación, aunque no excesiva, entre la variable dependiente (I/K) y la variables explicativa ‘MM’ correspondiente al Mercado Meta, con valores en torno al 65 %. Algo similar sucede con la tasa de interés, que también nos muestra la posible vinculación existente.

También podemos ver que hay una alta correlación positiva entre el Mercado Meta, la tasa de interés y la relación de crédito a Producto Bruto, por lo que deberemos asegurarnos que no haya multicolinealidad en la estimación del modelo. Con esta observación podríamos especular frente a esta condición, que cuando se analizan los llamados “Modelos Aumentados” de la ‘q’ de Tobin, que en muchos casos incluyen estas variables además de la propia ‘q’, lo que se hace es reemplazar el Mercado Meta por otras variables cuya combinación da un resultado similar al de la inclusión del tamaño del mercado. No ahondaremos aquí sobre este punto, pero volveremos a él en las conclusiones.

En nuestras estimaciones, además de las tres variables ya descritas, hemos incluido otras que nos sirvieron para una mejor comprensión del Modelo, aunque luego fueran descartadas.

## **B. Resultados Econométricos**

Vamos a ver en este punto algunos resultados elaborados a partir de las series de tiempo antes señaladas. Las regresiones econométricas han sido realizadas utilizando los programas EViews y Stata13, y para mayor comodidad, las series han sido listadas en el Cuadro C.1 de la página 183, junto con el código de identificación utilizado en EViews y la fuente de las mismas.

## B.1. Regresión de I/K con Q, MM y Binarias

Vemos en primer lugar una estimación de I/K con una constante y las variables ‘Q’ y ‘MM’. Para reducir la autocorrelación, aplicamos logaritmos y resolvemos como se aprecia en la Figura C.4 en la página 186.

El ajuste es relativamente bueno, como se muestra en el Panel (a) de la Figura C.4, ya que el  $\bar{R}^2$  es de 0,497 y el P-Value de la ‘F’ es de sólo 0,0002, lo cual es suficiente para el análisis de estabilidad del modelo que queremos realizar. Debemos verificar para ello, que la estimación no registre autocorrelación en los residuos, lo cual comprobamos a través del estadístico de Durbin-Watson, que si bien parece bajo (1,43), como los valores de tabla para  $k=2$  parámetros y  $N=25$  observaciones, son  $d_L = 1,206$  y  $d_U = 1,550$ , que aunque estamos en la zona de duda, nos aproximamos bastante al valor sin autocorrelación.

Los residuos de la regresión que se muestran en el Panel (b) de la Figura C.4, por su parte, muestran que seis observaciones (un 24 %) salen de las bandas de dos desvíos, y si bien se nota alguna persistencia en las variaciones, no parece notarse un síntoma fuerte de autocorrelación. No obstante, vamos a verificar formalmente la presencia de correlación serial.

Para ello calculamos la Prueba de máxima verosimilitud de Breusch-Godfrey, utilizando tanto uno como dos rezagos. Los resultados pueden verse en los paneles (c) y (d) de la Figura C.4, para dos y un rezagos respectivamente. Como podemos apreciar, los p-values superiores al 5 % (tanto para ‘F’ como para la  $\chi^2$ ), nos permiten rechazar la hipótesis de correlación serial de los residuos.

Dado que el período analizado es bastante extenso (25 años), y como nuestro primer análisis de las series involucradas mostró un cambio importante de tendencia en la ‘q’ de Tobin, vamos a realizar un análisis de cambio estructural ya que cuando se realizan estimaciones econométricas que no incluyen todas las variables explicativas relevantes, puede generarse el llamado sesgo de especificación del modelo, así como falsa autocorrelación de los residuos<sup>12</sup>. Pasemos entonces a verificar si hay cambio estructural en el modelo, utilizando la prueba recursivo.

---

<sup>12</sup>/ Puede consultarse en el Capítulo 2, la Sección III.A.4 en la página 139 para mayores detalles

La estimación recursiva del modelo simple que hemos planteado, puede verse en la Figura C.5 en la página 186, donde podemos notar que si bien la línea de los residuos recursivos (de tazo lleno) no se puede asimilar a una recta, siempre vuelve al valor ‘cero’ luego de cada alejamiento.

Sin embargo, detectamos también que durante el período bajo análisis, dos observaciones sobrepasan las líneas de los dos desvíos, en ambos casos hacia abajo. En 1958 se ve el primer exceso de los residuos recursivos, aunque es bastante pequeño. Más importante aún es el exceso a la línea de las dos desviaciones estándar (roja, punteada), que se produce en 1975, por lo que debemos suponer que también puede haber un cambio de parámetros en ese año.

Planteamos entonces la estimación con dos variables binarias que llamaremos ‘DU58’ y ‘DU75’, las cuales tomarán los valores siguientes:

$$DU58_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 1958 \\ 1 & \text{si } t < 1958 \end{cases}$$

$$DU75_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 1975 \\ 0 & \text{si } t < 1975 \end{cases}$$

## B.2. Resultados

Luego de sucesivas estimaciones, las principales detalladas en el Cuadro C.2 en la página 187, llegamos a una ecuación con un buen ajuste y cuyo resultado detallamos a continuación. El detalle completo de los resultados puede verse en la Figura C.6 en la página 188, en la que mostramos la regresión con las dos variables binarias en el Panel (a), arriba a la izquierda.

### B.2.1. Primera Estimación 1952-76

$$LIK2_t = -7,65 + 0,35 LQ_t + 0,99 LMM_t - 0,32 DU58 - 0,30 DU75$$

$$\begin{matrix} (-62,7) & (2,633) & (8,543) & (-4,025) & -3,612 \end{matrix}$$

$$R^2 = 0,8169 \quad \bar{R}^2 = 0,7803 \quad D.W.=2,055 \quad S.E.Reg= 0,096 \quad (3.4)$$

Antes de continuar, es bueno mencionar el resultado obtenido al incluir la tasa de interés en la regresión, que además de no mejorar la estimación, resultó ser una variable redundante bajo la prueba ‘LM’, por lo que se decidió excluirla del análisis. Los resultados pueden verse en la Figura C.7 en la página 189, que muestra un ‘p-value’ del 85 % para el parámetro, valor muy superior al 5 % requerido. El resto de las variables son significativas, pero el logaritmo de la ‘q’ de Tobin tiene en este caso un nivel de significación de poco menos del 94 %.

En apariencia, la inclusión del Mercado Meta vuelve innecesaria la consideración de la tasa de interés en nuestra estimación. De todas maneras, cuando veamos algunos aspectos de la causalidad en el sentido de Granger más adelante en esta Tesis, agregaremos también nuevos comentarios y fundamentos.

Como se muestra en el Cuadro C.2 (página 187), las restantes variables ensayadas presentaron inconvenientes basados en la autocorrelación con el Mercado Meta tanto en la relación de crédito a GDP (CREPIB) como en el índice líder compuesto (ILI), todo lo cual ya habíamos detectado y comentado en el análisis de las series que realizamos anteriormente en la Sección A.2, página 84 y siguientes. Tampoco tuvieron un nivel de significatividad importante que permitiera justificar su inclusión en el modelo.

## C. Cointegración

Como hemos comentado en el análisis de las variables al inicio de la Sección A.2 de este Capítulo (página 84), hay buenas perspectivas de que las series del Modelo estén cointegradas. Ello sería muy bueno, ya que de comprobarse nos permitiría afirmar que existe una relación de largo plazo entre las variables, y podríamos lidiar de mejor manera con la autocorrelación.

Antes de ingresar en los análisis de práctica, vamos a verificar que los residuos de

nuestra regresión resulten estacionarios, a fin de ver si se cumple esta simple condición. Si ello es así, deberemos verificar que todas las series son  $I(1)$  y luego aplicar las pruebas de verificación. Ya que contamos con varias variables explicativas, utilizaremos la prueba de Johansen que nos permitirá saber cuántas ecuaciones estarían cointegradas, calculando el rango de la matriz de cointegración.

Comenzamos entonces viendo si los residuos de la regresión son estacionarios. Vamos a comprobarlo mediante la prueba de Dickey-Fuller Aumentado y el test de Phillips-Perron. El resultado de las estimaciones puede verse en la Figura C.8 en la página 189, que nos muestra unos p-value inferiores al 5 %, por lo que aceptamos que los residuos de la regresión son estacionarios con un 98 % de probabilidad.

Frente a este resultado, vamos a verificar que las series involucradas cumplan la primera condición de la cointegración, que es el comportamiento Integrado de Primer Orden. En otras palabras, debemos verificar que las series del modelo, esto es las variables explicativas y la variable explicada, tengan raíz unitaria en niveles y sean estacionarias en diferencias, todo lo cual se denomina Integrada de Primer Orden y lo escribimos como  $I(1)$ .

Vale aclarar que para el proceso de cointegración, las variables ficticias DU58 y DU75 son consideradas exógenas al Modelo. Ello es así porque no pueden tener obviamente una relación de largo plazo con las otras variables, sino que sólo representan un complemento de la estimación econométrica.

Realizamos entonces la prueba de raíz unitaria para 'LIK2', 'LQ' y 'LMM'. Vamos a utilizar solamente la prueba de Phillips-Perron, ya que además de contar con las características principales del de Dickey-Fuller Aumentado, admite que los residuos estén correlacionados entre sí. Esto podría parecer una redundancia en nuestro caso, dado que hemos comprobado la ausencia de autocorrelación en el Modelo, pero no nos quitará generalidad ni cambiará los resultados de las pruebas estadísticas.

Podemos ver los resultados en la Figura C.9 en la página 190, donde comprobado que nuestras tres series son  $I(1)$ , por lo que cumplen la primera condición para poder estar cointegradas. Para cumplir la segunda condición, deberá existir una combinación lineal entre ellas que convierta en  $I(0)$  los residuos de la regresión, algo

que ya verificamos al realizar la prueba de Phillips-Perron y el test de Dickey-Fuller Aumentado (ver Figura C.8 en la página 189). Esa combinación lineal de la que hablamos, por su parte, se conoce como vector de cointegración.

Hemos comprobado por lo tanto, empleando la metodología de Engle-Granger, que las variables están cointegradas. Sin embargo, las limitaciones propias de este método se suman a la presencia de más de una variable explicativa, lo que podría provocar que haya más de un vector de cointegración. Por ello, vamos a aplicar en la Sección siguiente la prueba de Rango de (Johansen, 1988) para verificar la existencia de cointegración y la cantidad de vectores cointegrados.

### **C.1. Prueba de Johansen**

Para verificar la cointegración aplicaremos la prueba de Johansen que mide el rango de la matriz de cointegración, y permite determinar cuántas ecuaciones están cointegradas (ninguna, una, o dos en nuestro caso). Dado que esta estimación resulta muy sensible al número de rezagos que se aplican en la estimación, estudiaremos primero cuál debería ser la cantidad correcta de rezagos o 'lags' a utilizar.

Para ello estimamos un Vector Autorregresivo con nuestras variables más dos rezagos, otro con un rezago y el tercero sin rezagos. A continuación calculamos los indicadores de eficiencia de las estimaciones y comparamos los resultados, como se ve en la Figura C.10 en la página 191, que nos indica que el mejor ajuste se produce con dos rezagos en la estimación.

Exponemos los resultados de la prueba de Johansen en la Figura C.11 en la página 191, en la que se detectan dos vectores cointegrados.

### **C.2. Modelo de Corrección de Errores**

Hemos verificado entonces que nuestras variables endógenas se encuentran cointegradas, y por lo tanto tienen una relación de largo plazo. A partir de este resultado, y aplicando el teorema de representación de Granger señalado en III.D del Capítulo 2 en la página 144, podemos estimar un modelo de corrección de errores y tratar de

medir la velocidad de ajuste cuando se produzcan desvíos entre el corto y el largo plazo y la causalidad en sentido de Granger; todo ello en la medida que resulte estadísticamente significativo.

Podemos ver la estimación de nuestro Modelo de Corrección de Errores en la Figura C.12 en la página 192, que responde a la siguiente especificación:

### Ecuación de Largo Plazo

$$LIK2_{t-1} = 8,27 + 0,42LQ_{t-1} - 1,11LMM_{t-1}$$

### Ecuación de Corto Plazo

$$\begin{aligned} \Delta LIK2_t = & -0,69(\widehat{LIK2})_{t-1} - 0,30\Delta LIK2_{t-1} - 0,41\Delta LIK2_{t-2} + \\ & + 0,98\Delta LQ_{t-1} + 0,04\Delta LQ_{t-2} + 2,67\Delta LMM_{t-1} + \\ & + 3,07\Delta LMM_{t-2} - 0,05 - 0,12DU58 - 0,30DU75 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Podemos ver en la Figura C.12 en la página 192, que la segunda ecuación de cointegración, correspondiente a ‘D(LQ)’ tiene un valor de velocidad de ajuste positivo, mientras que la tercera correspondiente a ‘D(LMM)’ si bien tiene coeficiente negativo, resulta no significativo al 95 %, por lo que podemos desechar ambas ecuaciones y concluir que sólo hay una ecuación cointegrada, que corresponde a ‘D(LIK)”’.

Esto también nos permite afirmar que tanto el logaritmo de q (‘LQ’) como el del Mercado Meta (‘LMM’) son variables “*exógena débil*” en el Modelo de Corrección de Errores planteado, lo que nos permite estimar el modelo de largo plazo en forma condicional a las variables ‘LQ’ y ‘LMM’<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup>/ La justificación de este punto se encuentra en la explicación de causalidad dada en la página 148

### C.3. Causalidad

Vemos a la izquierda de la Figura C.13, en el Panel (a), la misma información mostrada en la Ecuación de Corto Plazo (3.5) del Modelo de Corrección de Errores. Al respecto podemos verificar que los parámetros tienen los mismos valores (obviamente), sólo que ahora se denominan ‘C(1), ..., C(10)’. La ecuación explícita, por su parte, puede verse en la parte superior del Panel (a) de la Figura C.13. Para afirmar que existe causalidad en el sentido de Granger en el largo plazo, deben verificarse dos condiciones referidas al coeficiente “C(1)”, que expresa la velocidad de ajuste entre el corto y el largo plazo en el Modelo. Ellas son:

- Que resulte negativo
- Que sea estadísticamente significativo

Como podemos ver en el Panel (a) de la Figura C.13 ya citado, el parámetro tiene un coeficiente negativo de ‘-0,69’ con lo que se cumple la primera condición. La segunda condición se verifica también al 94 % de confianza, toda vez que el correspondiente ‘p-value’ es del 5,61 %. Normalmente se exige una significatividad del 95 %, pero en este caso, y por ser tan pequeña la diferencia, podemos aceptar la causalidad en el sentido de Granger de las variables ‘LQ’ y ‘LMM’ hacia ‘LIK2’ a largo plazo, y confirmar entonces la hipótesis de que las variables del Modelo están cointegradas con un 94 % de significatividad.

Esta conclusión es muy importante, dado que confirma no sólo la cointegración de las variables, sino que afirma que existe una relación de largo plazo entre ellas, al menos con un 94 % de significatividad estadística.

Veamos ahora qué sucede en el corto plazo con nuestro Modelo de Corrección de Errores (ECM). Para probar que haya causalidad de las variables explicativas hacia la variable explicada, debemos comprobar que todos los rezagos del ECM para cada una de las variables sean diferentes de cero. En otras palabras, aplicando la prueba de significatividad conjunta de Wald a los parámetros rezagados del logaritmo de la ‘q’ de Tobin [C(4) y C(5)] y a los del logaritmo del Mercado Meta [C(6) y C(7)], veremos si resultan significativos o no.

En el Panel (b) de la Figura C.13, arriba a la derecha, vemos el resultado de la prueba para la 'q' de Tobin que, al tener 'p-values' menores al 5% tanto para la prueba de 'F' como para la de la ' $\chi^2$ ', nos confirma que existe causalidad de corto plazo en el sentido de Granger de la 'q' de Tobin a la relación de inversión a capital al cuadrado  $(I/K)^2$ .

El Panel (c), mientras tanto, expresa que al contrario del caso anterior, no se verifica significatividad de los parámetros estimados según la prueba de Wald, por lo que no se comprueba que haya en el corto plazo causalidad en el sentido de Granger del Mercado Meta hacia  $(I/K)^2$ .

En este punto, y para confirmar y ampliar los resultados, realizaremos la prueba de causalidad de Granger para las tres variables del Modelo y para la tasa de interés Prime. Debemos ser cautos al respecto dado que hay cierta incompatibilidad de la prueba de causalidad de Granger mediante la prueba 'F', cuando las variables están cointegradas. Sin embargo, y como hemos aceptado la cointegración y la causalidad de largo plazo con solo un 94% de significatividad en lugar del tradicional 95%, vamos a calcular igual estas relaciones de precedencia, al decir de (Maddala and Kim, 1998).

Los resultados completos pueden verse en la Figura C.14 en la página 193 y una síntesis se encuentra en las conclusiones de la Sección C.4, donde también puede consultarse la Figura 3.3.

Vamos a concluir con una breve revisión del comportamiento estadístico del Modelo de Corrección de Errores, analizando algunas pruebas y gráficos del mismo, que pueden verse en la Figura C.15 en la página 194, que en términos generales nos indican la ausencia de autocorrelación y heterocedasticidad.

#### **C.4. Conclusiones del Modelo Cointegrado**

Concluimos entonces que nuestro Modelo de Corrección de Errores presenta un buen comportamiento estadístico, por lo que las conclusiones que fuimos citando en nuestra discusión son válidas y pueden ser tomadas en cuenta. A modo de resumen,

las reiteramos a continuación:

1. dado que se cumplen las dos condiciones para aceptar causalidad de largo plazo, ya que el parámetro 'C(1)' resultó negativo y significativo, podemos concluir que las variaciones de corto plazo tienden a ajustarse a los valores de largo plazo y viceversa.
2. La velocidad de ajuste expresada por el citado parámetro, es de alrededor del 69 % en cada período, lo que significa que las discrepancias entre el corto y el largo plazo se corrigen en alrededor de un 69 % en cada año.
3. Las variables 'LQ' y 'LMM' son exógenas débiles por lo que mientras la relación de inversión a capital (I/K) ajustará las discrepancias entre el corto y el largo plazo, ni la 'q' de Tobin ni el Mercado Meta lo harán.
4. Existe en el corto plazo además, causalidad en el sentido de Granger de la 'q' de Tobin hacia la relación de inversión a capital al cuadrado.
5. no se verifica causalidad de corto plazo en el sentido de Granger del Mercado Meta a la  $(I/K)^2$
6. Recordando nuevamente que por tratarse de variables cointegradas, no es aplicable la prueba de causalidad en el sentido de Granger basado en la distribución 'F' nos anticipamos al análisis de cambio estructural de la Sección C.5 siguiente, y verificamos que si no hubiera cointegración , existirían las relaciones de causalidad siguientes (ver la Figura 3.3):
  - a) al 99,9 % de significatividad de la tasa de interés prime a la relación de inversión a capital y al Mercado Meta
  - b) al 99 % de significatividad de la 'q' de Tobin a la relación de inversión a capital y al Mercado Meta
  - c) al 95 % de significatividad del Mercado Meta a la tasa de interés prime
  - d) al 91 % de significatividad de la tasa de interés prime a la 'q' de Tobin
  - e) al 88 % de significatividad del Mercado Meta a la relación de inversión a capital
  - f) al 83 % de significatividad del Mercado Meta a la 'q' de Tobin

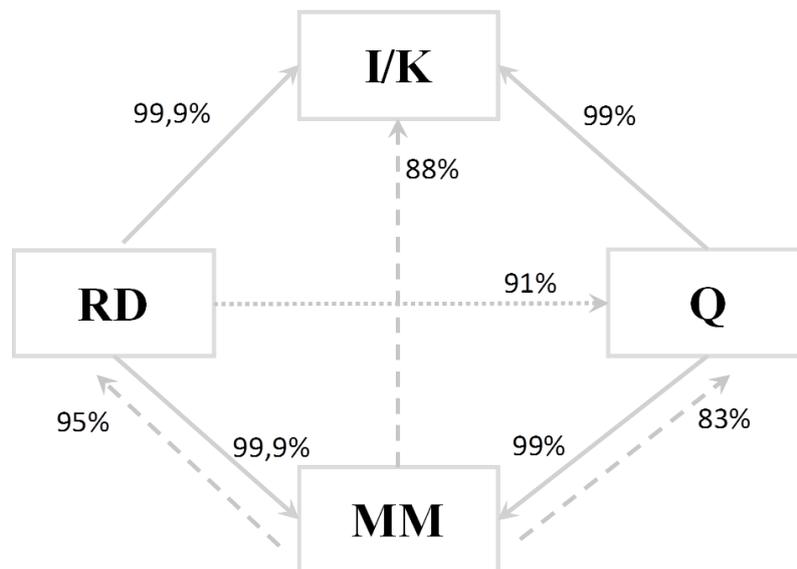


Figura 3.3: Esquema de Causalidad en el Sentido de Granger para el caso que las variables NO estuvieran cointegradas.

Fuente: Elaboración propia con datos de la Figura C.14 en la página 193

### C.5. Cambio en los Parámetros

Hemos visto en el análisis realizado en la Sección B de este Capítulo en la página 88, que los datos de nuestro Modelo tienen cambios estructurales como resultado de las variaciones que ha tenido la economía estadounidense en el período 1950-1976 (ver gráfico C.5 en la página 186).

Sabemos que frente a cambios estructurales, las pruebas para la detección de cointegración resultan menos efectivos y pueden llevar a cometer errores, tomando como cointegradas series que en realidad no lo están. Hemos tenido la precaución de aplicar la prueba de Johansen que resulta más confiable al no depender de la correcta especificación del modelo en su formulación.

Sin embargo, y para despejar toda duda, hemos realizado también utilizando ‘*Stata 13*’, la prueba de (Gregory and Hansen, 1996a) de cointegración cuando hay cambios en los parámetros. Los resultados son resumidos en el Cuadro 3.2, y pueden verse completos en la Figura C.16 en la página 194. Como podemos verificar, las variables están cointegradas en todos los casos, salvo cuando el cambio afecta al intercepto y la pendiente. El año de cambio en los parámetros, esta prueba lo detecta en 1956 y no en el año 1958 como vimos anteriormente con la prueba de Chow.

Cuadro 3.2: Test de Gregory-Hansen: Síntesis

Cambio en	Parámetro	Año	Valor $\widehat{Z}_t$	Tabulado (1)	Resultado
Nivel	Constante	1956	5,21	4,92	hay CI
Pendiente	C+Pend	1956	5,29	5,50	NO hay CI
Tendencia	C+Tend	1971	5,45	5,29	hay CI
Todos	C+P+T	1969	6,21	5,96	hay CI

(1): al 5 % según (Gregory and Hansen, 1996a)

También calculamos la relación de largo plazo del Modelo, que puede verse en la Figura C.17 en la página 195. Si bien el ‘p-value’ de la significatividad conjunta del modelo (ADJ) resulta significativo (1,7%), ninguno de los parámetros de largo plazo es individualmente significativo, por lo que concluimos que no se trata de una buena estimación, y en apariencia el cambio de parámetros se superpone con la cointegración y viceversa.

Dado que las pruebas dejan libre la fecha del cambio estructural, y como nosotros verificamos en la Figura C.5 en la página 186 que hubo quiebre en dos años, 1958 y 1975, también aplicamos (Gregory and Hansen, 1996a) manteniendo una dummy en el año 1958<sup>14</sup>. En este caso hay cointegración entre las variables, salvo cuando el cambio afecta la constante y la tendencia simultáneamente. También mejoran bastante los resultados de largo plazo, aunque sin llegar a ser significativos, como podemos ver en el Cuadro 3.3 y la Figura C.18 en la página 195.

Como conclusión general para esta Sección, podríamos decir que hay evidencias de cointegración, pero la misma no puede verificarse por completo debido al cambio en los parámetros del Modelo.

Si bien hemos comprobado la cointegración de las variables incluso aceptando cambios en los parámetros, la ambigüedad de algunos resultados de la prueba de (Gregory and Hansen, 1996a) nos impide avanzar más allá. Sin embargo, dos cosas quedan claras:

<sup>14</sup>/ Para ello, definimos una nueva variable llamada ‘dulmm’=du58\*1mm, y la incorporamos en la regresión, como muestra la Figura C.18 en la página 195

Cuadro 3.3: Test de Gregory-Hansen: Binaria ‘dulmm’ en 1958

Cambio en	Parámetro	Valor $\widehat{Z}_t$	Tabulado (1)	Resultado
Nivel	Constante	5,21	4,92	hay CI
Pendiente	C+Pend	5,45	5,29	hay CI
Tendencia	C+Tend	5,29	5,50	NO hay CI
Todos	C+P+T	6,21	5,96	hay CI

(1): al 5 % según (Gregory and Hansen, 1996a)

1. Hay cointegración, y
2. El Mercado Meta es relevante.

Un punto adicional que hemos verificado, es el de la causalidad en sentido de Granger, para el caso que no hubiera cointegración, donde vimos la interrelación del Mercado Meta con las demás variables. Volveremos sobre este punto en el Capítulo de Conclusiones .

Por todo lo dicho, confirmamos nuevamente la relevancia del Mercado Meta, ya que ninguno de los resultados lo descarta, salvo la significatividad individual en la que todas las variables quedaron descartadas.

## D. Estimación sin el Mercado Meta

Adicionalmente a los resultados de nuestra estimación, que resultan satisfactorios, es bueno comprobar qué hubiera pasado si dejábamos afuera del análisis al Mercado Meta. Podemos comprobar fácilmente que una regresión sin ‘LMM’ y con la Tasa Prime (‘RD’) como sustituto, siempre agregando las variables binarias ‘DU58’ y ‘DU75’ ya que el Modelo presenta el mismo cambio estructural que el anterior (como es lógico), se obtiene una buena estimación de  $(I/K)^2$ , aunque con un  $R^2$  bastante inferior al anterior.

El resumen de los resultados de esta estimación ha sido sintetizado en las Figuras C.19 y C.20 en la página 196 por una cuestión de espacio, pero se siguieron los

Cuadro 3.4: Comparación de las Ecuaciones con ‘MM’ o con ‘RD’

Criterio	Con MM	Con RD
Akaike	-1.682109	-1.049817
Schwarz	-1.438334	-0.806042
Hannan-Quinn	-1.614496	-0.982205
S.E.Regresión	0.095520	0.131037
$R^2$	0.816876	0.655376
$\bar{R}^2$	0.780252	0.586451

mismos pasos aplicados al Modelo general.

La comparación de las estimaciones con el Mercado Meta o con la tasa de interés prime pueden verse en el Cuadro 3.4, que muestra los tres criterios principales de selección de modelos (Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn) en los tres primeros renglones. En todos los casos la primera columna, correspondiente al modelo con el Mercado Meta (que puede verse en la Figura C.6 en la página 188), obtiene un mejor resultado que la segunda. La suma de los desvíos estándar de la regresión, en la cuarta fila, también resulta inferior, a la vez que los  $R^2$  (normal y ajustado) son superiores. Podemos aceptar entonces que la estimación con el Mercado Meta en lugar de la tasa de interés prime es preferible, ya que presenta mejor bondad de ajuste y mejores criterios de selección.

Sintetizando, al reemplazar el Mercado Meta por la tasa de interés para mejorar la especificación del modelo, algo que usualmente se realiza en los análisis empíricos que aplican el llamado “modelo ‘q’ aumentado”, obtenemos resultados que no resultan tan significativos como en nuestro Modelo, a la vez que se producen problemas en la cointegración de las variables y los resultados de influencias a corto y largo plazo entre las mismas.

No obstante lo dicho, nuestra conclusión está limitada a afirmar que para el período seleccionado y con los datos utilizados, la inclusión del Mercado Meta en la estimación resultaría preferible a la utilización de la tasa de interés prime.

## E. Verificaciones Estadísticas

Vamos a transcribir en la ecuación (3.6) nuestro Modelo cointegrado de largo plazo utilizando la ‘q’ de Tobin calculada en (Von Furstenberg et al., 1977). Nuestro objetivo será ahora realizar una serie de comprobaciones estadísticas para verificar el desempeño del mismo. En primer lugar tenemos que analizar los resultados de la estimación que nos da la Figura C.6 en la página 188, donde vemos que el ajuste es muy razonable ya que tiene un  $R^2$  del 81,7% y un  $\bar{R}^2=78,03\%$ , mientras que todas las variables resultan significativas al 98%.

$$\ln \left[ \left( \frac{I}{K} \right)_t^2 \right] = -7,65 + 0,35 \cdot \ln(Q_t) + 0,99 \ln(MM_t) - 0,32 \cdot DU58 - 0,30 \cdot du75$$

$$(0,122) \quad (0,135) \quad (0,115) \quad (0,080) \quad (0,084)$$

$$R^2 = 0,817 \quad \bar{R}^2 = 0,780 \quad D.W=2,06 \quad S.E.Reg= 0,096$$

(3.6)

Ya habíamos mencionado que no es nuestro objetivo lograr la mejor estimación, sino que tan solo buscamos comprobar cómo la inclusión del Mercado Meta mejora la regresión, y sobre todo verificar la ausencia de la llamada correlación espúrea. Es por ello que no buscaremos mejorar este resultado ya que es algo que haremos en la Sección V en la página 105 siguiente, aumentando incluso la cantidad de observaciones. Pero sí vamos a comprobar que los resultados son estadísticamente confiables.

Como ya dijimos anteriormente, la estimación además de ser muy buena, no tiene autocorrelación y este es a nuestro entender uno de los principales aportes de haber incluido el Mercado Meta, ya que incluso suponiendo que podrían estar faltando otras variables y más observaciones, evitamos la autocorrelación de los residuos. Resumimos a continuación los resultados de las comprobaciones estadísticas, cuyo detalle puede verse en la Sección F del Anexo C en la página 197:

- No se detecta correlación ni correlación espúrea.
- No se detecta heterocedasticidad ni heterocedasticidad condicional.
- El parámetro del Mercado Meta es relevante y no es redundante.
- Los residuos de la regresión tienen Distribución Normal, por lo que puede realizarse inferencia con el Modelo.
- No se detecta colinealidad ni inflación de varianza
- El Modelo está bien especificado.

## IV. Variaciones al Modelo

Completados los resultados de nuestro Modelo, vamos a analizar muy brevemente dos variaciones al mismo que resultan interesantes para analizar, y que permiten incorporar nueva información y perspectiva al análisis.

En primer lugar vamos a considerar qué pasaría si en lugar de utilizar una ecuación en logaritmos como la (3.3) que estimamos, analizáramos la ecuación en niveles (3.2).

La segunda cuestión que estudiaremos, es la referida al comportamiento de una ecuación con el Mercado Meta como única variable, además de la constante y las dos binarias.

### A. Modelo en Niveles en Lugar de Logaritmos

Durante las sucesivas aproximaciones realizadas hacia la ecuación final, una de las primeras alternativas comprobadas fue la de la ecuación en niveles, cuya especificación mostrada en (3.2) reiteramos a continuación, para mayor simplicidad del lector.

$$\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 = \Upsilon_o + \Upsilon_1 q_t + \Upsilon_2 MM_t + \Upsilon_3 q_t r_t$$

El resultado detallado final puede verse en la Figura C.28 en la página 205, donde notamos que fue eliminada la constante ya que no era significativa, y se agregaron las dos variables binarias de cambio estructural.

Si bien todos los indicadores son mejores en la estimación en niveles, cuando analizamos la cointegración de este modelo encontramos que si bien tiene buen ajuste, la significatividad del parámetro 'C(1)' es menor que la que muestra el Modelo en logaritmos C.6.

Fue este importante detalle el que nos llevó a preferir la ecuación logarítmica a fin de tener una mejor cointegración de las variables. Recordemos que la cointegración se refiere a la combinación lineal de las variables de manera tal de transformar la relación entre ellas que son  $I(1)$ , en una ecuación de regresión cuyos residuos serán estacionarios. Por ello, este cambio de especificación resulta pertinente ya que encontró una mejor combinación lineal de las variables.

## **B. Modelo Utilizando Sólo el Mercado Meta**

La segunda alternativa que vamos a estudiar, es la referida al comportamiento de un modelo que sólo tenga, además del Mercado Meta, una constante y las dos variables binarias.

El objetivo en este caso es el de verificar una vez más la importancia del Mercado Meta en la determinación de la relación de inversión a capital, buscando conocer qué pasa con la cointegración y la causalidad en este caso.

Analizando los resultados detallados en la Figura C.20 (página 196), y recordando que en la estimación del modelo con la tasa de interés prime en lugar del Mercado Meta tampoco existía cointegración, concluimos que la correcta especificación del modelo requiere la inclusión tanto del Mercado Meta como de la 'q' de Tobin para que exista cointegración.

## V. Caso de Aplicación Estados Unidos 1950-2010

A fin de verificar que nuestros resultados no se deben sólo a una realización particular, vamos a realizar una nueva estimación, incorporando nueva información y cambiando el origen de algunos datos.

En concreto, vamos a reemplazar los valores de la ‘q’ de Tobin de la Sección anterior provenientes de (Von Furstenberg et al., 1977), utilizando los nuevos valores a partir de la información publicada por la Federal Reserve (FED) en los cuadros “Z.1”, utilizando la metodología sugerida por (Mihaljevic, 2010) y aplicando la aproximación simplificada sugerida por (Chung and Pruitt, 1994) <sup>15</sup>. Vamos a llamar “Q1” a esta nueva variable, para diferenciarla de la utilizada en el caso anterior. La ecuación aplicada para calcular la serie es:

$$Q1 = \frac{\text{Valor de Mercado de Deuda y Acciones} - \text{Activos Líquidos Netos} - \text{Inmuebles}}{\text{Valor de reemplazo de Plantas, Equipos e Inventarios}}$$

$$Q1 = \frac{VMD + VMA - ALN - INM}{VRP + VRE + VRI} \quad (3.7)$$

Los datos utilizados provienen de diferentes números del ‘Z 1 Statistical Release’ de la FED, que puede obtenerse en <http://www.federalreserve.gov/releases/z1/>. Dentro de cada ‘Z 1’ se utiliza el cuadro “B.102 Balance Sheet of Nonfarm Nonfinancial Corporate Business”. Los valores de ‘Q1’ en la ecuación (3.7) fueron calculados utilizando los renglones que se indican en el Cuadro 3.5.

Con esta información, utilizamos los valores calculados en (Mihaljevic, 2010) para el período 1950-2010 y conformamos de esta manera una muestra mayor y diferente a la anterior. Las demás variables utilizadas (I/K, MM, etc.), son las mismas del

---

<sup>15</sup>/ De acuerdo a las verificaciones realizadas por los autores, los resultados capturan al menos el 96,6% de las variaciones de la ‘q’ de Tobin calculada utilizando el modelo teórico sugerido por (Lindenberg and Ross, 1981).

Cuadro 3.5: Cálculo de la ‘q’ de Tobin a partir del Z 1 de la FED

Sigla	Descripción	Renglón Z 1
VMD	Valor de Mercado de la Deuda	24+25+28
VMA	Valor de Mercado de las Acciones	35
ALN	Activos Líquidos Netos	6-(21-24-25-28)
INM	Inmuebles	3-33-34
VRP	Costo de Reemplazo de Plantas e Inmuebles	33+34
VRE	Costo de Reemplazo de Equipos y Software	4
VRI	Costo de Reemplazo de Inventarios	5

caso anterior, y provienen de las fuentes ya citadas (FRED y PWT), sólo que ahora abarcan el período 1950-2010.

## A. Primera Regresión 1950-2010

Con esta nueva realización de datos, volvimos a estimar el modelo de la misma forma que antes, para lo cual calculamos en primer término los criterios de selección para evaluar la cantidad de rezagos.

A continuación calculamos el modelo con un vector cointegrado, utilizando el Modelo de Corrección de Errores cuyo resultado puede verse en la Figura C.32 en la página 207. Vemos que la velocidad de ajuste se reduce del 69% que teníamos antes, a un 40% en la realización actual, pero la significatividad del coeficiente es mayor, y alcanza al 96%.<sup>16</sup>

Tomemos estos resultados con cautela ya que como mencionamos anteriormente, si bien la cointegración es una herramienta muy útil y sofisticada, los resultados que presenta el Modelo de Corrección de Errores en general están sujetos a controversias por las variaciones y la falta de precisión que presenta (Gujarati, 2010).

<sup>16</sup>/ Esto puede deberse a que la precisión del indicador no es tan buena, pero más adelante cuando agreguemos otras variables a la estimación, comprobaremos que este valor aumenta nuevamente y llega hasta el 61%.

También tenemos variaciones en los valores de largo plazo, así como en la bondad de ajuste (lógicamente), que de todas maneras sigue siendo buena, pero por tratarse de un período tan extenso, pareciera que deberían incluirse otras variables explicativas.

En conclusión, la nueva estimación realizada incorporando nuevos datos y cambiando el origen y forma de cálculo de la 'q' de Tobin, nos muestra resultados similares a los obtenidos anteriormente. Este hecho nos tranquiliza, en el sentido que los resultados no dependen de la muestra particular que habíamos utilizado, sino que se verifican también en este período más amplio.

También podemos ver, y este fue el segundo objetivo que buscábamos comprobar en este análisis, que el reducido tamaño de 25 observaciones de la muestra anterior, nos permitió encontrar similares estimaciones cualitativas que las que aportó una muestra de 61 datos, lo cual brinda un buen sostén empírico a nuestro Modelo teórico.

### **A.1. Cambio de Parámetros**

Para finalizar este punto, vamos a aplicar la prueba de (Gregory and Hansen, 1996a), a fin de verificar si existe cointegración a pesar de los cambios estructurales. Podemos ver los resultados obtenidos en el resumen que se muestra en el Cuadro 3.6, en el que debemos destacar las cuestiones siguientes:

1. El las prueba detecta cambios estructurales en el año 1994 (principalmente).
2. Hay cointegración en todos los casos, salvo cuando el cambio de parámetros es simultáneo, esto es, afecta a la constante, la pendiente y la tendencia en forma conjunta.
3. El resultado anterior es parecido al obtenido para el caso de 25 observaciones.
4. El rechazo de cointegración en el cuarto escenario (cambios simultáneos), se produce por un margen mínimo, por lo que podría aceptarse si se redujera el nivel de significatividad.

Estos resultados vuelven a confirmar nuestras conclusiones anteriores acerca de la existencia de cointegración entre las variables del Modelo, y nos permiten realizar

Cuadro 3.6: Test de Gregory-Hansen: 1950-2010

Cambio en	Parámetro	Año	Valor $\widehat{Z}_t$	Tabulado (1)	Resultado
Nivel	Constante	1994	5,14	4,92	HAY CI
Pendiente	C+Pend	1994	5,60	5,29	HAY CI
Tendencia	C+Tend	1996	5,58	5,50	HAY CI
Todos	C+P+T	1994	5,93	5,96	NO HAY CI

(1): al 5% según (Gregory and Hansen, 1996a)

una nueva estimación econométrica.

Antes de ello, vamos a verificar que realmente los cambios estructurales están afectando el comportamiento del Modelo. El sentido de este punto es ver que, como la prueba de (Johansen, 1988) detectó cointegración y el test de (Gregory and Hansen, 1996a) que contempla los cambios estructurales también, podría resultar que los cambios estructurales no influyen en la relación de largo plazo que tienen las variables cointegradas entre sí.

Para verificarlo, realizamos una estimación con un modelo ‘ARDL’<sup>17</sup> con variables binarias que contemplan el cambio estructural detectado en 1994 por la prueba, y otra estimación sin las variables binarias. Las binarias a utilizar surgen del valor del año del cambio estructural y su multiplicación por las variables explicativas, esto es:

**du94** : Variable binaria igual a cero para ‘t<1994’ y uno en el resto

**dulq** : Variable binaria igual a ‘DU94 \* LQ’

**dulmm** : Variable binaria igual a ‘DU94 \* LMM’

El resultado encontrado de falta de significación de las variables ficticias y mejora de la significatividad de las variables explicativas al quitar las dummies, unido a la detección de cointegración tanto con la prueba de (Johansen, 1988) como con el de (Gregory and Hansen, 1996a), nos estaría indicando que puede ser posible tener una

<sup>17</sup>/ Pueden verse algunos de los principales detalles de este tipo de modelos en (Enders, 2008).

buena estimación del Modelo sin incluir variables ficticias. Esto es lo que haremos en la siguiente Sección<sup>18</sup>.

## B. ECM para Estados Unidos 1950-2010

A partir de los resultados obtenidos en la Sección anterior, en el sentido que podríamos tratar de estimar el Modelo sin aplicar las variables ficticias para el período 1950-2010, realizamos una estimación en base a un Modelo Autorregresivo de Rezagos Distribuidos (ARDL), siguiendo la recomendación de (Enders, 2008) acerca de la conveniencia de estimar inicialmente un ARDL en lugar del ECM.

Utilizando el Criterio de Información de Akaike, detectamos en primer término que la estimación del ARDL debe incluir un solo rezago, como puede verse en el Panel (d) de la Figura C.37 en la página 210. A continuación, incluimos variables adicionales a la 'q' de Tobin y el Mercado Meta, a fin de mejorar la estimación y reducir la autocorrelación. En este proceso de selección, realizado utilizando Mínimos Cuadrados Ordinarios de los que mostramos cinco resultados intermedios en el Cuadro C.3 en la página 209, verificamos que en todos los casos existe autocorrelación de primer orden. Esto coincide con lo que nos indicó el Criterio de Akaike, en el sentido de que es relevante un solo rezago para la estimación.

También pudimos verificar que a diferencia de lo ocurrido con la muestra de 1952-1976, la relación de crédito a GDP (la variable CREPIB), si bien tiene correlación alta con el Mercado Meta como se ve en la Figura C.35 en la página 209, no genera disturbios insalvables.

También hemos visto que la tasa de interés es una variable relevante para el Modelo, utilizando la 'tasa prime'. En este caso, las primeras diferencias de la tasa de interés resultaron relevantes, mientras que la variable en niveles no lo fue. Nuestro Modelo ha mejorado, pero tenemos un inconveniente, que viene dado por la inclusión de series de diferente orden de integración en el mismo. O bien excluimos la tasa de interés ( $\Delta RD$ ) así todas las variables son  $I(1)$  y aplicamos (Johansen, 1988), o bien

---

<sup>18</sup>/ El detalle de los resultados de las estimaciones pueden verse en la Figura C.34 en la página 208.

utilizamos la metodología propuesta por (Pesaran and Smith, 2001).

### C. Bound Test

En nuestro caso vamos a utilizar la alternativa propuesta por (Pesaran and Smith, 2001), ya que si bien nuestro interés está centrado en la estimación de ‘LIK2’ solamente, al incluir la tasa de interés en primeras diferencias tenemos series  $I(1)$  e  $I(0)$  combinadas. Esto nos permite además, mantener la formulación teórica del Modelo Empírico de nuestra ecuación (3.3)<sup>19</sup>, que incluye a la tasa de interés como variable explicativa.

Para determinar el método de estimación a emplear, por su parte, debemos saber el comportamiento de las variables, ya que se dan tres escenarios posibles:

1. Todas las series están cointegradas: tendríamos que estimarlas con un Modelo de Corrección de Errores vectorial
2. Algunas series están cointegradas y las otras no: las cointegradas se estiman con el Modelo de Corrección de Errores y las demás con un ARDL (u otro método pertinente)
3. Ninguna está cointegrada: se estiman con ARDL u otro método

Para poder evaluarlo, realizamos como dijimos, la prueba de cointegración de (Pesaran and Smith, 2001) cuyos resultados pueden verse en el Cuadro 3.7. Dado que hay variables no cointegradas (LQ1), el método a utilizar será el ARDL en las NO Cointegradas y el Modelo de Corrección de Errores para ‘LIK2’ que está cointegrada.

Utilizamos en la estimación la metodología de Engle-Granger de dos pasos, estimando en primer término el modelo de largo plazo para obtener los residuos de esa regresión, que luego serán utilizados en la estimación del Modelo de Corrección de Errores. Las ecuaciones específicas del Modelo a estimar son:

---

<sup>19</sup>/ En la página 83

Cuadro 3.7: Resultados de la Prueba de Cointegración de Pesaran: 1950-2010

Variable	Est. 'F'	Resultado	Est. 't'	Resultado	Final
LIK2	13,62	hay CI	7,08	Confirma	* *
CREPIB	11,65	hay CI	6,68	Confirma	* *
$\Delta(RD)$	4,51	hay CI	4,36	Confirma	* *
LMM	8,65	hay CI	2,15	Rechaza	*
LQ1	3,09	Duda	0,92	NO hay CI	

Valor de Tabla 'F' al 5 %:  $I(0)=2,86 - I(1)=4,01$

Valor de Tabla 't' al 5 %:  $I(0)=2,86 - I(1)=3,99$

### C.0.1. Ecuación de Largo Plazo

$$LIK2_t = \Upsilon_0 + \Upsilon_1 LIK2_{t-1} + \Upsilon_2 LQ1_{t-1} + \Upsilon_3 LMM_{t-1} + \Upsilon_4 CREPIB_{t-1} + \Upsilon_5 \Delta(RD)_{t-1} + u_t$$

### C.0.2. Modelo de Corrección de Errores

$$\begin{aligned} \Delta(LIK2)_t = & \alpha_0 + \alpha_1 \Delta(LIK2)_{t-1} + \alpha_2 \Delta(LQ1)_{t-1} + \alpha_3 \Delta(LMM)_{t-1} + \\ & + \alpha_4 \Delta(CREPIB)_{t-1} + \alpha_5 \Delta(RD)_{t-1} + \alpha_{LP} \hat{u}_t \end{aligned}$$

Donde como sabemos,  $\hat{u}_{t-1}$  corresponde al primer rezago de los residuos obtenidos en la regresión de Largo Plazo, y el parámetro  $\alpha_{LP}$  mide la velocidad de ajuste. Utilizamos un solo rezago, en función de lo indicado por los criterios de selección que pueden verse en el Panel (d) de la Figura C.37 en la página 210, donde también se encuentran los detalles de la estimación.

## D. Verificaciones Estadísticas

Este Modelo tiene en general un muy buen ajuste dado por la alta significatividad conjunta que alcanza un 'p-value' del estadístico 'F' prácticamente nulo:= 0,000000. A esto se suma un  $R^2 = 87,8\%$  y un  $\bar{R}^2 = 86,7\%$ , todo lo cual nos muestra una

muy buena estimación y un adecuado ajuste a los datos, como puede verse además en el gráfico de la Figura C.39.

## D.1. Modelo de Largo Plazo

Como ya dijimos en ocasiones anteriores, no son comunes en los modelos de estimación de la 'q' de Tobin, la presencia de  $R^2$  tan altos, así como tampoco que se verifique la ausencia de correlación, como en nuestro caso, que puede notarse a simple vista en el Panel (c) de la Figura C.37 en la página 210. Mucho menos aún, la detección de la presencia de variables cointegradas.

### D.1.1. Ecuación de Largo Plazo Estimada

$$\begin{aligned}
 LIK2_t = & -3,00 + 0,56 LIK2_{t-1} + 0,20 LQ1_{t-1} + 0,33 LMM_{t-1} - \\
 & (0,876) \quad (0,119) \quad (0,052) \quad (0,142) \\
 & - 0,001 CREPIB_{t-1} - 0,03 \Delta(RD_{t-1}) \\
 & (0,002) \quad (0,013) \\
 R^2 = & 0,8782 \quad \bar{R}^2 = 0,8667 \quad D.W = 1,63 \quad S.E.Reg = 1,035
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

La ausencia de autocorrelación también puede intuirse con el valor del estadístico de Durbin-Watson, que si bien no es aplicable porque la estimación emplea la variable dependiente rezagada, al ser de 1,63 cae (para  $T = 59$  observaciones y  $k = 5$  parámetros), en la zona de duda ubicada entre el límite inferior  $d_L = 1,408$  y el superior  $d_U = 1,767$ . En este tipo de modelos, este acercamiento es bastante auspicioso y en nuestro caso ha sido confirmado mediante la prueba de máxima verosimilitud de Breusch-Godfrey para un rezago, que es lo que hemos utilizado en la estimación, a partir de los ya mencionados criterios de selección<sup>20</sup>. Adicionalmente, las prueba para dos, tres, cuatro y cinco rezagos también rechazan la autocorrelación, incluso

<sup>20</sup> Pueden verse los resultados en el Panel (a) de la Figura C.40 en la página 212, donde vemos que se rechaza la presencia de autocorrelación utilizando un rezago

con mayor significatividad.

Resumimos a continuación los resultados de las comprobaciones estadísticas, cuyo detalle puede verse en la Sección C del Anexo C en la página 212:

- No se detecta correlación ni correlación espúrea.
- No se detecta heterocedasticidad.
- El parámetro del Mercado Meta es relevante y no es redundante.
- Los residuos de la regresión tienen Distribución Normal, por lo que puede realizarse inferencia con el Modelo.
- No se detecta colinealidad ni inflación de varianza, salvo entre LMM y CREPIB
- El Modelo está bien especificado.

## D.2. Modelo de Corto Plazo ECM

Conformes con nuestros resultados de largo plazo, vamos a analizar ahora el Modelo de Corrección de Errores para el corto plazo, cuyos resultados se muestran en el Panel (b) de la Figura C.37 en la página 210.

### D.2.1. Ecuación Estimada del Modelo de Corrección de Errores

$$\begin{aligned}
 \Delta(LIK2)_t = & 0,068 + 0,750 \Delta(LIK2)_{t-1} + 0,521\Delta(LQ1)_{t-1} - 2,398\Delta(LMM)_{t-1} + \\
 & (0,0464) \quad (0,2069) \quad (0,0716) \quad (1,5217) \\
 & + 0,003\Delta(CREPIB)_{t-1} - 0,015\Delta(RD)_{t-1} - 0,613 \text{Residuos\_LP}_{t-1} \\
 & (0,0023) \quad (0,0101) \quad (0,1804) \\
 R^2 = 0,6671 \quad \bar{R}^2 = 0,6279 \quad D.W = 1,657 \quad S.E.Reg = 0,592 \\
 & (3.9)
 \end{aligned}$$

Como podemos apreciar, el parámetro de velocidad de ajuste, correspondiente a ‘RESIDUOS\_LP(-1)’ resulta ser negativo, menor que ‘-1’ y significativo al 99 %, o sea que tiene las condiciones requeridas para que haya causalidad en el sentido de Granger en el largo plazo, desde las variables del modelo en su conjunto (LQ1,

LMM, CREPIB y  $\Delta RD$ ) hacia la variable dependiente, o sea, la relación de inversión a capital (I/K) en este caso.

También ese parámetro mide la velocidad de ajuste del Modelo entre el corto y el largo plazo, y el valor de ‘-0,61’ nos indica que en cada año la diferencia entre la relación de inversión a capital de corto plazo y la de largo plazo, se reduce en un 61 % de su discrepancia, *ceteris paribus*.

El Modelo de Corrección de Errores (ECM) nos muestra que, como resultan significativas  $\Delta(LIK2_{t-1})$  y  $\Delta(LQ_{t-1})$  también existe causalidad en el sentido de Granger, aunque ahora de corto plazo, desde la variable dependiente rezagada (lo cual es obvio), y desde la ‘q’ de Tobin hacia la relación de inversión a capital. Los ‘p-values’ de LMM, CREPIB y D(RD) resultan no significativos, por lo cual no existe causalidad en el sentido de Granger desde estas variables en el corto plazo.

Un análisis adicional de los resultados del ECM puede verse en el Cuadro C.4<sup>21</sup> en la página 214. En él se muestran todas las ecuaciones del Modelo de Corrección de Errores para cada una de las variables incorporadas, mostradas como vectores columna en el Cuadro. Las filas horizontales fueron divididas en tres grupo, además del encabezado.

El primer grupo corresponde a los coeficientes estimados en cada caso y sus respectivos ‘P-Value’. Destacamos que como estas estimaciones han sido realizadas mediante el “VEC Models” de Eviews basado en la técnica de Vectores Autorregresivos (VAR), difieren algunos valores de los estimados mediante la técnica de Engle-Granger de dos pasos que utilizamos anteriormente, a pesar de lo cual vemos que los signos de los parámetros estimados coinciden y los valores informados difieren proporcionalmente.

El siguiente grupo muestra las verificaciones de largo plazo referidas a que  $\hat{u}_{t-1} < 0$  y significativo, lo cual mostraría causalidad conjunta de largo plazo desde las variables del modelo [LQ1, LMM, CREPIB y  $\Delta(RD)$ ] hacia la variable dependiente ‘LIK2’. En las dos últimas filas del grupo se indica si hay causalidad o la variable del encabezado es exógena débil.

---

<sup>21/</sup> Agradezco a la Dra. María L. Garegnani, Jurado de esta Tesis, por haberme señalado la importancia de destacar este punto.

Cuadro 3.8: Principales Test Estadísticos del Modelo de Corrección de Errores

Objetivo	Test	Estadístico	p-value	Resultado
Autocorrelación	Breusch-Godfrey	$F_{1,50}$	0,0527	No Hay Autocorrelación
Autocorrelación	Breusch-Godfrey	$F_{2,49}$	0,0755	No Hay Autocorrelación
Autocorrelación	Breusch-Godfrey	$F_{3,48}$	0,1195	No Hay Autocorrelación
Heteroscedasticidad	Harvey	$F_{5,51}$	0,4283	Homoscedástico
Normalidad	Jarque-Bera	$\chi^2_2$	0,9463	Normalidad
Especificación	Ramsey RESET	$t_{50}$	0,9592	Bien Especificado

Valores VIF centrado:  $\Delta(LIK2_{t-1})=6,59$ ;  $\Delta(LQ1_{t-1})=1,19$ ;  $\Delta(LMM_{t-1})=5,62$ ;  
 $\Delta(CREPIB_{t-1})=1,40$ ;  $\Delta(RD_{t-1})=1,42$ ;  $RESIDUOS_{LP_{t-1}}=2,90$

El tercer grupo del cuadro muestra la significatividad individual medida por el test de Wald de nuestras variables de interés: la ‘q’ de Tobin (LQ1) y el Mercado Meta y (LMM), lo que nos indica si hay causalidad de corto plazo desde una de esas variables individuales hacia la variable dependiente.

El principal resultado que nos muestra este análisis está referido a la *exogeneidad débil* de todas las ecuaciones de corto plazo, salvo la primera correspondiente a la relación de inversión a capital, LIK2. Este hecho nos habilita para estimar el modelo de largo plazo para la relación de inversión a capital (LIK2 en nuestro caso), condicional a las variables explicativas LQ1, LMM, CREPIB y  $\Delta(RD)$ , ya que las mismas no ajustan las discrepancias entre el corto y el largo plazo en la ecuación.

Resumimos los principales resultados de las prueba realizados en el Cuadro 3.8, donde agregamos al pie los Factores de Inflación de la Varianza (VIF), que resultaron inferiores a siete para todas las variables<sup>22</sup>.

También analizamos la estabilidad estructural del Modelo, calculando los test ‘CUSUM’ y CUSUMQ’ que podemos ver en las Figuras C.41 en la página 213 y C.42 en la página C.42. En ambos casos los valores de la prueba en cada año, quedan

<sup>22</sup>/ Recordemos que valores del VIF centrado superiores a diez son un indicador de posibilidades de colinealidad.

dentro del área del 5% de significación, por lo que concluimos que el Modelo es dinámicamente estable.

## **E. Conclusiones de las Estimaciones Empíricas**

Finalizamos de esta forma el análisis de nuestro Modelo teórico, en el que hemos verificado que la velocidad de ajuste entre el corto y el largo plazo, alcanza al 61% en cada período para la estimación 1950-2010, valor este muy parecido al 69% hallado en la estimación con 25 observaciones de 1952 a 1976. En ambos casos además, se verifica causalidad en sentido de Granger de la 'q' de Tobin hacia  $(I/K)^2$  en el corto plazo. El resumen de los valores estimados y las principales pruebas estadísticas pueden verse en el Cuadro 3.9.

A diferencia de otras evaluaciones del modelo tradicional donde es tan común la correlación, nuestras estimaciones han demostrado que incluyendo expresamente el Mercado Meta logramos coingtegrar las variables, lo que nos permitió obtener resultados más sólidos.

De esta manera, llegamos a obtener una mejor estimación de la relación de inversión a capital en Estados Unidos, con buen comportamiento, bondad de ajuste y estabilidad estructural, incluso para el período de 61 años de 1950-2010. Para ello ha sido una pieza fundamental la inclusión del Mercado Meta que además de haber resultado una variable estadísticamente significativa, actuó como catalizador de la cointegración de las variables, con los beneficios que ello trajo aparejado.

Por otra parte, la verificación de exogeneidad débil en todas las variables del modelo con respecto a la relación de inversión a capital, nos permitió realizar una estimación condicional de nuestro Modelo Ampliado cointegrado.

Como también ha sido posible establecer la velocidad de ajuste entre el corto y el largo plazo, nuestro Modelo ha coincidido con el hecho estilizado referido a que la relación de inversión a capital ajusta paulatinamente a lo largo del tiempo, mayormente sin movimientos instantáneos en la economía. Las variables del Modelo (q, Mercado Meta, Crédito a PIB y delta tasa de interés), mientras tanto, mostraron

precedencia conjunta hacia  $(I/K)$ .

En el corto plazo, la causalidad en sentido de Granger sólo pudo ser verificada desde la 'q' de Tobin hacia la relación de inversión a capital, mientras que para el resto de las variables explicativas no resultó significativa.

Este resumen de beneficios nos permite afirmar que el Modelo Ampliado con el Mercado Meta supera ampliamente los resultados econométricos que brindaba tradicionalmente la especificación de la 'q' de Tobin sin MM.

Cuadro 3.9: Resumen de Resultados de los Modelos Estimados

Variable	LIK2 1952/76		LIK2 Modelo Cointegrado 1952/76			LIK2 Modelo Cointegrado 1950-2010			
	Coefficiente	P-Value	Largo Plazo Coeficiente	Corto Plazo Coeficiente P-Value		Largo Plazo Coeficiente P-Value		Corto Plazo Coeficiente P-Value	
C	-7,65	0,000	8,272	-0,024	0,697	-3,002	0,001	0,068	0,149
$LIK2_{t-1}$						0,562	0,000		
LQ	0,355	0,016	0,416						
LQ1						0,20	0,0003		
LMM	0,986	0,000	1,114			0,334	0,0229		
CREPIB						-0,003	0,109		
$\Delta RD_{t-1}$						-0,026	0,046		
DU58	-0,322	0,007		-0,06	0,333				
DU75	-0,304	0,002		-0,148	0,055				
$\hat{u}_{t-1}$				-0,693	0,056			-0,6129	0,0013
$\Delta LIK2_{t-1}$				-0,298	0,467			0,75	0,0007
$\Delta LIK2_{t-2}$				-0,412	0,389				
$\Delta LQ1_{t-1}$				0,491	0,001			0,521	0,0000
$\Delta LIQ1_{t-2}$				0,019	0,911				
$\Delta LMM_{t-1}$				1,337	0,3542			-2,398	0,1213
$\Delta LMM_{t-2}$				1,535	0,377				
$\Delta CREPIB_{t-1}$								0,0028	0,2284
$\Delta(\Delta RD_{t-1})$								-0,015	0,1421
$R^2$ %	81,68		79,40	79,40		87,62		66,71	
$\bar{R}^2$ %	78,03		63,95	63,95		86,67		62,79	
D W	2,06		1,693	1,693		1,628		1,657	
Correlación (1 lag)	0,729	no		0,2138	no	0,053	no	0,0527	no
Correlación (2 lag)	0,219	no		0,5039	no	0,0756	no	0,076	no
Heterocedástico	0,826	no		0,0966	no	17,01	no	0,4283	no

## Capítulo 4

### Conclusiones de la Tesis

El desarrollo de esta Tesis, referida a la importancia de considerar el tamaño del Mercado Meta en las decisiones de inversión empresarial, nos ha demostrado que es preferible introducir explícitamente el tamaño del mercado potencial en la ecuación de inversión, a fin de poder estimar adecuadamente el monto de la misma.

También nos ha mostrado que la correcta estimación de la relación de inversión a capital, debería incluir tanto a la 'q' de Tobin como al Mercado Meta como variables explicativas, además de otras como la tasa de interés.

En este sentido hemos deducido que los estudios que incluyen mercados del producto monopólicos o de competencia monopolística, tienen mejores resultados empíricos gracias a la consideración del mercado dentro del modelo estimado. (Schiantarelli and Georgoutsos, 1990) por ejemplo, proponen un modelo de competencia imperfecta que alcanza mejores resultados que sus similares de competencia perfecta, y no registra autocorrelación. En este sentido (Schaller, 1990) indica que adicionalmente los problemas de agregación de la economía también causan inconvenientes en la estimación.

Otras alternativas estudiadas, desarrollan los llamados modelos aumentados' que incorporan variables adicionales a la 'q' de Tobin, logrando mejorar los resultados. Como mencionamos oportunamente, en muchos casos la combinación de algunas variables haría de 'proxi' del Mercado Meta, reemplazándolo. Al respecto, hemos

visto que la alta correlación entre el Mercado Meta, la tasa de interés y la relación de crédito a GDP, producían este efecto.

En un sentido más amplio, parece que los diferentes análisis y estimaciones han quedado sujetos, algunos más y otros menos, al supuesto de comportamiento precio aceptante del empresario, incluyendo una demanda ilimitada para la venta de la producción.

Una vez resuelta esta aparente contradicción, incorporando la restricción del tamaño del mercado como mecanismo para determinar el nivel de producción en nuestro Modelo, arribamos a una solución que nos llevó a obtener una mejor estimación de la relación de inversión a capital en Estados Unidos, gracias entre otros a los siguientes conceptos:

1. Tiene buena bondad de ajuste,
2. Tiene un buen comportamiento teórico y econométrico,
3. El Mercado Meta es relevante, teórica y estadísticamente,
4. Es estable, tanto teórica como estructuralmente,
5. Verifica cointegración de las variables y mejora la estimación,
6. Resulta importante la inclusión tanto del Mercado Meta como de la 'q' de Tobin,
7. Las dudas sobre cointegración y cambio estructural se reducen al incluir observaciones adicionales (USA 1950-2010)
8. Tanto si aceptamos la cointegración como si la rechazamos, obtenemos conclusiones interesantes:

a) Si **aceptamos la cointegración**,

▪ Largo Plazo:

- hay causalidad conjunta de la ecuación cointegrada  $\alpha(1 - \Upsilon_1 LQ_{t-1} - \Upsilon_2 LMM_{t-1} - \Upsilon_o)$  hacia la variable dependiente 'LIK2' ( $= \ln \left( \frac{I}{K} \right)^2$ )
- Las discrepancias entre el corto y el largo plazo para 1950-2010 se reducen un 61 % en cada año, *ceteris paribus*

- Corto Plazo: hay causalidad en el sentido de Granger de la 'q' de Tobin hacia la relación de inversión a capital

- b) Si **rechazamos la cointegración**, la prueba de Granger determina causalidad de la tasa de interés hacia la 'q' de Tobin y de esta hacia el Mercado Meta y la relación de Inversión a Capital, como puede apreciarse en la Figura 1.3 en la página 33. Además, también hay causalidad en el sentido de Granger del Mercado Meta hacia (I/K), aunque con menor significación estadística (ver Figura 3.3 en la página 98).
9. En este último aspecto, podría pensarse que hay una cadena de transmisión en función de la velocidad de reacción de cada mercado, actuando primero el cambio de tasas proveniente del mercado financiero, siempre más veloz que el mercado real donde se encuentran la inversión y el stock de capital, pasando a través de la 'q' de Tobin como vehículo intermedio, que vincula el mercado de capitales con el stock de capital

Como vemos, si rechazamos la cointegración, las relaciones de causalidad existen y la importancia de incluir el Mercado Meta explícitamente en la estimación queda justificada por la 'precedencia', a decir de (Maddala and Kim, 1998), del Mercado Meta hacia la relación de inversión a capital.

Cuando aceptamos la existencia de cointegración, algo que quedó estadísticamente verificado en los dos períodos estudiados para Estados Unidos, podemos afirmar que en el largo plazo las variables del Modelo en su conjunto tienen causalidad en el sentido de Granger hacia la relación de inversión a capital.

## **I. Caminos de Investigación**

Comprobada la importancia de incluir el Mercado Meta en el Modelo de la 'q' de Tobin, quedan sin embargo varias líneas de investigación abiertas, que sólo mencionaremos dado que se encuentran fuera del objetivo que nos planteamos en esta Tesis.

Como se verá, cada punto debería ser desarrollado en extenso para poder justificarlo acabadamente. Dado que se tratan tan sólo de impresiones y puntos de vista subjetivos, trataremos de ser lo más breves que sea posible.

1. Racionamiento de capital. Basándonos en (Fazzari et al., 1987), nuestro análisis dejó de lado las limitaciones de financiamiento, dado que por haber analizado la economía estadounidense, este argumento podía ser obviado. Sin embargo, para economías que no cuentan con un mercado de capitales tan desarrollado, puede ser conveniente incorporar esta restricción. Como ya hemos dicho, el tamaño del mercado accesible y el margen de ganancia influyen en el flujo futuro de fondos, mejorando (o no) el financiamiento del proyecto de inversión.
2. Mercados no competitivos. Verificar el comportamiento del Modelo en mercados de competencia imperfecta es todo un desafío de imaginación y trabajo.
3. Tiempo Discreto. A fin de facilitar la búsqueda de soluciones analíticas del Modelo Ampliado, utilizamos ecuaciones en tiempo continuo y la Teoría del Control Óptimo en la solución. El planteo de las ecuaciones en tiempo discreto y su solución mediante Programación Dinámica podría permitir mejorar la visión de los saltos en las condiciones iniciales y las variables endógenas<sup>1</sup>.
4. Incertidumbre. Nuestro Modelo fue planteado y resuelto en condiciones de certeza. Agregar el comportamiento bajo situaciones de incertidumbre podría ser un paso muy interesante para el desarrollo de la teoría.
5. Precios. Hemos considerado en nuestro análisis una economía de precio único, pero podría estudiarse de qué manera influye el margen de ganancia (y la apropiación del mismo), a partir de las influencias que impone la realidad sobre esta variable. Lo que decimos es que, fijado un precio de venta en un mercado (competitivo o no), habrá una serie de costos de acceso que pueden ser de tipo económico (como el transporte, los términos de intercambio, etc.), así como no económico (aranceles, barreras, etc), y que influyen directamente en el margen de rentabilidad empresarial.
6. Cambio Tecnológico. Agregar el cambio tecnológico así como el crecimiento I+D también será un factor enriquecedor del Modelo.

---

<sup>1</sup>/ Agradezco al Dr Damián Pierri haber señalado este punto durante el proceso de defensa de la Tesis.

7. Teoría del Crecimiento Económico. Verificar el impacto del Mercado Meta en la tasa de crecimiento de largo plazo y ver si arroja alguna explicación adicional acerca del Residuo de Solow, puede ser una alternativa muy interesante.
8. Modelo de Equilibrio General. La teoría de la 'q' de Tobin es un modelo de equilibrio parcial, que ha sido incluido en estudios de equilibrio general como el de (Blanchard, 1981b), entre otros. Incorporar la 'q' de Tobin con el Mercado Meta en un modelo de equilibrio general podría mejorar la estimación del mismo y agregar nuevos criterios de análisis para algunos sucesos.
9. Estimación del tamaño del Mercado Meta. La aproximación al tamaño del Mercado Meta mediante el GDP ha sido facilitada en gran medida por el tipo de economía estudiada. En economías más pequeñas, o aquellas más vinculadas al comercio internacional que dependan de otros factores, puede ser necesario incluir una medición más precisa y ajustada del tamaño del Mercado Meta.
10. Nuevas Variables. Nuestra estimación ha resultado muy satisfactoria, pero es posible que hubiera que estudiar si es necesario agregar otras variables que resulten relevantes para el Modelo.
11. Cambios de Parámetros. Hemos visto las dificultades de medición que se producen ante los cambios de parámetros en las economías a lo largo del tiempo. Un estudio más pormenorizado al respecto podría ser importante.
12. Mercado de Trabajo. Incorporar el funcionamiento del mercado laboral puede permitir un mejor ajuste del modelo, en función de la inversión planeada y el impacto de este costo de producción.
13. Efectos Impositivos. Hemos planteado nuestro Modelo sin impuestos ni subsidios, y sabemos que ambos son muy relevantes a la hora de decidir una inversión a largo plazo. Si bien su inclusión no debería alterar los resultados cualitativos, la incorporación al Modelo lo enriquecería sustancialmente.
14. Desarrollo Económico. Hemos visto que el acceso y tamaño del mercado objetivo es importante para definir el monto de la inversión. Sabemos además que la inversión es a su vez fundamental para determinar el crecimiento del

producto y por lo tanto, el desarrollo económico. En este sentido, podría estudiarse el efecto que tiene en el desarrollo económico el tamaño del mercado al que se tiene acceso.

15. Comercio Mundial. Relacionado con lo anterior, sería útil estudiar las barreras al comercio internacional y sus efectos, desde un punto de vista que incluya el acceso al Mercado Meta como una variable también determinante de la inversión.
16. Estimación Bayesiana. A partir de los buenos resultados empíricos obtenidos, podría resultar interesante realizar una estimación bayesiana del Modelo

## II. Aplicaciones a la Teoría Económica

Nuestro Modelo tiene aplicación directa en la teoría económica, tanto desde lo teórico como desde lo empírico, toda vez que completa, a nuestro entender, una teoría que no podía ser verificada adecuadamente en la práctica.

En este aspecto, la mejora en la explicación que se le da al modelo de la 'q' de Tobin acerca de la inversión es directa. Hemos agregado el objetivo que tiene en mente el empresario a la hora de invertir, calculando la cantidad de unidades producidas que podrá vender y el beneficio neto que le brindará cada una, completando así el modelo de Tobin.

De esta manera el inversor que maximiza su beneficio, verá cuál es el tamaño del mercado potencial al cual puede servir, analizará cuál será el precio de acceso a ese mercado y calculará el beneficio por cada unidad vendida. Si el flujo futuro de ganancias descontadas es superior al monto a invertir, el empresario pasará al estadio siguiente, en el que verá cómo financiar la inversión.

Nuestro Modelo, al incorporar el tamaño del mercado explícitamente, también brinda los elementos indispensables a la hora de obtener resultados empíricos. En este sentido, la existencia de cointegración detectada para el caso de Estados Unidos entre las variables del Modelo, se produjo a partir de incluir el Mercado Meta en las

estimaciones econométricas. Esto a su vez, no sólo mejoró la bondad de ajuste, sino que evitó la autocorrelación de los residuos de la regresión

### **III. Aplicaciones a la Política Económica**

El aporte de este Modelo a la política económica también es importante. Si bien puede ser poca su influencia en la política monetaria, tiene mucho para aportar sobre la política fiscal, el desarrollo y el crecimiento económico.

Al saber que el tamaño del mercado es importante, tanto las alícuotas impositivas como los subsidios a la inversión deberían enfocarse en no impedir el acceso al mercado, a la vez de promover la ampliación del mismo.

Una política de desarrollo económico, por ejemplo, debería contemplar la ampliación de las posibilidades de venta de la producción, tanto con el desarrollo de mercados externos de consumo como a través del acceso de los productores a los mercados locales de consumo.

Lo hemos mencionado pero es bueno repetirlo, la infraestructura de transporte y comunicaciones en general, puede ser un punto central en este aspecto. Si llegar al mercado no es posible por efectos climáticos, o por excesivos costos logísticos, los empresarios deberán realizar sus inversiones en la cercanía de los mercados de consumo. Una política de desarrollo equilibrado debería llevar a contemplar este aspecto.

Pero si la producción fuera hacia la exportación, el acceso a los puertos de embarque con costos competitivos también tendrá influencia, dado que como dijimos en nuestra definición de Mercado Meta en la Sección I. A del Capítulo 3 en la página 42, el margen de ganancia empresaria deberá ser ‘adecuado’, y si los costos internos reducen ese margen, pueden hacer desaparecer la oportunidad de inversión, con el consecuente resultado en el resto de las variables económicas.

Un aspecto adicional que también podría sostenerse en la necesidad de un mercado interno lo más grande posible, es el de una política de distribución del ingreso en línea

con aquellos segmentos de consumo que se quiera desarrollar. En otras palabras, si se quiere impulsar el desarrollo de una actividad que debería apoyarse en el consumo interno, ese impulso que le fuera a dar la política económica mediante incentivos de algún tipo, podría estar alineado con la existencia del mercado al cual se está apuntando, sea local o externo.

Finalmente, nuestro Modelo también muestra que podría ser útil para actualizar las políticas de fomento del desarrollo que llevan adelante los organismos multilaterales de crédito, toda vez que la sola asistencia crediticia pareciera ser insuficiente en países subdesarrollados, por lo que podría complementarse con la búsqueda de acceso a los mercados de consumo mundiales.

# ANEXOS

# A

## Anexo A: Conceptos Preliminares

A fin de evitar repetir en cada punto las características teóricas que sustentan los razonamientos aplicados, algo que volvería tediosa la lectura tanto de aquel que ya conoce la teoría como de quienes quieren seguir el razonamiento intuitivo, hemos optado por agregar en este Capítulo los principales conceptos teóricos con una muy breve explicación de los mismos, y referencias bibliográficas para quien desee profundizar su estudio.

### I. Teoría del Control Óptimo

La teoría del Control Óptimo puede ser vista como una ampliación del Cálculo de Variaciones, en la cual se permite abordar de manera más simple, la incorporación de restricciones en las ecuaciones diferenciales involucradas, como puede ser por ejemplo, la condición de no negatividad en la producción.

Con una potencia similar a la de la Programación Dinámica, que resulta más adecuada para considerar problemas estocásticos con ecuaciones en tiempo discreto, el Control Óptimo es más abarcativo al no requerir que el Optimal sea continuamente diferenciable, que es el supuesto básico de la Programación dinámica<sup>1</sup>.

Asimismo, ambos métodos son distintos al enfrentar el problema (Intriligator, 1973), ya que mientras la Programación Dinámica lleva a una ecuación diferencial parcial no lineal, el Control Óptimo se resuelve mediante dos conjuntos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Además, el Principio del Máximo resulta ser en general más productivo dado que divide la ecuación de Bellman en dos etapas, encontrando primero los controles óptimos en función de las variables de coestado, para luego hallar las trayectorias temporales de estas últimas.

Por lo tanto, si bien en resoluciones numéricas la Programación Dinámica puede ser preferible, en soluciones analíticas el Principio del Máximo es generalmente más útil (Intriligator, 1973), por lo que se ha preferido utilizar este enfoque en el desarrollo de esta Tesis.

---

<sup>1</sup>/ Como veremos en breve, el Optimal es la función objetivo a maximizar.

## A. Principio del Máximo

El problema general de control (Intriligator, 1973) puede plantearse como :

$$\begin{aligned}
 \underset{u_t}{Max} \quad \mathbf{F} &= \int_{t_o}^{t_1} \mathbf{f}_o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt + F(\mathbf{x}_1, t_1) \\
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\
 \mathbf{x}(t_o) &= \mathbf{x}_o \\
 \mathbf{x}(t_1) &= \mathbf{x}_1 \\
 \{\mathbf{u}(t)\} &\in \mathbf{U}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Siendo:

$\mathbf{f}_o$	funcional objetivo a optimizar
$\mathbf{F}$ , $\mathbf{f}_o$ y $\mathbf{f}$	funciones continuas y diferenciables
$\mathbf{x}$	vector de variables de estado
$\mathbf{u}$	vector de variables de control
$t_o, t_1, x_o, x_1$	parámetros dados
$\{\mathbf{u}(t)\}$	trayectoria de control
$\mathbf{u}(t)$	función continua a intervalos de tiempo, cuyos valores deben pertenecer a $\Omega$ , un subconjunto dado de Reales no vacío y compacto
$\mathbf{U}$	conjunto de control

En forma vectorial, definimos la *función hamiltoniana* o el Hamiltoniano a secas, al que denominaremos ' $\mathbf{H}$ ', como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \equiv p_o \mathbf{f}_o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{p} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{A.2}$$

O sea que el Hamiltoniano equivale a la suma del integrando del funcional objetivo ( $f_o$ ) y el producto interno del vector de variables de coestado ( $\mathbf{p}$ ) por el vector de funciones de tasas de variación de las variables de estado ( $\mathbf{f}$ ). Las condiciones necesarias de *Pontryagin* para un máximo vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 \max_{\{u \in \Omega\}} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \quad \forall t, \quad t_o \leq t \leq t_1 \\
 \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad t_o \leq t \leq t_1 \\
 \mathbf{p}(t_1) &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Cuando el funcional objetivo interpreta un valor económico como puede ser la función de beneficios empresarios, y la variable de estado también tiene dimensión económica (como la restricción de capital), entonces la variable de coestado ' $\mathbf{p}$ ' toma la forma de un precio sombra, que mide la variación marginal de los beneficios óptimos que se generan desde ' $t$ ' hasta  $t_1$ , producidos por la variación en el stock de capital. En términos más amplios (y precisos), la variable de coestado mide la va-

riación marginal que se produce en el funcional objetivo ante cambios en la variable de estado

## B. Principio del Máximo y Condiciones Suficientes para Hamiltoniano Valor Presente con Horizonte Infinito y Restricciones Mixtas

Resulta razonable resumir las características del Principio del Máximo para su aplicación en los casos que desarrollamos en esta Tesis. De esta manera, para la optimización de funcionales objetivo que tienen tasa de actualización (o descuento), y horizonte temporal infinito, podemos plantear <sup>2</sup> :

### B.1. Planteo del Problema

Vamos a asumir que existe una función vectorial ‘ $\mathbf{u}$ ’ de controles  $u(t) = u_1(t), \dots, u_r(t)$  continua por partes que tiene asociado un vector  $\mathbf{x}$  de funciones de estado  $x(t) = x_1(t), \dots, x_n(t)$ , definidas en el intervalo de tiempo  $[t_o, t_1]$ , y que se cumplen las ‘Condiciones de Regularidad’ de las funciones  $f_i$ .

En base a ello, vamos a considerar el Problema siguiente:

$$\begin{aligned}
 CU \text{ Optimo}_{t \rightarrow \infty} & \quad \int_0^{\infty} e^{-rt} \mathbf{f}_o(x_{i\tau}, u_{j\tau}, \tau) d\tau & \quad \text{con } i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, r \\
 \text{Sujeto a :} & & \\
 \dot{x}_i(t) & = f_i(x_{it}, u_{jt}, t) & \quad x_i(t_o) = x_i^o \\
 u_j(t) & \in \mathbf{U}, \text{ conjunto convexo en } \mathbb{R}^n & \\
 h_k(x_{it}, u_{jt}, t) & \geq 0 & \quad k = 1, \dots, s \\
 \\ 
 \text{Condiciones de Transversalidad} & & \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) & = x_i^1 & \quad i = 1, \dots, l \\
 \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} x_i(t) & \geq x_i^1 & \quad i = l + 1, \dots, m \\
 \text{sin restricción cuando } t \rightarrow \infty & & \quad i = m + 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Para obtener las condiciones necesarias, deberemos además computar la cualificación de las restricciones mixtas que apliquen a todo  $t \geq 0$ . La cualificación es una condición impuesta al rango de la matriz de derivadas parciales de las funciones de restricción ‘ $h_k$ ’ con respecto a los controles ‘ $u_j$ ’, y se mide sobre aquellas que están activas en cada par óptimo, formando dos grupos (uno identificado por ‘+’ y el otro por ‘-’) para cada situación. Para ello definimos la matriz de derivadas ‘ $\bar{\mathbf{M}}$ ’ como:

<sup>2/</sup> Las condiciones de transversalidad en los problemas con horizonte infinito dejan de ser condición necesaria al aplicar el Principio del Máximo, dado que ya no pueden derivarse del momento final del período (dado que  $t_1$  se convierte ahora en  $\infty$ ). No obstante esto, la condición de transversalidad mantiene un papel central como condición suficiente para la aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin (De la Fuente, 2000), página 577.

$$\bar{M}(t) = \left[ \frac{\partial h_k(x_t^*, u_t^*, t)}{\partial u_j} \right]$$

Las restricciones califican si la Matriz ‘ $\bar{M}$ ’ tiene un rango igual al número de restricciones activas de su grupo, esto es, los rangos de  $\bar{M}^+(t)$  y  $\bar{M}^-(t)$  deben coincidir con:

$$\begin{aligned} \bar{M}^+(t) &= \left[ \frac{\partial h_k(x_t^*, u_{t+}^*, t)}{\partial u_j} \right] = \text{Número de restricciones activas} \\ \bar{M}^-(t) &= \left[ \frac{\partial h_k(x_t^*, u_{t-}^*, t)}{\partial u_j} \right] = \text{Número de restricciones activas} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

El sentido de esta restricción es que los gradientes con respecto a los controles ‘u’ de todas las restricciones mixtas activas en un par óptimo, sean linealmente independientes.

Para aplicar esta *cualificación de las restricciones* tenemos dos caminos:

- buscamos todos los pares admisibles para los que no se cumple la cualificación de las restricciones en algún punto y luego verificamos las condiciones necesarias y las de cualificación en los puntos que las cumplen; o bien
- primero buscamos los pares admisibles en los que se cumplen las condiciones necesarias y de ellos seleccionamos aquellos que cumplen la cualificación de restricciones mixtas

Para el problema planteado en A.4 definimos el Hamiltoniano Valor Presente como:

$$\mathcal{H} = p_o f_o [x_i(t), u_j(t), t] + \sum_{i=1}^n q_i f_i [x_i(t), u_j(t), t]$$

y el Lagrangiano Generalizado se forma sumando las restricciones mixtas ponderadas por el multiplicador  $\mu_k$  al Hamiltoniano, y será:

$$\mathbf{L} = p_o f_o [x_i(t), u_j(t), t] + \sum_{i=1}^n q_i f_i [x_i(t), u_j(t), t] + \sum_{k=1}^s \mu_k h_k [x_i(t), u_j(t), t]$$

## B.2. Condiciones Necesarias

Si las funciones  $f_i(x_{it}, u_{jt}, t)$  y sus primeras derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  son continuas con respecto a las  $n+r+1$  variables<sup>3</sup>, y las funciones  $h_k (k = 1, \dots, s)$  son funciones continuas en  $(x, u, t)$  y sus derivadas  $\frac{\partial h_k}{\partial x_i}$  y  $\frac{\partial h_k}{\partial u_i}$  existen y son funciones continuas de  $(x, u, t)$ , entonces existirá un número  $f_o$ , funciones vectoriales  $q_i(t)$  y  $\mu_k(t)$  todas

---

<sup>3</sup>/ No se requiere la diferenciabilidad con respecto a las variables de control ( $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ ) cuando se cumplen las condiciones de suficiencia de Arrow, por lo que cuando  $u(t)$  es discontinua y la derivada no existe, se producirá un ‘pliegue’

con límites laterales que se satisfacen cuando  $t_1 \rightarrow \infty$  y además se cumple que  $p_o \neq q_1$  y  $p_o = 0$  ó  $p_o = 1$ , entonces se verifican las siguientes condiciones necesarias:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x_{it}^*, u_{jt}^*, q_{it}, t) &\geq \mathcal{H}(x_{it}^*, u_{jt}, q_{it}, t) \text{ tal que } h_k(x_{it}^*, u_{jt}, t) > 0 \quad \forall u_j \\
\frac{\partial L^*(x_t^*, u_t^*, q_t, \mu_t, t)}{\partial u_j^*} &= 0 && j = 1, \dots, r \\
\mu_k(t) &\geq 0 \quad (\text{= 0 si } h_k(x_t^*, u_t^*, t) > 0) && \text{Holgura Complementaria} \\
&&& k = 1, \dots, s \\
\dot{q}_i(t) &= r q_i - \frac{\partial L^*(x_{it}^*, u_{jt}^*, q_{it}, \mu_{kt}, t)}{\partial x_i}; i = 1, \dots, n; && \text{para todo 't'} \\
\dot{x}_i(t) &= f_i [x_i^*, u_j^*, t], \text{ con } x(0) = x_o && \\
\end{aligned} \tag{A.6}$$

### B.3. Condiciones de Suficiencia para Optimalidad Convergente

**B.3.1. Suficiencia de Mangasarian** Si se verifica que:

$$\begin{aligned}
H(x, u, q, t) &\text{ es cóncava en } (x, u) \quad \forall t \geq t_o \\
h_k(x, u, t) &\text{ es cuasicóncava en } (x, u) \quad \forall t \geq t_o
\end{aligned}$$

y la Condición de Transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty}^{(\text{inferior})} q(t) [x(t) - x^*(t)] \geq 0 \quad \text{para todos los estados admisibles } x(t) \tag{A.7}$$

Y además,

1. Si existen funciones  $q(t)$ , continuas por tramos y diferenciables con saltos en los puntos  $\tau$ , tal que  $t_o < \tau_1 < \dots < \tau_N$
2. El conjunto de restricciones  $\mathbf{U}$  es convexo,
3. Existen funciones continuas por tramos  $\mu(t)$  que se satisfacen con  $p_o = 1$ ,
4. Se cumplen las condiciones necesarias (A.6).

Entonces  $[x^*(t), u^*(t)]$  son CU-Optimales y no se requiere la cualificación de las restricciones<sup>4</sup>.

**B.3.2. Suficiencia de Arrow** Las Condiciones Suficientes de Mangasarian para un máximo requieren como punto central la concavidad del Hamiltoniano. Cuando ello no sucede, se puede recurrir a las condiciones suficientes del tipo de Arrow que,

---

<sup>4</sup>/ Nótese como las Condiciones Terminales han pasado a ser suficientes, en lugar de necesarias

con las mismas condiciones necesarias citadas en (A.6) y sin requerir la cuasiconcavidad en  $(x,u)$  de las restricciones mixtas, define el Hamiltoniano Maximizado como :

$$\widehat{H}(x, q, t) = \text{Max} \{H(x, u, q, t) : u \in U(x, t)\} \quad (\text{A.8})$$

Donde  $U(x, t) = \{u \in \mathbb{R}^r : h_k(x, u, t) \geq 0, k = 1, \dots, s\}$

También se define el conjunto  $A_1(t)$  de la manera siguiente:

$$A_1(t) = \{x : \text{para algún } u, : h_k(x, u, t) \geq 0, k = 1, \dots, s\}$$

Ahora, si se verifican las cualificaciones de las restricciones (ya no para todo 't' sino para 'casi todo t', o sea v.e.  $t \in [t_o, t_1]$ ), y si el Hamiltoniano Maximizado coincide con el que incorpora el control óptimo (vet), entonces se verifica que si  $A_1(t)$  es convexo, entonces  $\widehat{H}(x, q, t)$  es cóncavo y  $[x^*(t), u^*(t)]$  son CU-Optimales<sup>5</sup>.

Finalmente, notemos que también podemos aplicar esta condición suficiente cuando sabemos que el Hamiltoniano es cóncavo en  $(x,u)$  y se verifican las condiciones necesarias y la cualificación de las restricciones, sin necesidad de requerir que el conjunto  $A_1(t)$  sea convexo ni que las restricciones mixtas sean cuasicóncavas en  $(x,u)$ .

## II. Algunos Aspectos de la 'q' de Tobin

### A. El Crecimiento del Capital en el Modelo

La presentación más difundida de la 'q' de Tobin, que reproducimos a continuación, plantea por parte del empresario la maximización de la función de valor de la empresa, que viene representada por los beneficios futuros descontados y cuyas variables pueden verse en el Cuadro A.1.

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} \int_0^{\infty} e^{-r(t)} \langle (1 - \tau) \{[K(t), L(t)] - w L(t)\} - (1 - v) I(t) \rangle dt \\ & I(t), L(t)_{0 \leq t \leq \infty} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

*sujeto a*

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= \Psi [I(t), K(t)] - \delta K(t) \\ K(0) &= \bar{K}_o \end{aligned}$$

Al plantear la maximización de la ecuación A.9 es importante explicitar qué estamos haciendo cuando aplicamos el Principio del Máximo. Es que lo que nos dirá la solución formal, en términos genéricos, es que si encontramos las trayectorias óptimas de la inversión 'I\*(t)' y de los insumos 'L\*(t)', continuas a trozos, y la trayectoria óptima de la variable de estado 'K\*(t)', entonces habrá una función vectorial continua 'λ\*(t)' que verifica las dos condiciones necesarias que vimos en el Punto anterior, y cumple que la trayectoria del estado óptimo es función de los controles óptimos, o

<sup>5</sup>/ Ver (Seierstad and Sydsaeter, 1986), Sección 4.3

Cuadro A.1: Variables y Parámetros de la ‘q’ de Tobin

Nombre		Descripción
Variables		
$\Psi(t)$	=	Costo de instalación de la inversión
$\Pi(t)$	=	Beneficio empresarial
$q(t)$	=	‘q’ de Tobin. Variable de coestado del Principio del Máximo
$q(t)^{Mg}$	=	‘q’ de Tobin o marginal, no observable
$q(t)^{Me}$	=	‘q’ media, observable
$w$	=	Salario (fijo)
$F [K(t), L(t)]$	=	Función de Producción
$I(t)$	=	Flujo de inversión en capital nuevo
$K(t)$	=	Stock de capital físico instalado
$L(t)$	=	Cantidad de mano de obra utilizada
$P$	=	Precio del producto de la empresa (=1)
$P^I$	=	Precio de los bienes de capital (=1)
$Y(t)$	=	Producción agregada
Parámetros		
$\delta$	=	Tasa de depreciación
$\tau$	=	Alícuota del impuesto a las ganancias
$v$	=	Alícuota del subsidio a la inversión
$V(0)$	=	Valor de la firma representativa en el momento ce- ro

sea:

$$\dot{K}(t)^* = \Psi [I(t)^*, K(t)^*] - \delta K(t)^*$$

Sin entrar en los detalles matemáticos, que no son el punto que queremos explicitar ahora, podemos ver que estamos realizando una maximización de la función de valor de la empresa (dada por su función de producción menos los costes asociados), restringiendo la evolución de la formación del stock de capital al comportamiento de una función de costos de inversión genérica.

Todo lo dicho está muy bien, pero nada impide en este planteo que el stock de capital pueda crecer indefinidamente, ya que mientras cumpla con la restricción de la función de costos de instalación, podría incrementarse sin límite, lo mismo que la función de producción. Esto es lo que a nuestro entender sería el motivo principal de la falta de verificación empírica de la ecuación de la 'q' de Tobin, ya que en la realidad económica, el empresario invierte siempre que espere obtener una ganancia, y eso implica evaluar cuál será la cantidad de unidades vendidas del producto a producir, y a qué precio.

Es por eso que decimos que el modelo de la 'q' de Tobin en realidad aplica suponiendo que la decisión de inversión ya fue tomada, y por lo tanto se focaliza en la forma de financiamiento de la misma (mediante la emisión de acciones o bonos, en términos generales).

Bajo este enfoque, decir que el empresario sólo necesita conocer la 'q' para tomar su decisión es correcto, ya que se refiere a la forma de financiar una decisión de inversión que ya fue tomada.

Este es un punto neurálgico de la Tesis, ya que lo que vamos a realizar en el próximo capítulo es la inclusión de una restricción que limite ese potencial crecimiento sin límite del stock de capital, lo que va a servir para complementar el modelo de la 'q' de Tobin ampliando su concepto. Como veremos en el capítulo subsiguiente, nuestra complementación también va a permitir estimar econométricamente la relación de inversión a capital (I/K), con mejor bondad de ajuste y menores problemas de autocorrelación.

## **B. Indeterminación de la Función de Oferta**

Un aspecto adicional que debemos notar, es que bajo los supuestos generalmente aplicados en la teoría de la 'q' de Tobin<sup>6</sup>, la función de beneficios no estará bien definida y puede que no quede acotada. Esto es lo que habíamos anticipado en la Introducción (ver Sección III.B en la página 23), y se refiere a que el nivel de producción podría crecer indefinidamente, ya que cuanto más produce el empresario, mayor será su beneficio.

---

<sup>6</sup>/ Esto es, función de producción y función de costos de ajuste de la inversión homogéneas de primer grado, y economía competitiva.

Podemos verificar esta afirmación, siguiendo a (Varian, 1980), y considerando una función de producción con rendimientos constantes a escala, que verifica por lo tanto que, para  $t \geq 0$  y un vector de factores de producción ' $\mathbf{x}$ ':

$$f(t\mathbf{x}) = t \cdot \mathbf{x}$$

La ecuación de beneficios vendrá representada por  $\pi = p \cdot f(\mathbf{x}) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$ , donde ' $p$ ' es el precio del producto y  $\mathbf{w}$  el vector de precios de los insumos. Supongamos que encontramos un par óptimo  $(p, \mathbf{w})$  para el cual los beneficios son positivo, esto es:

$$p \cdot f(\mathbf{x}^*) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* = \pi^* > 0$$

Como hay competencia perfecta, el empresario puede vender todo lo que quiera al precio de mercado, por lo que si aumenta su producción en un factor ' $t > 0$ ', aumentará su beneficio ya que:

$$p \cdot f(t \cdot \mathbf{x}^*) - \mathbf{w} \cdot (t \cdot \mathbf{x}^*) = t \cdot p \cdot f(\mathbf{x}^*) - t \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* = t \cdot \pi^* > \pi^*$$

Si por alguna razón los beneficios en algún momento son nulos, la mejor decisión del empresario será minimizar costos y, con esa modalidad limitará el nivel de producción. No obstante ello, en ese caso la oferta del productor queda mal definida y tampoco se logra optimizar el modelo. Podemos verlo utilizando la tecnología de producción de la función Cobb-Douglas, que nos permite tener rendimientos crecientes, decrecientes o constantes según los valores de sus parámetros, y a la vez será la función que utilizaremos más adelante cuando definamos nuestro Modelo ampliado.

Partimos por notar que si hay rendimientos constantes a escala, la función de costos puede expresarse en términos intensivos como:  $c(\mathbf{w}, y) = y \cdot c(\mathbf{w}, 1)$ , donde llamamos ' $y$ ' al nivel de producción. Para nuestro caso, llamando ' $A$ ' al factor de escala tecnológica, esta función será<sup>7</sup>:

$$c(\mathbf{w}, y) = A \cdot c(\mathbf{w}) \cdot y^{(\frac{1}{a+b})}$$

La empresa maximizará su beneficio igualando a cero la primer derivada, o sea:

$$Max \left( py - A \cdot c(\mathbf{w}) \cdot y^{(\frac{1}{a+b})} \right) \Rightarrow \frac{\partial Max}{\partial y} = p - \frac{A}{a+b} c(\mathbf{w}) \cdot y^{(\frac{1-a-b}{a+b})} = 0$$

Despejando el valor de ' $y$ ' de esta ecuación, encontramos la función de oferta del producto, que entonces viene dada por:

$$y = \left[ p \frac{(a+b)}{A \cdot c(\mathbf{w})} \right]^{\frac{a+b}{1-a-b}} \quad (\text{A.10})$$

La cual claramente no está definida cuando la función de producción es homogénea de primer grado y tiene rendimientos constantes a escala, ya que  $a+b=1$  y queda indeterminado el denominador de la potencia. La función sólo estará bien definida cuando haya rendimientos decrecientes a escala, ya que para  $a+b > 1$  también presentará problemas.

---

<sup>7</sup>/ Véase (Varian, 1980)

Tenemos entonces que aunque la empresa se encontrara con un nivel de beneficios nulo, esto es  $\pi = 0$ , no tendríamos una solución estable dado que la función de oferta no está definida y la ecuación de beneficios tampoco, ya que la misma vendrá dada por:

$$\pi(p, \mathbf{w}) = p \cdot \left[ p \frac{(a+b)}{A \cdot c(\mathbf{w})} \right]^{\frac{a+b}{1-a-b}} - A \cdot c(\mathbf{w}) \left[ p \frac{(a+b)}{A \cdot c(\mathbf{w})} \right]^{\frac{1}{1-a-b}} \quad (\text{A.11})$$

A pesar de esta contradicción, como dijimos en la Introducción vamos a mantener el supuesto de homogeneidad de las funciones de producción y de costo de ajuste, debido a dos cuestiones:

1. Este supuesto nos permite utilizar la Proposición I de (Hayashi, 1982), que asegura que la ‘q’ media es igual a la marginal.
2. A corto plazo la función de beneficios presenta rendimientos decrecientes.

En la Sección siguiente se incluye una demostración específica de la Proposición I, en la cual no se requiere que la empresa sea ‘*precio aceptante*’, pero antes de ello es bueno aclarar por qué afirmamos que los rendimientos son decreciente a corto plazo.

Notemos que los rendimientos constantes a escala se producirán a largo plazo, pero en el corto plazo al tener mercados de insumos competitivos en nuestra ecuación (A.9), la función de beneficios tendría rendimientos decrecientes debido a que el empleo debería ajustar instantáneamente ante los cambios en la productividad marginal del trabajo.

Dado que la función de costos de ajuste de la inversión es cóncava estricta sobre ‘K’, el capital instalado permanecerá fijo en el corto plazo y como el insumo de mano de obra se encuentra restando en la ecuación, habrá rendimientos decrecientes a corto plazo.

### III. Series de Tiempo

El andamiaje econométrico moderno contiene un apartado especial referido a las series de tiempo, que si bien son observaciones o muestras de la realidad, contienen particularidades que las vuelven específicas. Desarrollamos aquí los fundamentos de varias de las pruebas estadísticas que utilizamos en la Tesis a fin de evitar repetirlos en diferentes Secciones.

#### A. Principales Pruebas Estadísticas

##### A.1. Heteroscedasticidad

La violación del cuarto supuesto nos lleva a que, al no ser constante la varianza, la misma depende del tiempo. Lo importante para destacar es que los estimadores de

los parámetros ya no serán de varianza mínima, aún cuando resulten insesgados

Para detectar la presencia de heteroscedasticidad en esta Tesis, emplearemos los contrastes de White o de Breusch-Pagan-Godfrey

**A.1.1. Contraste de White** Se realiza una regresión que toma el cuadrado de los residuos de MCO como variable dependiente y utiliza como variables explicativas a las variables ' $x_{it}$ ' del modelo, sus cuadrados y sus productos cruzados de dos en dos.

Se acepta la hipótesis de Homoscedasticidad si se acepta la nulidad conjunta de todos los parámetros (salvo la constante), aplicando un las prueba 'F'.

**A.1.2. Contraste de Breusch-Pagan-Godfrey** La varianza de los residuos se expresa como  $\sigma^2 = h(az'_i)$ , siendo 'h' una función y 'z' el vector de las variables que provocan la heteroscedasticidad. De esta manera, si se verifica que a=0, se concluye que hay homoscedasticidad.

El contraste se realiza tomando el cuadrado de los residuos de la regresión divididos por su media aritmética como variable dependiente y el vector 'z' con una constante como regresores. Con esta regresión se construye el estadístico 'Q' como la suma de los cuadrados explicada sobre dos, el cual se verifica que tiene una distribución  $\chi^2$  con k-1 grados de libertad (k=número de variables incluidas en 'z')

## A.2. Autocorrelación

La hipótesis de ausencia de correlación serial entre los residuos de la regresión, viene dada por la violación del quinto supuesto de Gauss-Markov (GM).

En presencia de autocorrelación, los estimadores MCO siguen siendo insesgados, pero ya no son de varianza mínima, con lo que dejan de ser eficientes con relación a otros estimadores y es posible que no sean los Mejores Estimadores Lineales Insesgados (MELI), y las pruebas 't', 'F' y  $\chi^2$  pueden no ser válidas.

Para verificar autocorrelación aplicaremos tanto el análisis gráfico de los residuos, como los estadísticos de Durbin-Watson (D-W) y el de Breusch-Godfrey

## A.3. Error de Especificación del Modelo

La omisión de variables explicativas en un modelo econométrico lleva a estimadores sesgados de los parámetros. En este sentido (Greene, 2000), si suponemos que la especificación correcta de un modelo es por ejemplo  $y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon$  y optamos por estimarlo sin considerar la variable "X<sub>2</sub>", el estimador de  $\beta_1$  (que llamaremos "b<sub>1</sub>") resultará sesgado ya que:

$$b_1 = (X_1'X_1)^{-1} \cdot X_1'y = \beta_1 + (X_1'X_1)^{-1} \cdot X_1'X_2\beta_2 + (X_1'X_1)^{-1} \cdot X_1'\epsilon$$

Tomando la esperanza matemática vemos que  $b_1$  estará sesgado<sup>8</sup>, ya que:

$$E[b_1] = \beta_1 + (X_1'X_1)^{-1} \cdot X_1'X_2\beta_2$$

Por ello, consideramos que el Mercado Meta es una variable omitida en la especificación del modelo de la  $q$  de Tobin, y su inclusión es relevante para una mejor estimación.

#### A.4. Estabilidad Estructural

La estimación de MCO asume que el vector de parámetros estimados es constante (los  $\hat{\beta}_i$ ), pero en los modelos de series de tiempo es común que se produzcan cambios estructurales provocados por los shocks y modificaciones de políticas que sufren las economías. Por ello resulta necesario verificar la estabilidad estructural del modelo estimado.

Esto es fácil de ver en forma teórica (Greene, 2000), considerando la diferencia que se produce al estimar un modelo incompleto, frente al modelo completo. Supongamos el caso siguiente:

$$\text{Modelo Completo : } Y_t = b_o + b_1X_{1t} + b_2X_{2t} + b_3X_{3t} + u_t$$

$$\text{Modelo Estimado : } Y_t = b_o + b_1X_{1t} + b_2X_{2t} + v_t$$

Si resulta que efectivamente el “Modelo Completo” es el que explica la realidad, como en la estimación hemos obviado la variable  $X_3$ , cuando realicemos la regresión veremos que el término de error del Modelo Estimado será:

$$v_t = b_3X_{3t} + u_t$$

Lo cual claramente conforma un patrón sistemático de comportamiento, que provoca la aparición de la falsa autocorrelación.

Para detectar cambios estructurales, generalmente se aplica el Método Recursivo y los contrastes CUSUM y CUSUMQ que no requieren definir previamente la fecha del cambio estructural.

**A.4.1. Método Recursivo** El cálculo se realiza mediante una primera estimación de mínimos cuadrados con las primeras “ $k$ ” observaciones, donde  $k$ =número de variables, y a continuación se van realizando sucesivas regresiones añadiendo una nueva observación a cada una de ellas, hasta llegar a incorporarlas a todas.

Se obtiene de esta forma una secuencia de vectores de los parámetros  $\hat{\beta}_t, \hat{\beta}_{t+1}, \dots, \hat{\beta}_T$ , donde el subíndice “ $t$ ” indica la cantidad de observaciones mientras que “ $T$ ” expresa la última observación, y cada uno de estos vectores verifica que:

$$\hat{\beta}_r = (X_r'X_r)^{-1} X_r'Y_r$$

---

<sup>8/</sup> A menos que  $X_1'X_2 = 0$  o bien  $\beta_2 = 0$ .

Donde:  $X_r$  es la matriz de tamaño 'r x r' de regresores para las primeras 'r' observaciones de la muestra, mientras que  $Y_r$  es el vector de las primeras 'r' observaciones de la variable dependiente<sup>9</sup>.

Utilizando los errores estándar de cada una de estas estimaciones, se grafican los resultados de los residuos mostrando su evolución, y dado que si los parámetros son constantes en las sucesivas estimaciones deberían mostrarnos que los errores estándar no difieren mucho unos con otros, los residuos recursivos deberían oscilar entonces muy próximos a cero.

**A.4.2. Contrastes CUSUM y CUSUMQ** Estos contrastes fueron desarrollados por (Brown and Evans, 1975), y se basan en un re-escalado de los residuos recursivos recién descritos. Llamando  $w_t$  a los residuos re-escalados, se verifica que su distribución es Normal,  $w_r \sim N(0, \sigma^2 I)$ , y son definidos como:

$$w_r = \frac{y_r - x_r' \beta_{t-1}}{\sqrt{1 + x_r' (X_{r-1}' X_{r-1})^{-1} x_r}} = \frac{e_r}{\sqrt{1 + x_r' (X_{r-1}' X_{r-1})^{-1} x_r}}; \quad r = k+1, k+2, \dots, k+T$$

El estadístico CUSUM se define como:

$$W_t = \sum_{r=k+1}^{r=t} \frac{w_r}{\hat{\sigma}}; \quad \text{con } \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{k+1}^T (w_r - \bar{w})^2}{T - k - 1} \text{ y } \bar{w} = \frac{\sum_{k+1}^T w_r}{T - k}$$

Donde 'T' es la cantidad total de observaciones de la muestra,  $SCR_T = \sum_{k+1}^T (w_r - \bar{w})^2$  es la suma de cuadrados de los residuos de toda la muestra y k es el número de parámetros.

El CUSUMQ, por su parte, se basa en el cuadrado de los residuos recursivos, y su estadístico se define como:

$$S_t = \frac{\sum_{k+1}^t w_r^2}{\sum_{k+1}^T w_r^2}$$

## A.5. Regresión Espúrea

Otro aspecto importante a destacar en este sentido, descubierto por Yule en 1926 y actualizado mediante simulaciones de Monte Carlo por (Granger and Newbold, 1974), es el de las regresiones espurias. Granger y Newbold consideraron dos realizaciones mediante 500 simulaciones de Monte Carlo de las caminatas aleatorias descritas por:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + u_t & u_t &\sim N(0, 1) \\ x_t &= x_{t-1} + v_t & v_t &\sim N(0, 1) \\ x_o &= y_o = 0 \end{aligned}$$

Estas series son no estacionarias, como puede verificarse, y no están correlacionadas debido a fueron generadas aleatoriamente. Sin embargo, una regresión de  $y_t$  sobre

<sup>9</sup>/ Hemos preferido utilizar la mayúscula para diferenciar estas variables que se van acumulando, de las 'x' generales.

$x_t$  arrojó un  $R^2 = 0,1044$  y un  $D-W = 0,0121$ . El resultado de esta estimación, sin embargo, no tiene mucho sentido ya que no hay ninguna relación que vincule a las series<sup>10</sup>, es lo que se llama “Regresión Espúrea” o sin sentido, y se debe a que las series no son estacionarias. A decir de (Granger and Newbold, 1974),  $R^2 > D - W$  es una buena regla para sospechar que una regresión es espúrea.

Aún cuando podría parecer lo contrario, existen varias series de tiempo no estacionarias que son muy utilizadas en el análisis económico y financiero. Por citar solo algunas, mencionaremos la caminata aleatoria (CA) que se utiliza para modelar el precio de las acciones en una bolsa de comercio. La CA puede ser con o sin deriva (esto es, sin término constante), o con deriva y desvío.

Finalmente tenemos que mencionar al proceso estocástico estacionario puramente aleatorio, también llamado ‘ruido blanco’, que tiene un valor medio nulo, varianza constante ( $= \sigma^2$ ) y no está serialmente correlacionado. En general, consideramos que los residuos de la regresión de MCO ‘ $u_t$ ’ son ruido blanco y están independiente e idénticamente distribuidos como una distribución normal con media cero y varianza constante. Esto lo reflejaremos como:

$$u_t \sim IID N(0, \sigma^2)$$

## B. Procesos Estocásticos Integrados

Un caso de mucho interés en econometría, es el referido a los procesos estocásticos no estacionarios, que tienen raíz unitaria. Podemos partir del modelo de caminata aleatoria que ya mencionamos, caracterizándolo como:

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t; \quad \text{con } -1 < \rho \leq 1 \quad (\text{A.12})$$

Cuando  $\rho = 1$  se trata de una caminata aleatoria sin deriva y tiene ‘raíz unitaria’, y en el resto de los casos (*cuando*  $|\rho| < 1$ ) es estacionaria.

En términos generales, un proceso no estacionario puede ser un caso particular de los llamados Procesos Estocásticos Integrados, cuando al evaluarse en primeras diferencias resulta estacionario. Acabamos de ver que la caminata aleatoria sin deriva ( $\rho = 1$ ) tiene raíz unitaria, pero cuando le aplicamos primeras diferencias se vuelve estacionaria, siendo así un proceso estacionario en diferencias (PED), que puede mostrarse como:

$$y_t = y_{t-1} + u_t \quad \Rightarrow \quad \Delta y_t = (y_t - y_{t-1}) = u_t$$

Sabemos que  $u_t$  es estacionario, ya que lo definimos como ruido blanco, por lo que cuando  $\rho = 1$  el proceso en niveles tiene raíz unitaria, mientras que el proceso en diferencias tiene raíz cero.

Formalmente, decimos que una serie de tiempo es Integrada de orden “d” si debe diferenciarse ‘d’ veces para ser estacionaria. Esto lo denominamos ‘ $y_t \sim I(d)$ ’. La

---

<sup>10</sup>/ Recordemos que fueron construidas como caminatas aleatorias.

caminata aleatoria con  $\rho = 1$  resulta ser ‘I(1)’ entonces, mientras que su primera diferencia es ‘I(0)’.

La gran mayoría de series de tiempo económicas se comportan como I(1), por lo que vamos a detallar cuales son sus propiedades, siguiendo a (Gujarati, 2010):

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \text{Si } x_t \sim I(0) \text{ y } y_t \sim I(1) \quad \Rightarrow \quad z_t = x_t + y_t \sim I(1) \\
 2) \quad & \text{Si } x_t \sim I(d) \quad \Rightarrow \quad z_t = (a + bx_t) \sim I(d) \quad a \text{ y } b = \text{constantes} \\
 3) \quad & \text{Si } x_t \sim I(d_1) \text{ y } y_t \sim I(d_2) \quad \Rightarrow \quad z_t = (ax_t + by_t) \sim I(d_2) \quad d_1 < d_2 \\
 4) \quad & \text{Si } x_t \sim I(d) \text{ y } y_t \sim I(d) \quad \Rightarrow \quad z_t = (ax_t + by_t) \sim I(d^*) \quad d^* \leq d
 \end{aligned}
 \tag{A.13}$$

Es muy importante notar en primer lugar que la combinación de series de diferente orden de integración nos llevará a estimadores de los parámetros que convergen a cero, aún en muestras pequeñas (Maddala and Kim, 1998). En un modelo de dos variables,  $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$  el estimador por MCO será:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum [(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})]}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$

Si  $x_t$  es una serie no estacionaria, su varianza se incrementará indefinidamente y dominará el resultado del estimador del parámetro, haciendo que tienda a cero asintóticamente, sin que  $\hat{\beta}_2$  tenga una distribución asintótica.

La segunda cuestión importante a observar, es el cuarto punto de A.13, que nos dice que dos series que tienen el mismo orden de integración, pueden resultar integradas de un orden inferior gracias a una combinación lineal de parámetros. Como veremos más adelante, esto es lo que se llama *Cointegración* de las series.

## C. Pruebas de Estacionariedad

Demostrada la importancia de la estacionariedad para el análisis de series de tiempo, vamos a ver ahora las diferentes pruebas desarrolladas para detectarla.

En primer lugar mencionamos el análisis gráfico de las Funciones de Autocorrelación y la Correlación Parcial. El denominado ‘Correlograma’ de la serie nos muestra las funciones en cada período y nos permite observar el comportamiento del proceso estocástico. No vamos a entrar en detalles que, además de conocidos, pueden verse en cualquier manual de econometría <sup>11</sup>. Mencionaremos sin embargo el ‘Estadístico Q’ desarrollado por Box y Pierce que prueba la significatividad conjunta de todos los coeficientes de autocorrelación muestral  $\hat{\rho}$  hasta el rezago ‘k’, y cuya fórmula viene dada por

$$Q = n \sum_{k=1}^m \hat{\rho}^2$$

Donde n = tamaño de la muestra y m = longitud del rezago. Una variante del ‘Q’, y que funciona mejor con muestras pequeñas (es estadísticamente más potente), es

<sup>11</sup>/ pueden consultarse entre otros: (Gujarati, 2010), (Davidson et al., 2004), (Enders, 2008), (Greene, 2000), (Hayashi, 2000), etc.

el estadístico de Ljung-Box (LB) que se define como<sup>12</sup>:

$$LB = n(n+2) \sum_{k=1}^m \left( \frac{\hat{\rho}^2}{n-k} \right) \sim \chi_m^2$$

### C.1. Prueba de Phillips-Perron (PP)

La prueba aumentada de Dickey y Fuller no requiere que los residuos de la regresión sean ruido blanco, pero sí necesita que el término de error de la ecuación aumentada lo sea. Para evitarlo, Phillips y Perron desarrollaron un las prueba no paramétrico que admite autocorrelación de las perturbaciones. Al ser tan general, los las prueba DF y ADF resultan ser casos particulares de la prueba de PP, que es el mayormente utilizado en esta Tesis.

El estadístico considera que el proceso generador de datos es similar al aplicado en ADF, pero no requiere que los residuos sean necesariamente ruido blanco, aunque fija condiciones generales que deben cumplir los mismos. Estas condiciones, que permiten que los residuos sean un ARMA o un proceso heteroscedástico, por ejemplo, vienen dadas por:

$$\begin{aligned} E(u_t) &= 0 & \forall t \\ \text{Sup}_t E|u_t|^{2\beta} &< \infty & \text{para } \beta > 2 \\ T \rightarrow \infty &\Rightarrow \sigma^2 = \lim E\left[\frac{S_T^2}{T}\right] \text{ existe y } \sigma^2 > 0 & S_T = u_1 + \dots + u_T \\ u_t \text{ tiene } \alpha_m &/ \text{ satisfacen } \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{1-2/\beta} < \infty & \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

De esta manera, el método estima el estadístico de Dickey y Fuller (DF) no aumentado, y modifica los ratios ‘t’ mediante los coeficientes ‘ $\alpha$ ’, a fin de que la correlación serial no afecte la distribución asintótica de la prueba (EViews, 2009). El estadístico, que denominaremos  $\bar{t}_\alpha$ , se distribuye mediante:

$$\bar{t}_\alpha = t_\alpha \sqrt{\frac{\gamma_o}{f_o}} - \frac{T_\alpha(f_o - \gamma_o) [se(\hat{\alpha})]}{2s\sqrt{f_o}}$$

Donde	$\hat{\alpha}$	es el valor de $\alpha$ que se estima
	$T_\alpha$	Valor de tabla ‘t’ de “ $\alpha$ ”
	$se(\hat{\alpha})$	Error estándar de $\alpha$
	s	Error estándar de la regresión
	$\gamma_o$	$\left(\frac{(T-k)s^2}{T}\right)$ Estimador del error en la varianza, $k=N^o$ de regresores
	$f_o$	estimador del espectro residual en la frecuencia cero

(A.15)

La distribución asintótica de PP es la misma que la utilizada en los las prueba de Dickey y Fuller, y en general se utilizan los valores tabulados por (MacKinnon, 2010), en su versión del año 1991<sup>13</sup>.

<sup>12/</sup> Tanto el Q como el LB no son apropiados en aquellos modelos en los que la variable dependiente está rezagada, bajo los mismos argumentos que se aplican en la prueba de Durbin-Watson (Maddala and Kim, 1998)

<sup>13/</sup> Información complementaria puede ser vista en (Davidson et al., 2004)

## D. Modelo de Corrección de Errores - ECM

El Mecanismo o Modelo de Corrección de Errores parte del Teorema de Representación de Granger que dice que para todo conjunto de variables  $I(1)$ , el Modelo de Corrección de Errores y la Cointegración son representaciones equivalentes. Esto por supuesto nos lleva a que si dos variables están cointegradas, la relación entre las mismas se puede expresar mediante un Modelo de Corrección de Errores (ECM).

Si las variable están cointegradas, los residuos de la regresión pueden entonces usarse para construir el ECM, partiendo de que los procesos  $y_t$  y  $x_t$  son  $C(1,1)$ . Si nuestro modelo original sigue siendo

$$y_t = \beta_o + \beta_1 x_t + u_t \quad (\text{A.16})$$

y ahora aplicamos primeras diferencias en ambos términos de nuestra ecuación y recordamos por que  $\Delta \hat{u}_t = a_1 \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$ . tendremos:

$$\Delta y_t = \alpha_o + \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 \Delta u_t$$

$$\Delta y_t = \alpha_o + \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 (y_{t-1} - \beta_1 x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Donde hemos utilizado  $u_t = y_{t-1} - \beta_o - \beta_1 x_{t-1}$  y subsumimos el  $\beta_o$  dentro del  $\alpha_o$ . En nada cambia el concepto si reenumeramos los parámetros ‘ $\alpha$ ’ y agregamos rezagos de las variables involucradas para coincidir con la bibliografía, lo que nos permitirá expresar en términos generales el Modelo de Corrección de Errores con dos variables como (Enders, 2008):

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_y (y_{t-1} - \beta_1 x_{t-1}) + \sum_{i=1} a_{11}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1} a_{12}(i) \Delta x_{t-i} + \varepsilon_{yt}$$

$$\Delta x_t = \alpha_2 + \alpha_x (y_{t-1} - \beta_1 x_{t-1}) + \sum_{i=1} a_{21}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1} a_{22}(i) \Delta x_{t-i} + \varepsilon_{xt} \quad (\text{A.17})$$

Donde  $\beta_1$  es el parámetro del vector de cointegración en (A.16)  
 $\varepsilon_{yt}$  y  $\varepsilon_{xt}$  son errores ruido blanco (que pueden estar correlacionados)  
 $\alpha_y$  y  $\alpha_x$  velocidad de ajuste  
 $\alpha_i$  son todos parámetros  
 $a_{ij}(i)$  son todos parámetros

(Engle and Granger, 1987) demuestran que la magnitud de los residuos estimados en la regresión de cointegración, equivale a la desviación del corto plazo con respecto al largo (y viceversa), por lo que proponen utilizarlos como reemplazo de  $y_{t-1} - \beta_1 x_{t-1}$  y estimar el Modelo de Corrección de Errores como:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \alpha_1 + \alpha_y \hat{u}_{t-1} + \sum_{i=1} a_{11}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1} a_{12}(i) \Delta x_{t-i} + \varepsilon_{yt} \\ \Delta x_t &= \alpha_2 + \alpha_x \hat{u}_{t-1} + \sum_{i=1} a_{21}(i) \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1} a_{22}(i) \Delta x_{t-i} + \varepsilon_{xt} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Estas ecuaciones representan Vectores Autoregresivos, y pueden ser estimados con la misma metodología general empleada en los mismos, por lo que MCO es un estimador eficiente y como ambas ecuaciones son estacionarias, las prueba estadísticos también son apropiados para el análisis.

Generalicemos ahora a ‘n’ variables siguiendo a (Enders, 2008) de manera que, tomando la ecuación de  $x_t$ :

$$\begin{aligned} x_t &= A_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \\ \Delta x_t &= A_1 x_{t-1} - x_{t-1} + \varepsilon_t = (A_1 - I)x_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow \\ \Delta x_t &= \pi x_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \tag{A.19}$$

Donde  $x_t$  vector de dimensión  $(n \cdot 1) = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})'$   
 $\varepsilon_t$  vector de dimensión  $(n \cdot 1) = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{nt})'$   
 $A_1$  es una matriz de parámetros de dimensión  $(n \cdot n)$   
 $I$  es la matriz identidad de dimensión  $(n \cdot n)$   
 $\pi$  la definimos como  $(A_1 - I)$

El rango que tenga la matriz ‘ $\pi = (A_1 - I)$ ’ nos dirá la cantidad de vectores cointegrados que hay en el modelo (Johansen, 1988). Por ejemplo, si  $\pi$  tuviera todos parámetros iguales a cero, su rango también sería nulo y no podrá haber ninguna combinación lineal que produzca la cointegración. En este caso la ecuación A.19 se convierte en  $\Delta x_t = \varepsilon_t$  que es un Vector Autorregresivo (VAR) en primeras diferencias y todos los procesos  $\{x_{it}\}$  tienen raíz unitaria.

En el caso contrario, cuando  $\pi$  es de rango completo [ $rango(\pi) = r = n$ ], la solución de A.19 vendrá dada por ‘n’ ecuaciones independientes que resultarán estacionarias y, por lo tanto, tampoco podrán estar cointegradas, ya que son  $I(0)$  en lugar de  $I(1)$ .

El caso intermedio, cuando  $rango(\pi) = r < n$ , es el de mayor interés, dado que habrá ‘r’ vectores independientes que podrán estar cointegrados. Si suponemos que el rango es uno, por ejemplo, habrá un vector cointegrado representado por alguna de las filas de la matriz  $\pi$ , y cada una de las secuencias  $\{x_{it}\}$  puede entonces escribirse en términos del Modelo de Corrección de Errores. Si suponemos que elegimos desarrollar  $x_{1t}$ , tendríamos:

$$\Delta x_{1t} = \pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \dots + \pi_{1n}x_{nt-1} + \varepsilon_{1t}$$

Para ver la similitud con (A.17), podemos normalizar la ecuación con respecto a  $x_{1t-1}$  dividiendo por  $\pi_{11}$  (que será  $= \alpha$ ) y definiendo  $\beta_{1j} = \frac{\pi_{1j}}{\pi_{11}}$ , obteniendo:

$$\Delta x_{1t} = \alpha (x_{1t-1} + \beta_{12}x_{2t-1} + \dots + \beta_{1n}x_{nt-1}) + \varepsilon_{1t} \tag{A.20}$$

En el largo plazo  $\{x_{1t}\}$  deberá satisfacer la relación  $x_{1t-1} + \beta_{12}x_{2t-1} + \dots + \beta_{1n}x_{nt-1} = 0$ . El vector de cointegración normalizado vendrá dado por  $(1, \beta_{12}, \beta_{13}, \dots, \beta_{1n})$ , mientras que la velocidad de ajuste entre el corto y el largo plazo, vendrá dada por el parámetro ‘ $\alpha$ ’.

## E. Test de Límites

Para enfrentar el problema de variables con distinto orden de integración, (Pesaran and Smith, 2001) desarrollaron la prueba de límites (o ‘*Bound Test*’ en inglés) que admite no sólo series de diferente orden de integración, sino que tampoco requiere establecer a priori si las series son estacionarias en tendencia o en diferencias.



Figura A.1: Test de Límites

La prueba se basa en los valores de los estadísticos ‘F’ y ‘t’ obtenidos en la regresión de MCO, pero los valores límite han sido calculados por los autores en su artículo, mediante una distribución asintótica de los mismos, con la particularidad de que el mecanismo de aceptación o rechazo es, en alguna medida, parecido al utilizado en la prueba de correlación de Durbin-Watson, con valor mínimo y máximo que deja una zona de duda.

De esta forma, las tablas publicadas en (Pesaran and Smith, 2001) fijan los valores límites para dos escenarios posibles: (i) todas las series son I(1) o, (ii) todas las series son I(0). La hipótesis nula es  $H_0$ : No hay cointegración, que resulta aceptada cuando el valor del estadístico ‘F’ es inferior al valor de tabla de I(0). Por el contrario, se acepta que las variables están cointegradas si el valor del estadístico ‘F’ es superior al valor de tabla de I(1). Cuando el estadístico ‘F’ queda entre los valores tabulados para I(0) e I(1), la prueba queda en zona de duda y no acepta ni rechaza la cointegración.

El criterio de selección mediante el estadístico ‘t’ es similar, con nuevas tablas que dan los valores para cuando todas las series son I(1) y para cuando todas son I(0). Si el estadístico es menor que I(0) no hay cointegración, y si es mayor que I(1) hay cointegración. En los valores intermedios, de nuevo, hay una zona de duda. Un inconveniente adicional que se produce muchas veces, es que el estadístico ‘F’ acepta  $H_0$ , mientras que el ‘t’ la rechaza (o cuando rechaza ‘F’ y acepta ‘t’). Tampoco está claro cómo proceder en esos casos.

## F. Causalidad y Exogeneidad

Dos puntos adicionales a considerar son los referidos a la causalidad en el sentido de Granger y la tipología de la exogeneidad según (Engle and Richard, 1983).

Es interesante recordar lo indicado por (Maddala and Kim, 1998) acerca de la *causalidad en sentido de Granger*, al indicar que una palabra más precisa para definir el concepto hubiera sido ‘*precedencia*’, pero se usó causalidad y generó muchas aclaraciones y equívocos. Es muy ilustrativo al respecto el ejemplo que nos brindan, al decir que “Granger causality implies is the statement: *The weatherman’s prediction about rain (Granger) causes the rain*”<sup>14</sup>.

Sabemos por el Teorema de Representación de Granger que cuando dos variables I(1) están cointegradas, una debe causar la otra o viceversa. Sin embargo para poder estimar una ecuación de forma condicional ( $Y_t = E(Y/X) + \epsilon$ ), necesitamos que las

<sup>14</sup>/ La cursiva (y todo el doble entrecomillado), es de (Maddala and Kim, 1998), página 189.

variables explicativas sean *exógenas débil*

La importancia del punto radica en que buscamos estimar solo la ecuación de Tobin y para poder hacer un modelo condicional de ‘Y’ en ‘X’ (esto es, para hacer inferencia estadística), será necesario que el vector ‘X’ esté compuesto por variables exógenas débil. Lo que sucede es que la estimación de un Modelo de Corrección de Errores enfrenta dos problemas básicos: simultaneidad e identificación. La primera se resuelve gracias a la causalidad que genera la cointegración, y la segunda mediante la exogeneidad débil de las variables explicativas<sup>15</sup>. Debemos por lo tanto precisar estos conceptos que son aplicados intensivamente en el Capítulo 3.

## F.1. Causalidad

La primera cuestión vinculada a esta Tesis que debemos explicitar, está referida a la relación que hay entre causalidad y cointegración. De acuerdo con la discusión dada en (Granger, 1988) y siguiendo a (Maddala and Kim, 1998), podemos concluir que la cointegración está relacionada con el equilibrio de largo plazo, mientras que la causalidad en el sentido de Granger se vincula con las previsiones a corto plazo. No obstante, ambos conceptos pueden ser considerados a través del Modelo de Corrección de Errores.

Pero notemos en primer término que la causalidad en sentido de Granger no podrá ser verificada utilizando la prueba ‘F’ cuando hay cointegración ya que las series no son estacionarias. Para ver el motivo, supongamos que el rango de la matriz  $\pi$  es nulo, entonces:

$$\Delta x_t = \sum_{i=1}^{p-1} \pi_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t$$

Se convierte en un vector autorregresivo que es estacionario. Recordemos que la prueba de Granger se aplica a variables estacionarias. Cuando las variables están cointegradas, la prueba de causalidad involucra valores de ‘ $\pi$ ’, multiplicando los coeficientes por variables no estacionarias, lo cual no resulta correcto para aplicar la prueba ‘F’ que utiliza la prueba de Granger. Por razones similares, tampoco debe aplicarse la prueba de causalidad conjunta, basado en la  $\mathcal{X}^2$ .

Cuando las variables de un modelo se encuentran cointegradas, la causalidad en el sentido de Granger debe reinterpretarse debido a que el sistema responderá en el corto plazo a las desviaciones del equilibrio de largo plazo. Además, es posible que una (o más) de las variables del modelo respondan en el corto plazo y otras no. Cuando esto sucede, el parámetro de la velocidad de ajuste de esa variable [ $\alpha_x$  ó  $\alpha_y$  en la ecuación (A.17)] será nulo<sup>16</sup>. En este caso, la variable correspondiente será ‘*exógena débil*’, debido a que no provoca efecto alguno en la corrección del error.

Es por ello que, para que se verifique causalidad en sentido de Granger, la variable deberá cumplir las dos condiciones siguientes:

---

<sup>15</sup>/ Ver (Enders, 2008) Capítulo 6 para mayores detalles.

<sup>16</sup>/ O en términos más precisos, no resultará significativamente distinto de cero en términos estadísticos

1. En la ecuación de largo plazo, el parámetro de velocidad de ajuste [el valor  $\alpha_x$  o  $\alpha_y$  en (A.17) en la página 144], además de ser negativo deberá ser estadísticamente significativo. En caso de resultar así, habrá causalidad en el sentido de Granger del conjunto de las variables del modelo de largo plazo hacia la variable dependiente.
2. En el Modelo de Corrección de Errores calculado para el corto plazo, los parámetros estimados de los valores rezagados [ esto es, todos los rezagos de la variable ' $x_j$ ' correspondientes al término  $\sum_{i=1} a_{12}(i)\Delta x_{j,t-i}$  en la ecuación (A.17) en la página 144 ] deberán verificar significatividad conjunta (por el test de Wald, por ejemplo). En ese caso habrá en el corto plazo causalidad en el sentido de Granger de la variable en cuestión (la ' $x_j$ ' verificada) hacia la variable dependiente ' $y_t$ '. Cuando los valores del parámetro estimados en sus sucesivos retardos no fueran significativos en forma conjunta, esta variable ' $x_j$ ' resultará ser *exógena débil* y podrá realizarse la estimación de ' $y_t$ ' en forma condicionada a la variable ' $x_j$ '.<sup>17</sup>

## F.2. Exogeneidad

Es común en economía distinguir entre la variable endógena o dependiente en un modelo uniecuacional (la 'Y'), de las variables exógenas o explicativas (las ' $X_i$ '). Sin embargo, ¿qué tipo de relación existe entre unas y otras con la causalidad?.

Vamos a distinguir, siguiendo a (Engle and Richard, 1983), los tres tipos que pueden existir<sup>18</sup>:

1. Exógena Débil: Es lo único que se requiere para la estimación y la inferencia econométrica. ' $X_t$ ' será exógena débil si en una regresión de  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t$ , la variable  $Y_t$  no explica la existencia de  $X_t$ . En este caso el modelo puede estimarse condicional a 'X', o sea  $Y_t = E(Y/X) + \epsilon = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t$ .

La causalidad en sentido de Granger no es necesaria ni suficiente para verificar que 'X' es exógena débil.

2. Exógena Fuerte: Es necesaria para realizar predicciones con el modelo. ' $X_t$ ' será fuertemente exógena si además de ser exógena débil los valores de 'Y' actuales y rezagados no la explican. Esto significa que no existe una relación de realimentación entre ellas.

La causalidad en sentido de Granger es necesaria (pero no suficiente) para verificar la exogeneidad fuerte de 'X'.

3. Super Exógena: Debe estar presente cuando se busca analizar políticas. ' $X_t$ ' será super exógena si, además de ser exógena débil los parámetros de la regresión no cambian aunque cambien los valores de 'X'.

<sup>17/</sup> Agradezco a la Dra. Garegnani, Jurado de esta Tesis, haberme señalado la distinción entre causalidad y exogeneidad débil.

<sup>18/</sup> Por simplicidad, explicamos cada caso utilizando un modelo con solo dos variables: 'X' e 'Y'.

# B

## Anexo B: Comprobaciones Algebraicas del Modelo Ampliado

### I. Mercado Meta

#### A. Condiciones suficientes en el Mercado Meta

Comprobemos en primer término que se cumplan las condiciones de suficiencia de Mangasarian (Cerdá, 2001), que requieren que el Hamiltoniano en el máximo sea cóncavo en  $(N, M)$  para  $\lambda$  y  $t$  dados. Como el Hamiltoniano es una suma de funciones<sup>1</sup>, y sabemos que una suma de funciones cóncavas es también una función cóncava, podemos analizar cada término por separado. Como vemos que en la segunda parte de 2.5 las funciones del segundo término son lineales y por lo tanto cóncavas, si el primer término resulta también cóncavo, todo el Hamiltoniano lo será.

Debemos comprobar entonces que la matriz Hessiana de la función de utilidad de sustitución constante sea definida negativa o semidefinida negativa, para lo cual calculamos las derivadas primeras y segundas:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial M(t)} = \frac{(1 - \frac{1}{\sigma}) M(t)^{1 - \frac{1}{\sigma} - 1}}{1 - \frac{1}{\sigma}} = M(t)^{-\frac{1}{\sigma}} \quad y \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}(t)}{\partial M(t)^2} = (-\frac{1}{\sigma}) M(t)^{-\frac{1}{\sigma} - 1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial N(t)} = 0; \quad por \quad lo \quad que \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial N^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial N \partial M} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial M \partial N} = 0$$

Y la matriz Hessiana será:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{\sigma}) M(t)^{-\frac{1}{\sigma} - 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

---

<sup>1</sup>/ Recordemos que de acuerdo con la ecuación A.2 el Hamiltoniano responde a  $H = p_o f_o + p_i f_i$  en forma vectorial.

Vemos que, teniendo en cuenta que definimos  $\bar{\sigma} > 0$ , el signo del primer (y único) menor principal líder resulta negativo y al multiplicarlo por ‘ $(-1)^i$ ’ con  $i=1$  tenemos

$$(-1)^i H_i = (-1)^1 \left[ \underbrace{\left(-\frac{1}{\bar{\sigma}}\right)}_{<0} M(t)^{-\frac{1}{\bar{\sigma}}-2} \right] > 0$$

El segundo menor principal es el Hessiano completo, que hemos visto que es igual a cero, por lo que la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana es semidefinida negativa y por lo tanto la función de utilidad es cóncava en  $(N, M)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{signo de } |H_1| > 0 \\ H_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{semidefinida negativa} \Rightarrow \text{cóncava}$$

y como los restantes términos del Hamiltoniano son funciones lineales (o sea, cóncavas y convexas a la vez), el Hamiltoniano es cóncavo y se cumplen las condiciones de suficiencia de tipo Mangasarian para un máximo.

## B. Condiciones Necesarias

La primer condición necesaria del máximo de Pontryagin viene dada por:

$$M(t)^* = \arg \max \mathcal{H}(M, N, \lambda, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial M(t)} = M(t)^{-\frac{1}{\bar{\sigma}}} - \lambda(t) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Lo cual nos indica que el individuo equilibra los beneficios de consumir ahora con el costo de oportunidad del consumo futuro, representado por la variable de coestado  $\lambda$  que, en el contexto de nuestro caso, se interpreta como el precio sombra de una unidad adicional de riqueza financiera.

La siguiente ecuación del Principio del Máximo viene dada por<sup>2</sup>:

$$-\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial N(t)} = \dot{\lambda}(t) - \bar{\beta}\lambda(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} + r(t) = \bar{\beta} + \bar{n} \quad (\text{B.2})$$

Lo que nos está diciendo que la suma de la tasa subjetiva ‘ $\bar{\beta}$ ’ a la que el consumidor descuenta su utilidad futura más la tasa de crecimiento de la población ‘ $\bar{n}$ ’, deben igualarse a la tasa de ganancias de capital (representada por  $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ ) más la renta por intereses ‘ $r(t)$ ’. O sea que el individuo deberá sentirse indiferente entre tener una unidad más de riqueza financiera o consumirla hoy.

Podemos unir estos dos resultados en una sola ecuación diferencial que describa la trayectoria temporal del consumo en el Mercado Meta. Si tomamos logaritmos

<sup>2/</sup> Hemos verificado en la ecuación (2.4) en la página 46 que como la función de utilidad es cuasilineal, “ $M_t$ ” no depende del numerario “ $N$ ”. Por ello, al calcular la derivada el valor resultante es cero, que se omite.

en ambos términos de la primera y derivamos con respecto al tiempo podremos reemplazar luego  $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$  en la segunda. De (B.1) tenemos que:

$$M(t)^{-\frac{1}{\bar{\sigma}}} - \lambda(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(\cdot) - \frac{1}{\bar{\sigma}} \ln [M(t)] = \ln [\lambda(t)] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big|_{\frac{d}{dt}} \quad -\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\dot{M}(t)}{M(t)} = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}$$

Y ahora utilizando (B.2),

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} + r(t) = \bar{\beta} + \bar{n} \Rightarrow -\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\dot{M}(t)}{M(t)} + r(t) = \bar{\beta} + \bar{n} \Rightarrow \frac{\dot{M}(t)}{M(t)} = \bar{\sigma} [r(t) - \bar{\beta} - \bar{n}]$$

Que es la ecuación de Euler para el consumo en el Mercado Meta, indicada en (2.6) en la página 47. O sea que el crecimiento del consumo per cápita en el Mercado Meta será igual a la elasticidad intertemporal de sustitución multiplicada por la diferencia entre la tasa de interés de mercado y la tasa subjetiva de descuento del individuo más el crecimiento de la población. Se ve aquí claramente como cuanto más impaciente sea el individuo, mayor deberá ser la tasa de interés para contenerlo. A la inversa, los consumidores menos impacientes serán más ahorradores lo que provocará que la tasa de crecimiento del consumo per cápita aumente más rápido. Asimismo, cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución ( $\bar{\sigma}$ ), mayor será el crecimiento del consumo per cápita.

Resumiendo estos resultados parciales, podemos establecer, para 'r' e 'Y' dados, la senda óptima del consumo y de los activos financieros mediante la ecuación de movimiento de la restricción presupuestaria (2.3) y la ecuación del consumo (2.6), más las condiciones de transversalidad:

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= \bar{\sigma} M(t) [r(t) - \bar{\beta} - \bar{n}] \\ \dot{N}(t) &= [r(t) - \bar{n}] N(t) + Y(t) - M(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) e^{-\bar{\beta}t} &\geq 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) \lambda(t) e^{-\bar{\beta}t} = 0 \end{aligned} \quad (B.3)$$

## C. Soluciones Específicas

Debemos entonces encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales (2.3) y (2.6), y aplicarles las condiciones de transversalidad.

Notemos en primer lugar que ambas ecuaciones son diferenciales ordinarias lineales de primer orden, cuya solución general puede plantearse como (Zill and Cullen, 2009):

$$Si : \dot{x}_t + u(t)x_t = w(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\int_0^t u(s)ds} \left( Cte. + \int_0^t w(\tau) e^{\int_0^\tau u(s)ds} d\tau \right) \quad (B.4)$$

### C.1. Condiciones de Transversalidad

Vamos a verificar que se cumplan las condiciones de transversalidad, que en este caso impiden que el individuo se endeude permanentemente para consumir (no juego de Ponzi). Podemos adecuar la primera parte de (B.3), despejando  $N(t)$  de la ecuación de movimiento de la restricción presupuestaria. Si Resolvemos la ecuación diferencial (2.3), considerando que  $u(t) = -[r(t) - \bar{n}]$  y que  $w(t) = Y(t) - M(t)$ . Tendremos entonces:

$$\begin{aligned} N(t) &= e^{\int_0^t [r(s) - \bar{n}] ds} \left[ \bar{N}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s [r(s) - \bar{n}] ds} (Y(s) - M(s)) ds \right] \Rightarrow \\ N(t) e^{-\int_0^t [r(s) - \bar{n}] ds} &= \bar{N}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s [r(s) - \bar{n}] ds} [Y(s) - M(s)] ds \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Lo cual nos indica que el valor del numerario del individuo en el momento 't', descontado al momento cero, es igual a la dotación inicial más el valor de los ahorros futuros acumulados, descontados también al momento cero.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) e^{-\bar{\beta}t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \bar{N}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s [r(s) - \bar{n}] ds} [Y(s) - M(s)] ds \right] e^{\int_0^t (r(s) - \bar{n}) ds} \right\} e^{-\bar{\beta}t} \quad (\text{B.6})$$

Vemos que para que este límite no sea negativo ( $\geq 0$ ), la ecuación dentro del corchete debe ser positiva, o sea que podemos plantear que:

$$\begin{aligned} \bar{N}_0 + \underbrace{\int_0^\infty e^{-\int_0^t [r(s) - \bar{\beta} - \bar{n}] ds} Y(s) ds}_{=\bar{Y}_0} - \underbrace{\int_0^\infty e^{-\int_0^t [r(s) - \bar{\beta} - \bar{n}] ds} M(s) ds}_{=\bar{M}_0} &\equiv \\ &\equiv [\bar{N}_0 + \bar{Y}_0] - \bar{M}_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Donde  $\bar{Y}_0$  y  $\bar{M}_0$  representan el valor presente en el momento cero del flujo de los ingresos y del consumo en el Mercado Meta respectivamente. Por lo tanto, la primera condición de transversalidad en (B.3) puede expresarse como:

$$\bar{M}_0 \equiv \int_0^\infty e^{-\int_0^t [r(s) - \bar{\beta} - \bar{n}] ds} M(s) ds \leq \bar{N}_0 + \bar{Y}_0 \quad (\text{B.8})$$

Esta restricción se cumplirá con igualdad gracias al comportamiento maximizador del individuo y, en nuestro caso, implica que el consumidor nunca estará saciado. También nos dice que el flujo de consumo no puede superar la dotación inicial del numerario más los ingresos.

### C.2. Restricción Presupuestaria

Podemos ver ahora la siguiente condición de transversalidad de (B.3), utilizando el valor de  $\lambda(t)$  despejado de la primera condición del Principio del Máximo en (B.1)

y el valor de ‘M(t)’ hallado en (B.10), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= M(t)^{-\frac{1}{\sigma}} \quad y \quad M(t) = \bar{M}_0 e^{\int_0^t \bar{\sigma}[r(s)-\bar{\beta}-\bar{n}]ds} \\ \text{por lo tanto} \quad &\Rightarrow \lambda(t) = \left[ \bar{M}_0 e^{\int_0^t \bar{\sigma}[r(s)-\bar{\beta}-\bar{n}]ds} \right]^{-\frac{1}{\sigma}} = \\ &= \bar{M}_0^{-\frac{1}{\sigma}} e^{-\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \int_0^t \bar{\sigma}[r(s)-\bar{\beta}-\bar{n}]ds} \Rightarrow \quad \Rightarrow \lambda(t) = \bar{M}_0^{-\frac{1}{\sigma}} e^{-\int_0^t \bar{\sigma}[r(s)-\bar{\beta}-\bar{n}]ds} \end{aligned}$$

y la condición de transversalidad, al multiplicar (B.6) por  $\lambda(t)$ , será:  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)\lambda(t)e^{-\bar{\beta}t} = 0$  ya que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{\left[ \bar{N}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s [r(s)-\bar{n}]ds} [Y(s) - M(s)] ds e^{\int_0^t [r(s)-\bar{n}]ds} \right]}_{\bar{N}_t} e^{-\bar{\beta}t} \right] * \underbrace{\left[ \bar{M}_0^{-\frac{1}{\sigma}} e^{-\int_0^t \bar{\sigma}[r(s)-\bar{\beta}-\bar{n}]ds} \right]}_{\lambda(t)}$$

Vemos que los términos exponenciales se cancelan entre sí<sup>3</sup>, y podemos concluir que

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \bar{N}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s [r(s)-\bar{n}]ds} [Y(s) - M(s)] ds \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \left( \bar{N}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s [r(s)-\bar{n}]ds} Y(s) ds \right) - \left( \int_0^t e^{-\int_0^s [r(s)-\bar{n}]ds} M(s) ds \right) \right] \end{aligned}$$

Considerando ahora la definición de integral impropia de primera clase para una función ‘f(x)’ seccionalmente continua en el intervalo  $0 \leq x \leq t$  para toda ‘t’ (Zill and Cullen, 2009),

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x)dx$$

Podemos concluir que:

$$\begin{aligned} &\left( \bar{N}_0 + \int_0^{\infty} e^{-\int_0^s [r(s)-\bar{n}]ds} Y(s) ds \right) - \int_0^{\infty} e^{-\int_0^s [r(s)-\bar{n}]ds} M(s) ds \equiv \\ &\equiv (\bar{N}_0 + \bar{Y}_0) - \bar{M}_0 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Lo cual puede interpretarse como el valor presente de la restricción presupuestaria.

### C.3. Senda Óptima del Mercado Meta

Aplicando (B.4) a (2.6), tendremos que  $u(t) = -\bar{\sigma} [r(t) - \bar{\beta} - \bar{n}]$ , mientras que  $w(t) = 0$  por lo que la solución será:

$$M(t) = e^{\int_0^t \bar{\sigma}[r(s)-\bar{\beta}-\bar{n}]ds} \left( \bar{M}_0 + \overbrace{\int_0^t (0)}{=0} e^{-\int_0^{\tau} \bar{\sigma}[r(s)-\bar{\beta}-\bar{n}]ds} d\tau \right) \Rightarrow$$

<sup>3</sup>/ Esto surge porque al resolver las integrales tendríamos:  $e^{r-\bar{n}}e^{-\bar{\beta}}e^{-(r-\bar{\beta}-\bar{n})} = e^{r-\bar{n}-\bar{\beta}-r+\bar{\beta}+\bar{n}} = e^0 = 1$

$$M(t) = \bar{M}_0 e^{\int_0^t \bar{\sigma} [r(s) - \bar{\beta} - \bar{n}] ds} \quad (\text{B.10})$$

Partiendo de (B.10), podemos aplicar entonces logaritmos y despejar la senda de consumo óptima en el Mercado Meta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M(t) &= \bar{M}_0 e^{\int_0^t \bar{\sigma} [r(s) - \bar{\beta} - \bar{n}] ds} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln [M(t)] = \ln(\bar{M}_0) + \ln(e) \int_0^t \bar{\sigma} [r(s) - \bar{\beta} - \bar{n}] ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln [M(t)] = \ln(\bar{M}_0) + \bar{\sigma} \int_0^t [r(s) - \bar{\beta} - \bar{n}] ds = \\ &= \ln(\bar{M}_0) + \left| \bar{\sigma} t [r(s) - \bar{\beta} - \bar{n}] \right|_0^t \Rightarrow \Rightarrow \ln [M(t)] = \ln(\bar{M}_0) + \bar{\sigma} [r(t) - \bar{\beta} - \bar{n}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow M(t) = \bar{M}_0 e^{\bar{\sigma} t [r(t) - \bar{\beta} - \bar{n}]} \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

Que es la senda óptima de consumo mostrada en la ecuación 2.7 de la página 47.

## II. Modelo Ampliado

### A. Condiciones de Suficiencia

#### A.1. Concavidad del Hamiltoniano

Vamos a ver en primer término la concavidad de las funciones involucradas, para verificar que se cumplen las condiciones suficientes del Principio del Máximo. Dijimos en la ecuación (A.7) que debía verificarse que el Hamiltoniano fuera cóncavo en las variables de estado y de control, en nuestro caso el stock de capital, la inversión y la mano de obra, a las que denominaremos sintéticamente (K,I,L). Asimismo, la función de restricción mixta debe ser cuasicóncava en (K,I,L).

Con respecto al Hamiltoniano, podemos ver que se trata de una suma de funciones, algunas de ellas lineales y por lo tanto cóncavas<sup>4</sup>. Así tenemos que<sup>5</sup>:

$$\mathcal{H}(t) = K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})} - \underbrace{\bar{w} L(t) - I(t)}_{\text{lineal}} - \frac{I(t)^2}{2 K(t)} + \underbrace{q(t) [I(t) - \bar{\delta} K(t)]}_{\text{lineal}} \quad (\text{B.12})$$

Por lo que si se verifica en (B.12) que el primer y el cuarto término son cóncavos en (K,I,L), podremos concluir que el Hamiltoniano también lo será, por tratarse de la suma de funciones cóncavas.

En lo que sigue del Anexo, vamos a evitar la referencia del tiempo en las variables a fin de hacer más simple la lectura. En este sentido, escribiremos ‘K’ a secas en lugar

<sup>4</sup>/ Recordemos que las funciones lineales son tanto cóncavas como convexas, y que la suma de funciones cóncavas es también una función cóncava.

<sup>5</sup>/ Utilizamos letra cursiva para el Hamiltoniano, a fin de que no pueda confundirse con el símbolo de la matriz Hessiana, que también es ‘H’, y porque se trata del valor presente

de  $K(t)$ , siempre que esto no se preste a confusión.

**A.1.1. Concavidad de  $F(t) = K(t)^{\bar{\alpha}}L(t)^{1-\bar{\alpha}}$**  : Calculamos primero las derivadas y luego construimos la matriz Hessiana de la forma cuadrática:

$$\begin{aligned}
 F_K &= \bar{\alpha}K^{\bar{\alpha}-1}L^{1-\bar{\alpha}} & F_{KK} &= (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha})\frac{1}{K}\left(\frac{K}{L_t}\right)^{\bar{\alpha}-1} \\
 F_I &= F_{II} = F_{IK} = F_{IL} = 0 & F_{KL} &= F_{LK} = (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^2)\frac{1}{K}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} \\
 F_L &= (1 - \bar{\alpha})\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} & F_{LL} &= (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha})\frac{1}{L}\left(\frac{K}{L_t}\right)^{\bar{\alpha}} \\
 \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} F_{KK} & F_{KL} \\ F_{LK} & F_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha})\frac{1}{K}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} & (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^2)\frac{1}{K}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} \\ (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^2)\frac{1}{K}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} & (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha})\frac{1}{L}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Calculamos el signo de los menores líderes que son<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_1 &= (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha})\frac{1}{K}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} < 0 \\
 \mathbf{H}_2 &= (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha})^2\frac{1}{KL}\left(\frac{K}{L}\right)^{2\bar{\alpha}-1} - (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^2)^2\frac{1}{K^2}\left(\frac{K}{L}\right)^{2\bar{\alpha}} = \\
 &= (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha})^2\frac{1}{K}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}}\left[\frac{1}{L_t}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} - \frac{1}{K}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}}\right] = \\
 &= (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha})^2\frac{1}{K}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}}\left[\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}}\left(\frac{1}{L}\frac{L}{K} - \frac{1}{K}\right)\right] = \\
 &= (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha})^2\frac{1}{K}\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}}\left[\left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}}\underbrace{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K}\right)}_{=0}\right] = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto :  $\left\{ \begin{array}{l} H_1 < 0 \\ H_n = 0 \end{array} \right\}$  Semidefinida Negativa  $\Leftrightarrow$  cóncava en  $(K, I, L)$  (B.13)

---

<sup>6</sup>/ Tengamos en cuenta que como  $0 < \bar{\alpha} < 1 \Rightarrow (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}) < 0$

**A.1.2. Concavidad de  $\Psi(t) = -\frac{1}{2} \frac{I(t)^2}{K(t)}$**  Nuevamente, calculamos primero las derivadas y luego construimos la matriz Hessiana de la forma cuadrática:

$$\begin{aligned}\Psi_K &= \frac{1}{2} \left(\frac{I}{K}\right)^2 & \Psi_{KK} &= \frac{-1}{K} \left(\frac{I}{K}\right)^2 \\ \Psi_{KI} &= g_{IK} = \frac{I}{K^2} \\ \Psi_I &= -\frac{I}{K} & \Psi_{II} &= \frac{-1}{K} \\ \Psi_L &= \Psi_{LL} = \Psi_{LK} = \Psi_{LI} = 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Psi_{KK} & \Psi_{KI} \\ \Psi_{IK} & \Psi_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{K} \left(\frac{I}{K}\right)^2 & \frac{I}{K^2} \\ \frac{I}{K^2} & \frac{-1}{K} \end{bmatrix}$$

Calculamos el signo de los menores líderes que son:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{-1}{K} \left(\frac{I}{K}\right)^2 < 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_2 &= \frac{-1}{K} \left[ \frac{-1}{K} \left(\frac{I}{K}\right)^2 \right] - \frac{1}{K^2} \left(\frac{I}{K}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{K^2} \left(\frac{I}{K}\right)^2 - \frac{1}{K^2} \left(\frac{I}{K}\right)^2 = 0\end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto : } \left\{ \begin{array}{l} H_1 < 0 \\ H_n = 0 \end{array} \right\} \text{Semidefinida Negativa} \Leftrightarrow \text{cóncava en } (K, I, L) \quad (\text{B.14})$$

Con lo que hemos verificado que todos los términos del Hamiltoniano son cóncavos, y por lo tanto él mismo lo es.

**A.2. Cuasiconcavidad de  $h(t) = 1 - \frac{K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{1-\bar{\alpha}}}{M(t)}$**

La segunda condición suficiente del tipo Mangasarian, está dada por la cuasiconcavidad en las variables de estado y de control, de todas las restricciones mixtas. Como en nuestro caso sólo tenemos una restricción, debemos ver cuál es su comportamiento en (K,I,L).

Nuevamente, calculamos primero las derivadas y luego construimos la matriz Hessiana de la forma cuadrática, ya que si se verifica que la misma es cóncava, también

será cuasicóncava:

$$\begin{aligned}
h_K &= -\frac{\bar{\alpha}}{M} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} & h_{KK} &= -\frac{\bar{\alpha}(\bar{\alpha}-1)}{MK} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} \\
h_L &= -\frac{(1-\bar{\alpha})}{M} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} & h_{LL} &= -\frac{\bar{\alpha}(\bar{\alpha}-1)}{ML} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} \\
h_{KL} &= h_{LK} = -\frac{\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})}{MK} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} \\
\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} h_{KK} & h_{KL} \\ h_{LK} & h_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^2)}{MK} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} & \frac{(\bar{\alpha}^2-\bar{\alpha})}{MK} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} \\ \frac{(\bar{\alpha}^2-\bar{\alpha})}{MK} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} & \frac{(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^2)}{ML} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donde vemos que no es cóncava, ya que ni  $h_{KK}$  ni  $h_{LL}$  son negativos aún cuando  $H_n = 0$ . Vemos en realidad que la restricción es convexa, a pesar de lo cual vamos a verificar que no tenga tramos cusicóncavos que cumplan la condición suficiente del tipo Mangasarian, para lo que deberemos construir el determinante Hessiano Orlado con las primeras derivadas de la restricción, al que llamaremos ‘ $\mathbf{B}$ ’, en el cual tendremos que verificar que los determinantes principales alternen de signo, comenzando por el negativo<sup>7</sup>.

Como estamos interesados en los signos, más que en el resultado de cada determinante, nos vamos a manejar directamente con las expresiones generales de las derivadas y sus signos, de la manera siguiente:

$$\mathbf{B}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & h_K < 0 & h_L < 0 \\ h_K < 0 & h_{KK} > 0 & h_{KL} < 0 \\ h_L < 0 & h_{LK} < 0 & h_{LL} > 0 \end{bmatrix}$$

Comenzamos a calcular los menores principales, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1^\circ &= \begin{bmatrix} 0 & h_K < 0 \\ h_K < 0 & h_{KK} > 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{\alpha}}{M} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} < 0 \\ -\frac{\bar{\alpha}}{M} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} < 0 & \frac{(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^2)}{MK} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} > 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow (-1)^r |\mathbf{B}_r^\circ| \Rightarrow (-1)^1 |\mathbf{B}_1^\circ| = (-1) \left( \underbrace{(0) - (+)}_{< 0} \right) = > 0
\end{aligned}$$

Calculamos el segundo menor líder que debería ser positivo [antes de multiplicarlo

<sup>7</sup>Recordemos que una función será cuasicóncava si los determinantes principales de la forma cuadrática del Hessiano orlado con las primeras derivadas cumplen que:  $(-1)^k \cdot |B_k^\circ| \geq 0$ . Por el contrario, será cuasiconvexa si los menores principales son no positivos, o sea  $|B_k^\circ| \leq 0$

por  $(-1)^k$ ]:

$$\mathbf{B}_2^o = \begin{bmatrix} 0 & h_K & h_L \\ h_K & h_{KK} & h_{KL} \\ h_L & h_{LK} & h_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{\alpha}}{M} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} < 0 & -\frac{(1-\bar{\alpha})}{M} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} < 0 \\ -\frac{\bar{\alpha}}{M} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} < 0 & \frac{(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^2)}{MK} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}-1} > 0 & \frac{(\bar{\alpha}^2-\bar{\alpha})}{MK} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} < 0 \\ -\frac{(1-\bar{\alpha})}{M} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} < 0 & \frac{(\bar{\alpha}^2-\bar{\alpha})}{MK} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} < 0 & \frac{(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^2)}{ML} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} > 0 \end{bmatrix} =$$

$$|\mathbf{B}_2^o| = 0 - h_K(h_K h_{LL} - h_{LK} h_L) + h_L(h_K h_{KL} - h_{KK} h_L) =$$

$$= -h_K^2 h_{LL} + h_K h_L h_{LK} + h_L h_K h_{KL} - h_L^2 h_{KK} = \underbrace{-h_K^2 h_{LL}}_{(-)} + \underbrace{2 h_K h_L h_{LK}}_{(-)} - \underbrace{h_L^2 h_{KK}}_{(-)} < 0$$

$$\Rightarrow (-1)^k |B_k^o| = (-1)^2 [ < 0 ] \Rightarrow < 0$$

Esto nos demuestra que la restricción mixta no es cuasicóncava, sino que en realidad es cuasiconvexa estricta, ya que:

$$\text{como : } \left\{ \begin{array}{l} B_1^o < 0 \\ B_2^o < 0 \end{array} \right\} \text{ Cuasiconvexa Estricta en } (K, I, L) \quad (\text{B.15})$$

Esto significa que no se cumplen las condiciones suficientes del tipo Mangasarian, ya que si bien el Hamiltoniano es cóncavo, la restricción mixta no es cuasicóncava en (K,I,L). Podemos sin embargo, aplicar las condiciones del tipo Arrow que no requieren cuasiconcavidad de las restricciones mixtas (que justamente es lo que nos falta), aunque exigen que se cumpla la cualificación de las restricciones.

En nuestro caso, como hemos verificado que el Hamiltoniano es cóncavo en (K,I,L), sabemos que también resultará cóncavo el Hamiltoniano Maximizado (A.8) y, por lo tanto, si se cumplen las condiciones necesarias del Principio del Óptimo y se verifica la cualificación de la restricción mixta, los triples  $[K^*(t), I^*(t), L^*(t)]$  serán CU-Optimales.

### A.3. Cualificación de $h(t) = 1 - \frac{K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{1-\bar{\alpha}}}{M(t)}$

Comencemos por verificar la cualificación de la restricción mixta. Como mencionamos oportunamente, lo que se busca es verificar la independencia entre las restricciones mixtas activas, lo cual en nuestro caso es obvio porque contamos con una sola restricción. Igualmente verificamos que se cumpla la ecuación (A.5) de la página 131, en la matriz ‘ $\bar{\mathbf{M}}$ ’ de restricciones mixtas:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(1-\bar{\alpha})}{M} \left(\frac{K}{L}\right)^{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} =$$

Como vemos, el rango de esta matriz es igual a uno<sup>8</sup>, por lo que se cumple la cualificación de la restricción mixta y junto con lo anterior, se verifican las condiciones suficientes del tipo Arrow. Por lo tanto, al cumplir la condición de transversalidad

<sup>8</sup>/ Dado que tiene una sola fila, y por las condiciones de Inada impuestas en la Función de Producción, sabemos que ni ‘K’ ni ‘L’ serán iguales a cero.

(inferior)  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) [x(t) - x^*(t)] \geq 0$ ; para todos los estados admisibles  $x(t)$ , la terna  $(K^*, I^*, L^*)$  que cumpla las Condiciones Necesarias del Principio del Máximo será convergente al óptimo (CU-Optimal).

#### A.4. Holgura Complementaria de $h(t) = 1 - \frac{K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}}{M(t)}$

Debemos verificar que el multiplicador de la restricción mixta sea positivo o igual a cero si la restricción no satura. O sea que busquemos mostrar que:

$$\mu(t) \geq 0, \text{ [será } = 0 \text{ si } h(K^*(t), L^*(t), t) > 0]$$

Recordando que hemos impuesto que  $K, L, M > 0$ :

$$1 - \frac{K^\alpha L^{(1-\alpha)}}{M} \geq 0 \Rightarrow K^\alpha L^{(1-\alpha)} \leq M \quad (\text{B.16})$$

La condición de Holgura Complementaria se cumplirá cuando (B.16) se cumpla con desigualdad, siendo el multiplicador  $\mu(t)$  positivo. También podrá cumplirse en el límite, cuando la producción iguala al Mercado Meta.

## B. Condiciones Necesarias

### B.1. Primera Condición Necesaria

Desarrollamos primero la condición referida a la maximización del vector de variables de control, que indica que:

$$\text{El vector de Control en el Óptimo} = \{I^*, L^*\} = \arg \max \mathcal{H} (K, I, L, q, \mu, t)$$

Para lograrlo, debemos encontrar el máximo del Lagrangiano Valor Presente de la ecuación 2.22 (página 63), con respecto a las variables de control 'I' y 'L':

#### B.1.1. Respecto de la Mano de Obra

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial L(t)} = 0 &\Rightarrow (1 - \bar{\alpha}) \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}} - \bar{w} - \frac{\mu(t)(1 - \bar{\alpha})}{M(t)} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{w}^* = \underbrace{(1 - \bar{\alpha}) \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}}}_{F_L} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow L(t)^* = K(t) \left[ \frac{(1 - \bar{\alpha}) \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)}{\bar{w}} \right]^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Que es la ecuación (2.23) de la página 63 del texto. En ella vemos que en nuestro modelo, el salario de equilibrio mantiene relación directa con la Productividad Marginal del Trabajo ( $F_L$ ), pero ahora tiene deducido el impacto que causa la restricción del tamaño del Mercado Meta en la misma<sup>9</sup>. También vemos que la demanda de mano de obra coincide con la contratada para una función de Cobb-Douglas general, ponderada por la restricción impuesta por el tamaño del Mercado Meta.

**B.1.2. Respecto de la Inversión** Calculamos ahora la segunda variable de control:

$$\begin{aligned} (b) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial I(t)} = 0 &\Rightarrow -1 - \frac{I(t)}{K(t)} + q(t) = 0 \\ &\Rightarrow q(t)^* = 1 + \frac{I(t)}{K(t)} = 1 + \Psi_I \end{aligned}$$

Donde el valor ‘1’ expresa una unidad de inversión, y el valor de ‘q’ entonces equivale a la contribución marginal de una inversión al valor de la empresa ( $1 + \Psi_I$ ), y por lo tanto coincide con el valor de la teoría ‘q’ de Tobin al representar el costo de compra de la unidad adicional de capital (una unidad monetaria) más el costo marginal de instalación. Por lo tanto, la inversión vendrá dada por:

$$\Rightarrow I(t)^* = [q(t) - 1] K(t) \tag{B.18}$$

Esta es la ecuación (2.24) de la página 63 del texto. Con estos elementos, es posible verificar que la función de inversión cumplirá que:

$$I(t) \underset{\leq}{\geq} 0 \quad \text{para} \quad q(t) \underset{\leq}{\geq} 1$$

En la literatura se considera mayormente, asumiendo  $\Psi_{II} > 0$ , que la función de inversión óptima puede definirse en función del capital y el precio sombra del mismo, o sea,  $I(t) = I[q(t), K(t)]$ . Aún cuando estos valores son tomados muchas veces como los referentes de la inversión, asegurando que el empresario sólo debe mirar el precio sombra de la unidad de capital, ya que el mismo reúne toda la información necesaria para tomar su decisión, debemos señalar nuevamente que el resultado de (2.24) solamente refleja una de las varias condiciones necesarias a cumplir para que estos valores se encuentren contenidos en la senda óptima. Esto es, para caracterizar la función de inversión debemos considerar los demás factores que la afectan en el modelo y verificar las demás condiciones necesarias y suficientes, ya que aquí sólo estamos considerando uno de esos factores.

Por otra parte, como mencionamos anteriormente, el par de vectores de estado y control ( $x^*$ ,  $u^*$ ) será CU-Optimal si se cumplen las condiciones suficientes de la ecuación en (A.7), y las necesarias de la ecuación (A.6) que nos indican que, entre varias otras condiciones, debe verificarse que:

$$\frac{\partial \mathbf{L}^* [x(t)^*, u(t)^*, q(t), \mu(t), t]}{\partial u(t)_j^*} = 0$$

---

<sup>9</sup>/ Lo cual es lógico ya que el empresario continúa contratando la mano de obra en un mercado competitivo y sin rigideces, pero las señales de precio que debían transmitirse mediante competencia perfecta, ahora lo hacen cumpliendo la restricción que hemos impuesto

$$\dot{q}(t)_i = r(t)q(t)_i - \frac{\partial L^* [x(t)_i^*, u(t)_j^*, q(t)_i, \mu(t)_k, t]}{\partial x(t)_i}$$

Como podemos ver, la ecuación (2.24) no fue calculada en los valores óptimos de la variable de estado como nos pide el Principio del Máximo, sino que es en un punto ‘t’ en particular. Recordemos en este sentido que el Principio del Máximo solo nos dice que para una senda interior  $\{K(t), I(t), L(t)\}$  existirá una variable de coestado ‘q(t)’ (función continua en ‘t’) que cumplirá las condiciones necesarias del máximo para todo  $t \geq 0$  y verificará la condición de transversalidad.

Tampoco esa ‘I\*’ encontrada ha sido aplicada en el cálculo de  $\dot{q}(t)$  todavía, ya que eso es parte de una etapa siguiente del proceso de optimización. En otras palabras, la Teoría del Control Óptimo nos indica las condiciones bajo las cuales pueden encontrarse las sendas óptimas de los vectores de las variables de estado y de control, y nos muestra un proceso mediante el cual se van aplicando los sucesivos pasos para encontrar esos valores (Seierstad and Sydsaeter, 1986). Los puntos que vamos encontrando en ese proceso, si bien son muy importantes y arrojan resultados parciales interesantes, no pueden ser tratados como conclusiones finales porque, como se dijo, corresponden a pasos intermedios.

Los valores de la ecuación de Inversión serán los que surjan de resolver las dos ecuaciones diferenciales no lineales planteadas más adelante en la ecuación (2.26) de la página 65, en las cuales están incorporados los valores óptimos de las variables de estado y de control que fueron encontrándose en el proceso de optimización.

Por otra parte, al no actuar el mecanismo de información a través de los precios del mercado de productos, ahora más que antes es necesario completar el proceso de optimización mediante control óptimo, antes de deducir conclusiones.

Un punto adicional a señalar, es el referido al significado del tipo de maximización CU-Optimal que hemos realizado. Recordemos que para hablar de una senda de óptimo (no CU-Optimal), la integral que contiene al funcional objetivo debe ser convergente. Como nos muestra la ecuación (2.21), la integral será convergente siempre que la tasa de interés  $r(t)$  utilizada como factor de descuento sea siempre mayor a cero, desde ahora hasta el infinito. Dado que se trata de una tasa de interés real, ya que el modelo está expresado en bienes, resulta ser un supuesto bastante difícil de sostener, y es por eso que hemos optado por utilizar la optimización convergente como aproximación.

Al utilizar este criterio algo más restrictivo<sup>10</sup>, cada senda de los controles que vamos encontrando, sólo es nuestro ‘candidato a converger al óptimo’, que deberá ser comparado con todas las demás sendas factibles, y de resultar la mayor a todas ellas, resultará elegido. En la formulación más rigurosa sabemos que la senda del ‘candidato’ al óptimo debía ser mayor o igual a cualquier otra que pudiera existir, fijando un criterio suspensivo de la optimalidad de los resultados intermedios.

Es en este sentido por lo que tampoco resulta adecuado afirmar que una de las variables de la optimización, léase ‘q’, expresa toda la información necesaria para

---

<sup>10</sup>/ Debemos señalar que cuando no se incluye el supuesto de tasa de interés mayor a cero, aunque se hable de un óptimo lo que se está obteniendo es un CU-Optimal

decidir, dado que a pesar de haberla despejado, no podemos afirmar que se trata de un valor optimal, y solo podemos asegurar que, si resultara superior a todas las demás sendas factibles, estaría convergiendo al óptimo.

## B.2. Segunda Condición Necesaria

Pasamos entonces ahora a la segunda condición del Principio del Máximo, dada por:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial K(t)} &= \dot{q}(t) - r(t) q(t) \Rightarrow \\
\dot{q}(t) &= r(t) q(t) - \left[ \bar{\alpha} K(t)^{\bar{\alpha}-1} L(t)^{1-\bar{\alpha}} + \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\delta} q(t) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu(t) \bar{\alpha} [K(t)^{\bar{\alpha}-1} L(t)^{1-\bar{\alpha}}]}{M(t)} \right] \Rightarrow \\
\Rightarrow \dot{q}(t) &= r(t) q(t) + \bar{\delta} q(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}-1} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) \Rightarrow \\
\dot{q}(t) &= [r(t) + \bar{\delta}] q(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}-1} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

Esta última ecuación, se corresponde con (2.25) en la página 63 del texto. Antes de continuar podemos reordenar los términos de la ecuación (B.19) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{q}(t) &= [r(t) + \bar{\delta}] q(t) - \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2}_{\Psi_K} - \underbrace{\bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}-1} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)}_{F_K} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{\dot{q}(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 + \bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}-1} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)}{q(t)} &= r(t) + \bar{\delta} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + \frac{\overbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2}^{\Psi_K}}{q(t)} + \frac{\overbrace{\bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}-1}}^{F_K}}{q(t)} - \frac{\overbrace{\bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}-1} \left( \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)}^{F_K}}{q(t)} &= r(t) + \bar{\delta}
\end{aligned}$$

Que nos indica que la rentabilidad por el alquiler ( $r$ ) más el desgaste por el uso del capital físico ( $\bar{\delta}$ ), es equivalente a la suma de la ganancia por la variación del precio sombra del capital ( $\dot{q}$ ), más la contribución marginal del capital al valor de la empresa ( $\Psi_K$ ), más la productividad marginal del capital instalado ( $F_K$ ), menos la misma productividad marginal del capital ponderada por el efecto de la restricción que impone el tamaño del Mercado Meta, donde cada término es expresado en términos del precio sombra del capital, representando así una tasa de rendimiento.

### C. Síntesis del Modelo Ampliado

Listamos a continuación las ecuaciones, para una mejor exposición:

$$\begin{cases} (1) & \dot{q}(t) = [r(t) + \bar{\delta}] q(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}-1} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) \\ (2) & \dot{K}(t) = I(t) - \bar{\delta} K(t) \end{cases} \quad \text{con } K(0) = \bar{K}(0) \quad (\text{B.20})$$

En primer lugar, vamos a reemplazar en la ecuación [B.20 (1)] la cantidad de mano de obra por el valor en el óptimo ‘L\*’ despejado en (2.23).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{q}(t) &= q(t) [r(t) + \bar{\delta}] - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)^*} \right)^{\bar{\alpha}-1} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) = \\ &= q(t) [r(t) + \bar{\delta}] - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \\ &\quad - \bar{\alpha} K(t)^{\bar{\alpha}-1} \left[ \frac{1}{K(t)} \left( \frac{\bar{w}}{(1-\bar{\alpha}) \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \right]^{\bar{\alpha}-1} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) = \\ &= q(t) [r(t) + \bar{\delta}] - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} K(t)^{\bar{\alpha}-1} \frac{1}{K(t)^{\bar{\alpha}-1}} \left( \frac{\bar{w}}{(1-\bar{\alpha})} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}-1)} \frac{1 - \frac{\mu(t)}{M(t)}}{\left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}}} = \\ \dot{q}(t) &= q(t) [r_t + \bar{\delta}] - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

A continuación, vamos a reemplazar el valor de la inversión en el óptimo hallado en la ecuación (2.24), en el valor de ‘ $\dot{K}(t)$ ’ de las ecuaciones del Modelo en [B.20 (2)].

$$\begin{aligned} I(t)^* &= [q(t) - 1] K(t); \quad y \quad \dot{K}(t) = I(t) - \bar{\delta} K(t) \quad \therefore \\ \dot{K}(t) &= [q(t) - 1] K(t) - \bar{\delta} K(t) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{K}(t) &= [q(t) - 1 - \bar{\delta}] K(t) \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

### III. Estado Estacionario

Vamos a despejar las ecuaciones detalladas en el Cuadro 2.6 de la página 66.

1. De (2.26 - b) planteamos que:

$$\dot{K}(t) = 0 \Rightarrow [q(t) - 1 - \bar{\delta}] K(t) = 0 \Rightarrow \bar{q} = 1 + \bar{\delta}$$

2. De (2.26)-(a) despejamos ‘ $q(t)$ ’:

$$\dot{q}(t) = 0 \Rightarrow q(t) [r(t) + \bar{\delta}] - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{\bar{K}(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\bar{\mu}(t)}{\bar{M}(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} = 0$$

Por lo cual, nuestra ‘ $q$ ’ de Tobin en el EE será:

$$\Rightarrow \bar{q} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{I}}{\bar{K}} \right)^2 + \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\bar{\mu}}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}}}{\bar{r} + \bar{\delta}} \quad (\text{B.23})$$

3. Como vimos en 1.;  $\bar{q} = 1 + \bar{\delta}$  y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{I}}{\bar{K}} \right)^2 + \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\bar{\mu}}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} &= (\bar{r} + \bar{\delta})(1 + \bar{\delta}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{K}^{-1} &= \left\{ \left[ (\bar{r} + \bar{\delta})(1 + \bar{\delta}) - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\bar{\mu}}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \right] \frac{2}{\bar{I}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

4. De donde despejamos el stock de capital en el Estado Estacionario volviendo a poner  $\bar{q} = 1 + \bar{\delta}$  como:

$$\bar{K} = \frac{\bar{I}}{\left\{ 2 \left[ (\bar{r} + \bar{\delta})\bar{q} - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\bar{\mu}}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.24})$$

5. Y podemos despejar el volumen de inversión en el estado estacionario como:

$$\bar{I} = \bar{K} \left\{ 2 \left[ (\bar{r} + \bar{\delta})\bar{q} - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\bar{\mu}}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.25})$$

## IV. Aplicación Efectiva de la Restricción Mixta

Para encontrar los puntos en los cuales está activa la restricción mixta que hemos impuesto sobre el tamaño del Mercado Meta, podemos utilizar la esencia del método de los multiplicadores de Lagrange. Esta idea tan simple e ingeniosa del conocido físico-matemático Joseph Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones de igualdad, consiste en ampliar la función objetivo a optimizar construyendo una nueva función llamada *Lagrangiana* en su honor, formada por la función original más la función de restricción igualada a cero al restarle su propio resultado.

Por ejemplo, para una restricción lineal de dos variables cuyo resultado es una constante ‘ $b$ ’, esto implicaría que:

$$x_1 + x_2 = b \quad \Rightarrow x_1 + x_2 - b = 0$$

Cuando sumamos esta restricción al optimal, como su resultado será nulo en el

óptimo, no influirá y por lo tanto el valor de la función Lagrangiana coincidirá con el valor de la función original.

Como segundo paso, y a fin de que la restricción participe en el proceso de obtención del valor óptimo, en lugar de incorporar en la Lagrangiana sólo a la restricción, la incorporamos multiplicada por un valor denominado ‘*Multiplicador de Lagrange*’ también en honor a su creador. De esta manera, cualquiera sea el valor del multiplicador, siempre quedará anulado al multiplicarlo por cero (el valor de la restricción menos su resultado).

Vemos así que el valor de la Función Lagrangiana coincide en el óptimo con el de la función objetivo, pero lo interesante es que si planteamos el proceso de optimización considerando al multiplicador como una más de las variables de elección, nos aseguramos que en el óptimo la restricción esté activa al igualar a cero su primera derivada. Puede verse una descripción detallada y más rigurosa del método en (Intriligator, 1973).

## A. Incorporación de la Restricción

Luego de esta breve introducción, vamos a rehacer las condiciones necesarias desarrolladas en la Sección IV: Presentación y Resolución del Modelo, incorporando la derivada de la restricción mixta respecto del multiplicador  $\mu$ . Tomamos el Lagrangiano dado en (2.22):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) = & \left( K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})} - \bar{w} L(t) - I(t) - \frac{I(t)^2}{2 K(t)} \right) + \\ & + q(t) [I(t) - \bar{\delta} K(t)] + \mu(t) \left( 1 - \frac{K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})}}{M(t)} \right) \end{aligned}$$

y planteamos las primeras derivadas, que coinciden con las originales en los ítem (a), (b) y (c) siguientes, agregando el punto d) con la derivada respecto de  $\mu_t$ , como:

$$(a) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial L(t)} = 0 \Rightarrow (1 - \bar{\alpha}) \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}} - \bar{w} - \frac{\mu(t)(1 - \bar{\alpha})}{M(t)} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}} = 0$$

$$(b) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial I(t)} = 0 \Rightarrow -1 - \frac{I(t)}{K(t)} + q(t) = 0$$

$$(c) \quad -\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial K(t)} = \dot{q}(t) - r(t) q(t) \Rightarrow$$

$$\dot{q}(t) = r(t) q(t) - \left[ \bar{\alpha} K(t)^{\bar{\alpha}-1} L(t)^{1-\bar{\alpha}} + \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\delta} q(t) - \frac{\mu(t) \bar{\alpha} K(t)^{\bar{\alpha}-1} L(t)^{1-\bar{\alpha}}}{M(t)} \right]$$

$$(d) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial \mu(t)} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})}}{M(t)} = 0$$

Podemos despejar en (d) y obtener:

$$K(t)^{\bar{\alpha}} L(t)^{(1-\bar{\alpha})} = M(t) \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}} = \frac{M(t)}{L(t)} \quad (\text{B.26})$$

Y reemplazando en (a) el valor despejado en (B.26) llegamos a:

$$\begin{aligned} (1 - \bar{\alpha}) \left( \frac{M(t)}{L(t)} \right) \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) = \bar{w} &\Rightarrow \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} = \frac{M(t)}{L(t)} - \frac{M(t)}{L(t)} \frac{\mu(t)}{M(t)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{w}^* = (1 - \bar{\alpha}) \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{L(t)} \right); \quad y \quad L(t)^* = (1 - \bar{\alpha}) \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{\bar{w}} \right) & \quad (\text{B.27}) \end{aligned}$$

Recordando ahora que  $\bar{q}$  la habíamos expresado finalmente en [B.20 (1)] como:

$$\dot{q}(t) = [r(t) + \bar{\delta}] q(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\bar{\alpha}-1} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)$$

Podemos reemplazar el resultado obtenido en (B.26) en esta ecuación, a la que llamaremos  $\dot{q}(t)^{M=F}$  para distinguirla de la correspondiente del Modelo General (B.20), y obtener<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= [r(t) + \bar{\delta}] q(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \overbrace{\left( \frac{M(t)}{L(t)} \frac{L(t)}{K(t)} \right)}^{=\frac{M}{K}} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{q}(t)^{M=F} &= [r(t) + \bar{\delta}] q(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{K_t} \right) \quad (\text{B.28}) \end{aligned}$$

Resumimos en el Cuadro 2.7 esta ecuación (B.28) de ‘q’ con la restricción mixta activa y la ecuación dada en  $\dot{K}$  de (2.26) que no ha cambiado e incorpora el valor de ‘I’ en el óptimo.

Vamos a calcular el diagrama de fase para confirmar que coincide con el caso general. Para ello, despejamos ‘q’ de (B.28) y hacemos  $\dot{q} = 0$ , para luego calcular la derivada y obtener la pendiente:

$$\bar{q}(t)^{M=F} = \frac{d \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 + \bar{\alpha} \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{K(t)} \right)}{r(t) + \bar{\delta}} \quad (\text{B.29})$$

$$\left. \frac{\partial \dot{q}(t)^{M=F}}{\partial K(t)} \right|_{\dot{q}(t)=0} = \frac{1}{r(t) + \bar{\delta}} \left[ -\frac{I(t)^2}{K(t)^3} - \bar{\alpha} \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{K(t)^2} \right) \right] < 0 \quad (\text{B.30})$$

No hace falta que calculemos  $\dot{K}(t)$  ya que coincide con la original. Por lo tanto, el diagrama de fase es similar al mostrado en la Figura 2.2, sólo que ahora la pendiente negativa de  $\bar{q} = 0$  es más pronunciada, lo cual se ve claramente al comparar (2.28)

<sup>11</sup>/ Donde hemos considerado que  $\left( \frac{K}{L} \right)^{\bar{\alpha}-1} = \left( \frac{K}{L} \right)^{\bar{\alpha}} \left( \frac{K}{L} \right)^{-1} = \left( \frac{K}{L} \right)^{\bar{\alpha}} \left( \frac{L}{K} \right)$

con (B.30). Pueden verse ambas curvas en la Figura 2.3

Debemos despejar de (B.29) el valor de  $\bar{K}$ , sabiendo por (2.24) que  $\frac{I(t)}{K(t)} = q(t) - 1$

$$\begin{aligned}
[r(t) + \bar{\delta}] q(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 + \bar{\alpha} \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{K(t)} \right) \Rightarrow \\
[r(t) + \bar{\delta}] q(t) &= \frac{1}{2} [q(t)^2 - 2q(t) + 1] + \bar{\alpha} \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{K(t)} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow r(t)q(t) + \bar{\delta}q(t) - \frac{1}{2}q(t)^2 + q(t) - \frac{1}{2} = \\
&\Rightarrow q(t) [r(t) + \bar{\delta} + 1] - \frac{1}{2}q(t)^2 - \frac{1}{2} = \bar{\alpha} \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{K(t)} \right) \Rightarrow \\
\bar{K} &= \frac{\bar{\alpha} [M(t) - \mu(t)]}{q(t) [r(t) + \bar{\delta} + 1] - \frac{1}{2} [q(t)^2 + 1]} \tag{B.31}
\end{aligned}$$

Finalmente podemos despejar en (B.31) el valor del multiplicador del Mercado Meta cuando la Restricción Mixta está activa:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{K} \left[ q(t) [r(t) + \bar{\delta} + 1] - \frac{1}{2} [q(t)^2 + 1] \right]}{\bar{\alpha}} &= M(t) - \mu(t) \Rightarrow \\
\mu(t) &= M(t) - \frac{\bar{K} \left[ q(t) [r(t) + \bar{\delta} + 1] - \frac{1}{2} [q(t)^2 + 1] \right]}{\bar{\alpha}} \tag{B.32}
\end{aligned}$$

Lo que nos está indicando que el multiplicador tiene valor distinto de cero en el Estado Estacionario, lo que expresa que la restricción estará activa y será efectiva, por lo que es necesaria para la explicación del modelo.

## V. Loglinealización

### A. Fundamentación Teórica

La loglinealización de los modelos dinámicos no lineales es una técnica que permite avanzar en la solución de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales, que la mayoría de las veces no tienen una solución algebraica explícita, y sobre los que deberían utilizarse métodos numéricos de solución. Pero uno de los inconvenientes de los métodos numéricos, es la necesidad de establecer los valores de los parámetros previamente, lo cual limita en gran medida las conclusiones que pueden extraerse, ya que los resultados se refieren a los valores ingresados para esos parámetros.

La loglinealización evita este inconveniente, aunque no sin costo, ya que se trata de una aproximación en el entorno del punto elegido (generalmente el estado estacionario), por lo que las conclusiones son válidas en la vecindad de ese punto. Esa

aproximación podría hacerse todo lo precisa que quisiéramos, toda vez que podemos utilizar Series de Taylor de orden "n", calculando las 'n' derivadas en el estado estacionario, pero el volumen de cálculo que requiere limita en gran medida su aplicación<sup>12</sup>. A partir de esta limitación, el método más utilizado para resolver estos problemas es la aproximación de primer orden, y será el empleado también en nuestro caso. El procedimiento de aplicación, aunque engorroso, tiene un sustento teórico

Cuadro B.1: Nomenclatura utilizada en la Loglinealización

Variable	Descripción
$a$	= Escalar arbitrario
$x^*$	= Valor de 'x' en el estado estacionario
$\tilde{x}_t$	= $\ln(\frac{x_t}{x^*})$ : variable auxiliar
$D$	= Primera derivada
$E_f$	= Término de error
$F(x^*)$	= Valor de 'F' cuando 'x' se encuentra en el estado estacionario
$F'(x^*)$	= Primera derivada de 'F' evaluada en el estado estacionario

sólido y bastante simple, que parte del concepto matemático de que dos sistemas son topológicamente equivalentes si sus trayectorias de solución son las mismas luego de un cambio de coordenadas (De la Fuente, 2000)<sup>13</sup>.

Si partimos de una función  $f : C^1$  que tiene un punto ' $x^o$ ' en su dominio, sabemos que podemos aproximarla en ese punto mediante<sup>14</sup>:

$$f(x) = F(x^o) + Df(x^o)(x - x^o) + E_f(x - x^o)$$

Cuando derivamos  $f$ , sabemos que el término de error  $E_f(x - x^o) \rightarrow 0$ , ya que:

$$\lim_{x \rightarrow x^o} \frac{\| E_f(x - x^o) \|}{\| (x - x^o) \|} = 0$$

Entonces, para un sistema autónomo no lineal  $\dot{x} = f(x)$ , continuo y con primeras derivadas ( $C^1$ ), si llamamos  $x^*$  al punto del estado estacionario, habrá un sistema lineal que lo aproxime en la proximidad de ese punto mediante:

$$\dot{x} = Df(x^*)(x - x^*)$$

La condición para que el sistema sea topológicamente equivalente y, por lo tanto, las trayectorias de solución del sistema no lineal y su aproximación linearizada sean las mismas, es que se constituya un equilibrio hiperbólico que se da cuando los valores propios de la derivada  $Df(x^*)$  evaluada en  $x^*$  sean diferentes de cero.

<sup>12</sup>/ Se ha avanzado últimamente con aproximaciones de Taylor de segundo orden.

<sup>13</sup>/ Resumimos la nomenclatura que utilizamos en esta Sección, en el Cuadro B.1.

<sup>14</sup>/ Vamos a utilizar 'D' para denominar la derivada de la función, a fin de que quede bien explícita y llamaremos ' $E_f$ ' al término de error.

En términos prácticos, se trata de aproximar una ecuación no lineal (o un conjunto de ellas), mediante la linealización de la misma y la aplicación de logaritmos a los parámetros, de manera que los mismos queden en forma lineal. El procedimiento puede explicarse en dos pasos, donde el primero es la aplicación de logaritmos a la ecuación, y el segundo es la aproximación del resultado aplicando una Serie de Taylor de primer orden alrededor del estado estacionario <sup>15</sup>.

Podemos explicarlo en un ejemplo general, en el cual una ecuación no lineal venga representada por:

$$F(X_t) = \frac{G(X_t)}{H(X_t)}$$

Donde  $X_t$  es un vector que contiene las variables del modelo, y que puede incluir rezagos o expectativas, además de variables explicativas y parámetros del modelo y tanto G como H son no lineales, así como también F. El primer paso es aplicar logaritmos, con lo que:

$$\ln [F(X_t)] = \ln [G(X_t)] - \ln [H(X_t)]$$

A continuación aproximamos la función con una Serie de Taylor de primer orden, alrededor del estado estacionario, al que denominaremos " $X^*$ "<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} \ln [F(X^*)] + \frac{F'(X^*)}{F(X^*)} (X_t - X^*) &\approx \ln [G(X^*)] + \frac{G'(X^*)}{G(X^*)} (X_t - X^*) - \\ &- \ln [H(X^*)] - \frac{H'(X^*)}{H(X^*)} (X_t - X^*) \end{aligned}$$

Como puede verse, el modelo es ahora lineal en  $X_t$  ya que tanto las funciones como las derivadas evaluadas en el estado estacionario son constantes. Además, podemos aprovechar el hecho que en el estado estacionario se cumple que  $\ln [F(X^*)] = \ln [G(X^*)] - \ln [H(X^*)]$ , para restarlo de la última ecuación y obtener

$$\frac{F'(X^*)}{F(X^*)} (X_t - X^*) \approx \frac{G'(X^*)}{G(X^*)} (X_t - X^*) - \frac{H'(X^*)}{H(X^*)} (X_t - X^*)$$

Existen ciertos 'atajos' o procedimientos que permiten llegar a los mismos resultados, sin pasar por todo el procedimiento completo. Aplicaremos aquí el descrito en (Heijdra, 2009), e introduciremos los tres 'hechos', a), b) y c), para lo cual y como nomenclatura llamaremos a cualquier variable ' $x(t)$ ' en el Estado Estacionario ' $x^*$ ' y supondremos que 'a' es un escalar arbitrario.

Vamos a definir también la variable auxiliar  $\tilde{x}(t)$ , que llevará un tilde y resultará complementaria de la variable original. En términos generales tendremos que:

$$\tilde{x}(t) \equiv \ln \left( \frac{x(t)}{x^*} \right)$$

<sup>15</sup>/ Como dijimos, podría realizarse la aproximación en cualquier otro punto, pero por lo general –y en nuestro caso–, la aproximación se realiza en el Estado Estacionario.

<sup>16</sup>/ Denominaremos  $F'(X^*)$  a la derivada primera de F evaluada en  $X^*$

Por las leyes de los logaritmos,  $\tilde{x}_t$  deberá cumplir que:

$$a \tilde{x}(t) \equiv \ln \left( \frac{x(t)}{x^*} \right)^a \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{x(t)}{x^*} \right)^a \equiv e^{a \tilde{x}(t)}$$

Sabemos además que en la vecindad del Estado Estacionario todas las variables tienden a sus valores estacionarios, por lo que  $x(t) \rightarrow x^*$ . De manera que:

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{x^*} \approx 1 \Rightarrow \tilde{x}(t) = \ln \left( \frac{x(t)}{x^*} \right) \approx \ln(1) \approx 0, \text{ lo cual nos lleva a plantear que} \\ \Rightarrow e^{a\tilde{x}(t)} \approx e^{a0} \approx 1 + a\tilde{x}(t) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Podemos entonces resumir los tres hechos en la vecindad del Estado Estacionario:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{d \ln [x(t)]}{dt} &\equiv \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \\ (b) \quad a\tilde{x}(t) &\equiv \ln \left( \frac{x(t)}{x^*} \right)^a \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{x(t)}{x^*} \right)^a \equiv e^{a\tilde{x}(t)} \quad (\text{B.33}) \\ (c) \quad \left\{ \left( \frac{x(t)}{x^*} \right)^a - 1 \right\} &= a \tilde{x}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{x(t)}{x^*} \right)^a \approx 1 + a\tilde{x}(t) \end{aligned}$$

Para ilustrar el método y sin detenernos en el significado de cada variable, vamos a agregar un ejemplo extraído de (Heijdra, 2009), página 463. Nuestra ecuación a loglinealizar será:

$$\frac{d \ln [\theta(t)]}{dt} = \sigma [r(t) - \rho] - (1 - t_\gamma) Z_o k(t)^{\alpha-1} + \theta(t) + \delta_k$$

que en el estado estacionario será equivalente a:

$$0 = \sigma [r^* - \rho] - (1 - t_\gamma) Z_o (k^*)^{\alpha-1} + \theta^* + \delta_k$$

Al restar esta última de la anterior obtenemos:

$$\frac{d \ln [\theta(t)]}{dt} = \sigma [r(t) - r^* - (\rho - \rho)] - (1 - t_\gamma) Z_o [k(t)^{\alpha-1} - (k^*)^{\alpha-1}] + [\theta(t) - \theta^*] + [\delta_k - \delta_k] =$$

Aplicamos el hecho (c) de B.33:

$$\begin{aligned} &= \sigma r^* \left( \frac{r(t)}{r^*} - 1 \right) - (1 - t_\gamma) Z_o (k^*)^{\alpha-1} \left( \frac{k(t)}{k^*} - 1 \right) + \theta^* \left( \frac{\theta(t)}{\theta^*} - 1 \right) = \\ &= \sigma r^* \tilde{r}(t) - (1 - t_\gamma) Z_o (k^*)^{\alpha-1} \tilde{k}(t) + \theta^* \tilde{\theta}(t) \end{aligned}$$

y considerando el hecho (b) de B.33:

$$\frac{d \ln [\theta(t)]}{dt} = \sigma r^* \ln \left( \frac{r(t)}{r^*} \right) - (1 - t_\gamma) Z_o (k^*)^{\alpha-1} \ln \left( \frac{k(t)}{k^*} \right) + \theta^* \ln \left( \frac{\theta(t)}{\theta^*} \right)$$

Utilizando los criterios recién definidos y aplicando los hechos en la vecindad del estado estacionario indicados en la ecuación (B.33), vamos a desarrollar ahora la loglinealización de las ecuaciones del Modelo Reducido (2.26) de la página 65, comenzando por la primera de ellas que corresponde a ' $\dot{q}(t)$ '.

## B. Loglinealización de (2.26) (a)

Se trata de la siguiente ecuación:

$$\dot{q}(t) = q(t) [r(t) + \bar{\delta}] - \frac{1}{2} \left( \frac{I(t)}{K(t)} \right)^2 - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}}$$

Dividimos por ' $q_t$ ' y aplicamos el hecho B.33 (a) para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} &= \frac{d \ln [q(t)]}{dt} = r(t) + \bar{\delta} - \frac{1}{2} q(t)^{-1} I(t)^2 K(t)^{-2} - \\ &- \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} q(t)^{-1} \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{M(t)} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \end{aligned}$$

Esta ecuación en el estado estacionario resulta igual a:

$$0 = r^* + \bar{\delta} - \frac{1}{2} q^{*-1} I^{*2} K^{*-2} - \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} q^{*-1} (M^* - \mu^*)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} M^{*\frac{-1}{\bar{\alpha}}}$$

Restamos ambas ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln [q(t)]}{dt} &= r(t) - r^* + (\bar{\delta} - \bar{\delta}) - \frac{1}{2} \{ [q(t)^{-1} - q^{*-1}] [I(t)^2 - I^{*2}] [K(t)^{-2} - K^{*-2}] \} - \\ &- \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \{ [q(t)^{-1} - q^{*-1}] \left[ [M(t) - \mu(t)]^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} - (M^* - \mu^*)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \left\langle M(t)^{\frac{-1}{\bar{\alpha}}} - M^{*\frac{-1}{\bar{\alpha}}} \right\rangle \right] \} \end{aligned}$$

Donde ahora agrupando y cancelando términos:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln [q(t)]}{dt} &= r^* \left( \frac{r(t)}{r^*} - 1 \right) - \frac{1}{2q^*} \left( \frac{I^*}{K^*} \right)^2 \left[ \left( \frac{q(t)}{q^*} \right)^{-1} - 1 \right] * \\ &* \left[ \left( \frac{I(t)}{I^*} \right)^2 - 1 \right] \left[ \left( \frac{K(t)}{K^*} \right)^{-2} - 1 \right] - \\ &- \bar{\alpha} \left( \frac{\bar{w}}{1 - \bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} q^{*-1} \left( \frac{M^* - \mu^*}{M^*} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} * \\ &* \left\{ \left[ \left( \frac{q(t)}{q^*} \right)^{-1} - 1 \right] \left[ \left( \frac{M(t) - \mu(t)}{M^* - \mu^*} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} - 1 \right] \left[ \left( \frac{M(t)}{M^*} \right)^{\frac{-1}{\bar{\alpha}}} - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

Aplicando el hecho B.33 (c):

$$\begin{aligned} \frac{d \ln [q(t)]}{dt} = & r^* \tilde{r}(t) - \frac{1}{2q^*} \left( \frac{I^*}{K^*} \right)^2 \left\{ [(-1)\tilde{q}(t)] [2\tilde{I}(t)] [(-2)\tilde{K}(t)] \right\} - \\ & - \left[ \frac{\bar{\alpha}}{q^*} \left( \frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( \frac{M^* - \mu^*}{M^*} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \right] \left\{ \left[ \frac{1}{\bar{\alpha}} [M(t) - \mu(t)] \right] \left[ \frac{-1}{\bar{\alpha}} \tilde{M}(t) \right] \right\} \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el hecho B.33 (b)<sup>17</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{d \ln [q(t)]}{dt} = & r^* \ln \left( \frac{r(t)}{r^*} \right) + \frac{2}{q^*} \left( \frac{I^*}{K^*} \right)^2 \left[ \ln \left( \frac{q(t)}{q^*} \right) + \ln \left( \frac{I(t)}{I^*} \right) - \ln \left( \frac{K(t)}{K^*} \right) \right] - \\ & - \left[ \frac{1}{\bar{\alpha}q^*} \left( \frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\mu^*}{M^*} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \right] \left[ \ln \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right) + \ln \left( \frac{M^*}{M^* - \mu^*} \right) \right] \quad (\text{B.34}) \end{aligned}$$

Vamos a agrupar los términos relacionados con nuestras variables objetivo  $K(t)$  y  $q(t)$ , expresando el modelo en términos de desvíos del Estado Estacionario<sup>18</sup>. Además, para reducir la extensión de las ecuaciones, vamos a definir en el Cuadro B.2 una nomenclatura reducida para obtener:

$$\frac{d \ln [q(t)]}{dt} = E \tilde{q}(t) - E \tilde{K}(t) + r^* \tilde{r}(t) - F \tilde{M}(t) + E \tilde{I}(t) - FG \quad (\text{B.35})$$

### C. Loglinealización de (B.20) (2)

Vamos a tomar la ecuación de movimiento de al Inversión dada en (B.20) para hacer la loglinealización<sup>19</sup>. De esta manera tendremos que:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \bar{\delta}K(t)$$

Dividimos por  $K(t)$  y utilizamos el hecho (B.33) (a)

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{d \ln [K(t)]}{dt} = \frac{I(t)}{K(t)} - \bar{\delta}$$

Esta ecuación en el estado estacionario será:

$$0 = \frac{I^*}{K^*} - \bar{\delta}$$

<sup>17</sup>/ Teniendo en cuenta que  $\frac{M(t)-\mu(t)}{M^*-\mu^*} = \frac{M(t)-\mu(t)}{M(t)} \frac{M^*}{M^*-\mu^*}$ .

<sup>18</sup>/ Esto es así dado que  $\ln \left[ \frac{x(t)}{x^*} \right] = \ln [x(t) - \ln(x^*)]$

<sup>19</sup>/ Tomamos esta ecuación en lugar de la (b) de 2.26 a fin de mantener la inversión como variable dentro del modelo lineal.

Cuadro B.2: Nomenclatura de la Loglinealización

---



---


$$C = \left( \frac{I^*}{K^*} \right)$$

$$E = \frac{2}{q^*} \left( \frac{I^*}{K^*} \right)^2$$

$$F = \frac{1}{\bar{\alpha}q^*} \left( \frac{\bar{w}}{1-\bar{\alpha}} \right)^{\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}}} \left( 1 - \frac{\mu^*}{M^*} \right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}}}$$

$$G = \ln \left( \frac{M^*}{M^* - \mu^*} \right)$$

$$\tilde{I}(t) = \ln[I(t)] - \ln(I^*) = \ln \left( \frac{I(t)}{I^*} \right)$$

$$\tilde{K}(t) = \ln[K(t)] - \ln(K^*) = \ln \left( \frac{K(t)}{K^*} \right)$$

$$\tilde{M}(t) = \ln[M(t) - \mu(t)] - \ln[M(t)] = \ln \left( 1 - \frac{\mu(t)}{M(t)} \right)$$

$$\tilde{q}(t) = \ln[q(t)] - \ln(q^*) = \ln \left( \frac{q(t)}{q^*} \right)$$

$$\tilde{r}(t) = \ln[r(t)] - \ln(r^*) = \ln \left( \frac{r(t)}{r^*} \right)$$


---



---

que al restarla de la original nos dar a:

$$\frac{d \ln [K(t)]}{dt} = [I(t) - I^*] [K(t)^{-1} - K^{*-1}] - (\bar{\delta} - \bar{\delta})$$

Simplificamos y agrupamos nuevamente

$$\frac{d \ln [K(t)]}{dt} = \left( \frac{I^*}{K^*} \right) \left[ \left( \frac{I(t)}{I^*} \right) - 1 \right] \left[ \left( \frac{K(t)}{K^*} \right)^{-1} - 1 \right]$$

Aplicando el Hecho (B.33) (c) a los términos agrupados, tendremos:

$$\frac{d \ln [K(t)]}{dt} = \left( \frac{I^*}{K^*} \right) \tilde{I}(t) [(-1)\tilde{K}(t)]$$

Aplicando finalmente el Hecho (B.33) (b)

$$\frac{d \ln [K(t)]}{dt} = \left( \frac{I^*}{K^*} \right) \left[ \ln \left( \frac{I(t)}{I^*} \right) - \ln \left( \frac{K(t)}{K^*} \right) \right]$$

Para finalizar, aplicamos la nomenclatura de la loglinealización (ver Cuadro B.2), para obtener la ecuación loglineal del capital:

$$\frac{d \ln [K(t)]}{dt} = C \tilde{I}(t) - C \tilde{K}(t) \quad (\text{B.36})$$

## VI. Resumen y Presentación Matricial

Resumimos el Modelo Loglinealizado en el siguiente cuadro:

$$\begin{cases} (1) \quad \frac{d \ln [q(t)]}{dt} = E \tilde{q}(t) - E \tilde{K}(t) + r^* \tilde{r}(t) - F \tilde{M}(t) + E \tilde{I}(t) - FG \\ (2) \quad \frac{d \ln [K(t)]}{dt} = C \tilde{I}(t) - C \tilde{K}(t) \end{cases} \quad (\text{B.37})$$

Además, estas dos ecuaciones de (B.37) pueden expresarse en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d \ln [q(t)]}{dt} \\ \frac{d \ln [K(t)]}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E & -E \\ 0 & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \tilde{K}(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} r^* & E & -F & -F \\ 0 & C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}(t) \\ \tilde{I}(t) \\ \tilde{M}(t) \\ G \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Antes de finalizar vamos a identificar estas matrices, llamando a las variables gen ri-

camente como ‘Q’<sup>20</sup>, por lo que el modelo reducido se verá como:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = B \cdot Q + D \cdot S \quad (\text{B.39})$$

Donde en términos de nuestro modelo matricial (B.38), tendremos que:

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \tilde{K}(t) \end{bmatrix}$$

que en el Estado Estacionario será  $= \bar{Q} = \begin{bmatrix} q^* \\ K^* \end{bmatrix}$

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \begin{bmatrix} \frac{d \ln [q(t)]}{dt} \\ \frac{d \ln [K(t)]}{dt} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} E & -E \\ 0 & -C \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} r^* & E & -F & -F \\ 0 & C & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \tilde{r}(t) \\ \tilde{I}(t) \\ \tilde{M}(t) \\ G \end{bmatrix}$$

## VII. Estabilidad del Modelo

En la Sección anterior (el Anexo C) desarrollamos la loglinealización del Modelo presentado en (2.26), luego de lo cual lo representamos en forma matricial de manera compacta como:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = B \cdot Q + D \cdot S \quad (\text{B.40})$$

---

<sup>20</sup>/ Ver Cuadro 2.5 en la página 62 para las definiciones de estas variables.

Prácticamente toda la información necesaria para conocer la estabilidad de un sistema lineal autónomo, reside en los valores propios de la matriz principal, a la que hemos denominado ‘B’ en la ecuación (B.40), ya que el análisis de los valores y vectores propios de la misma nos indica las posibles alternativas para el sistema.

Antes de avanzar en el desarrollo, vamos a expresar la parte homogénea de la ecuación (B.40) que es la que nos interesa, como:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = X = B Q \quad (\text{B.41})$$

## A. Análisis de Estabilidad del Modelo Ampliado

Vamos a aplicar los conceptos previos a nuestro Modelo Ampliado, recordando que la solución general de nuestro sistema lineal plano estará dada por<sup>21</sup>

$$X(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{B.42})$$

Que también puede expresarse como:

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 V_1 + c_2 V_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]$$

Donde  $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$  es una función de decaimiento exponencial cuando  $\lambda_2 < \lambda_1$ . La matriz principal de nuestro sistema autónomo desarrollado en la Sección VI del Anexo C correspondiente a las variables endógenas (ver página 175) viene dada por<sup>22</sup>:

$$B = \begin{bmatrix} E & -E \\ 0 & -C \end{bmatrix}$$

Como vemos nuestra matriz ‘B’ es triangular inferior, por lo que sabemos que los valores propios vienen dados por los elementos de la diagonal principal, que son ‘E’ y ‘-C’<sup>23</sup>, que resultan reales y distintos. Por lo tanto la traza y el determinante de ‘B’ serán:

$$tr(B) = E + (-C)$$

$$|B| = E(-C) < 0$$

Sabemos que cuando el determinante es negativo, implica que existe un punto de silla con una senda estable, todo lo cual coincide con el resultado obtenido en el diagrama de fase de la Figura 2.2 de la página 67.

Para comprobarlo, podemos utilizar  $X(1)=0$  y aplicar la definición de punto crítico a nuestra ecuación (B.42), sabiendo que el límite de una suma de funciones es equiva-

<sup>21</sup>/ Para los detalles sobre las condiciones de estabilidad, ver (De la Fuente, 2000). Para los detalles sobre la solución de ecuaciones diferenciales, ver (Zill and Cullen, 2009).

<sup>22</sup>/ Pueden verse los parámetros que componen cada coeficiente de ‘B’ en el Cuadro B.2 de la página 173 del Anexo C de este Capítulo.

<sup>23</sup>/ En la Sección VIII: Resolución del Modelo, calculamos estos valores propios y vimos como efectivamente coinciden.

lente a la suma de los límites<sup>24</sup>. De esta forma podemos ver que cuando  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  que es como sucede en nuestro caso donde  $-C < 0 < E$ , tendremos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \underbrace{c_1 V_1 e^{\lambda_1 t}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}}_{\rightarrow 0} = \infty$$

Por lo que en términos generales el sistema será inestable. Sin embargo, cuando consideramos el caso en que  $c_1 = 0$ , como  $\lambda_2 < 0$  vemos que  $X(t)$  tenderá al punto crítico cero a lo largo de la recta determinada por el vector propio  $V_2$  (véase el gráfico de la Figura B.1), resultando así una senda estable en función de que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \Big|_{\substack{\lambda_2 < 0 \\ c_1 = 0}} c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} = 0$$

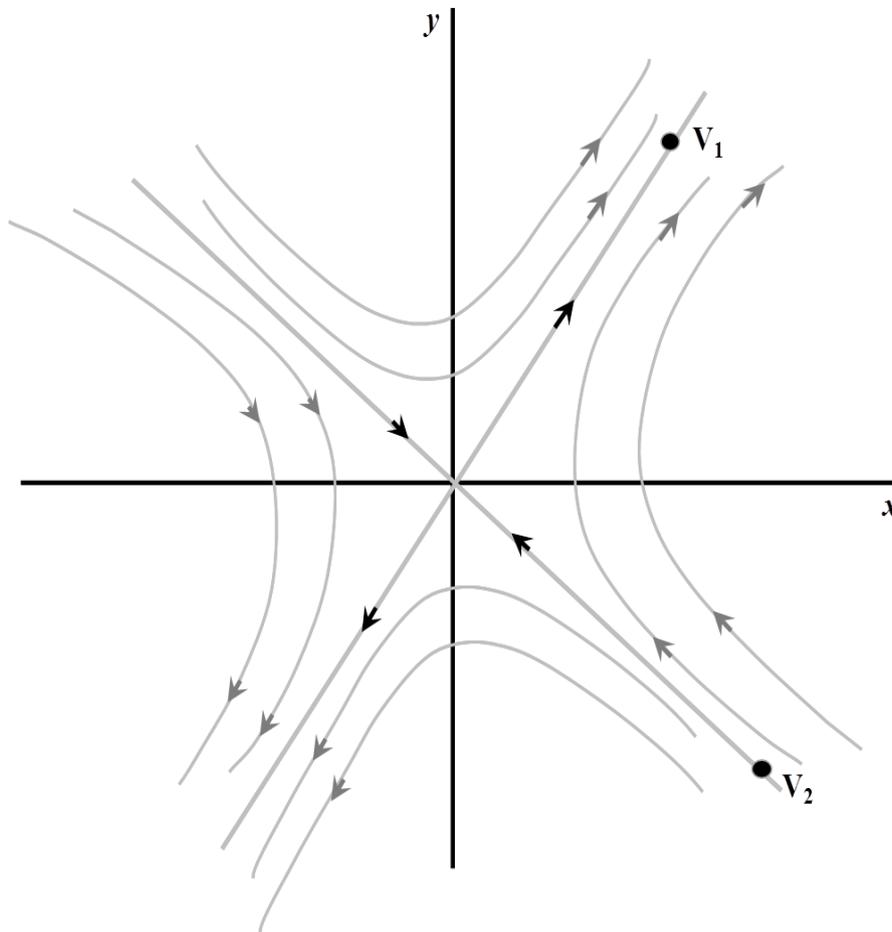


Figura B.1: Punto de Silla del Modelo Ampliado

Cuando el valor inicial del sistema no se encuentra sobre el vector propio  $V_2$  (o aquel que corresponda al valor propio menor que cero, en términos generales), la recta determinada por el otro vector propio ( $V_1$  en este caso), será una asíntota para  $X(t)$ , como se refleja en la Figura B.1.

De esta manera, el punto crítico es inestable aún cuando algunas trayectorias convergirán a cero cuando aumente 't', por lo cual este punto crítico se denomina punto

<sup>24</sup>/ Esto es,  $\lim_{t \rightarrow a} (f + g) = \lim_{t \rightarrow a} f + \lim_{t \rightarrow a} g$ .

de silla.

## VIII. Resolución del Modelo Loglinealizado

Aún cuando ya conocemos los valores propios de la matriz  $B$ <sup>25</sup>, vamos a calcularlos despejando la ecuación característica. para ello, llamando 'λ' a los valores propios y denominando 'I' a la matriz identidad, tendremos que:

$$|B - \lambda I| = \det \left( \begin{bmatrix} E - \lambda & -E \\ 0 & -C - \lambda \end{bmatrix} \right) = (E - \lambda)(-C - \lambda)$$

Realizando la multiplicación e igualando a cero el resultado, podemos despejar los valores de 'λ' de la ecuación característica de la matriz 'B'.

$$\begin{aligned} \lambda^2 + (C - E)\lambda - EC = 0 &\Rightarrow \frac{-(C - E) \pm \sqrt{(C - E)^2 + 4EC}}{2} = \\ \frac{(E - C) \pm \sqrt{(C^2 - 2CE + E^2 + 4EC)}}{2} &= \frac{(E - C) \pm \sqrt{C^2 + 2CE + E^2}}{2} = \\ \frac{(E - C) \pm \sqrt{(C + E)^2}}{2} &= \frac{(E - C) \pm (C + E)}{2} \end{aligned}$$

Por lo que, como habíamos anticipado:

$$\lambda_1 = E \quad \lambda_2 = -C$$

A continuación vamos a encontrar dos vectores propios para estos valores propios, utilizando el hecho que:

$$[B - \lambda_i I] [V_i] = 0$$

Realizando los cálculos correspondientes, tendremos que para  $\lambda_1 = E$ :

$$[B - \lambda_1 I] = \begin{bmatrix} E - E & -E \\ 0 & -C - E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Por lo tanto : } \begin{cases} 0V_{11} - EV_{12} = 0 \\ 0V_{11} - (C + E)V_{12} = 0 \end{cases} \quad \text{que nos lleva a que: } V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando el mismo procedimiento para  $\lambda_2 = -C$

$$[B - \lambda_2 I] = \begin{bmatrix} E + C & -E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

---

<sup>25</sup>/ Por ser una matriz triangular, los valores propios coinciden con los coeficientes de la diagonal principal. Además, por ser una matriz cuadrada sabemos que el determinante será el producto de los valores propios y la traza su suma.

$$\text{Por lo tanto: } \begin{cases} (E + C)V_{21} - EV_{22} = 0 \\ 0V_{21} + 0V_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{21} = V_{22} \frac{E}{E+C} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} \frac{E}{E+C} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que la solución de la parte homogénea, designando las constantes como  $A_i$ , será:

$$\begin{bmatrix} \ln[q(t)] \\ \ln[K(t)] \end{bmatrix}_h = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{Et} + A_2 \begin{bmatrix} \frac{E}{E+C} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-Ct}$$

Que también puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \ln[q(t)] \\ \ln[K(t)] \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{Et} & \frac{E \cdot e^{-Ct}}{E+C} \\ 0 & e^{-Ct} \end{bmatrix} \quad (\text{B.43})$$

A continuación, para encontrar una solución particular de nuestro Modelo Matricial Reducido (B.38), aplicaremos como dijimos el método de variación de parámetros. Para ello debemos construir la llamada ‘*Matriz Fundamental*’ utilizando las columnas de los vectores de la solución de la parte homogénea.

Esta Matriz, a la que llamaremos  $\Phi(t)$ , tiene la propiedad de ser no singular por construcción (lo que asegura que  $\Phi^{-1}$  existe), y por ser la solución de la homogénea, resuelve el sistema  $\dot{X} = AX$  donde ‘ $A$ ’ es la matriz de la parte homogénea, y por lo tanto:

$$\dot{X} = AX \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$$

Con estas características, se verifica que la solución de la parte no homogénea ‘ $X_p$ ’ viene dada por:

$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) F(t) dt$$

Donde ‘ $F(t)$ ’ es la matriz de la parte no homogénea, y las constantes de integración se evitan debido a que quedan subsumidas en las constantes de la solución de la homogénea. Para mayores detalles del método, puede consultarse (Zill and Cullen, 2009).

Comenzamos entonces por construir la Matriz Fundamental para nuestro problema, que viene dada por (B.43), y calcular su inversa.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{Et} & \frac{E \cdot e^{-Ct}}{C+E} \\ 0 & e^{-Ct} \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-Et} & \frac{-e^{-Et}E}{C+E} \\ 0 & e^{Ct} \end{bmatrix}$$

Nuestra matriz ‘ $F(t)$ ’ de la parte NO homogénea está dada por:

$$D * S = \begin{bmatrix} r^* & E & -F & -F \\ 0 & C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}(t) \\ \tilde{I}(t) \\ \tilde{M}(t) \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^* \tilde{r}(t) + E \tilde{I}(t) - F \tilde{M}(t) - FG \\ 0 + C \tilde{I}(t) + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que la solución de la ecuación particular deberá tener la forma siguiente:

$$X_P = \begin{bmatrix} e^{Et} & \frac{E \cdot e^{-Ct}}{C+E} \\ 0 & e^{-Ct} \end{bmatrix} \int \left\{ \begin{bmatrix} e^{-Et} & \frac{-e^{-Et}E}{C+E} \\ 0 & e^{Ct} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^* \tilde{r}(t) + E\tilde{I}(t) - F\tilde{M}(t) - FG \\ C\tilde{I}(t) \end{bmatrix} \right\}$$

Dado lo complejo del planteo, vamos a considerar que las variables no dependen explícitamente del tiempo, sino que son observaciones de la evolución de cada variable en el momento 't'. Esto nos permitirá integrar el lado derecho de la ecuación y alcanzar un resultado aceptable.

Vamos entonces a multiplicar las dos matrices dentro de la integral, para luego calcularla integrando cada elemento de la matriz resultante.

$$X_P = \begin{bmatrix} e^{Et} & \frac{E \cdot e^{-Ct}}{C+E} \\ 0 & e^{-Ct} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} e^{-Et} \left[ r^* \tilde{r}(t) + E\tilde{I}(t) - F\tilde{M}(t) - FG \right] - \frac{CE\tilde{I}(t)e^{-Et}}{C+E} \\ C\tilde{I}(t)e^{Ct} \end{bmatrix}$$

Resolvemos la integral que resultará:

$$X_P = \begin{bmatrix} e^{Et} & \frac{E \cdot e^{-Ct}}{C+E} \\ 0 & e^{-Ct} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{-Et}}{-E} \left[ r^* \tilde{r}(t) + E\tilde{I}(t) - F\tilde{M}(t) - FG \right] - \frac{CE\tilde{I}(t)e^{-Et}}{(-E)(C+E)} \\ \frac{C\tilde{I}(t)e^{Ct}}{C} \end{bmatrix}$$

con lo cual el resultado final de la solución particular será:

$$\begin{bmatrix} \ln[q(t)] \\ \ln[K(t)] \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot \tilde{I}(t)}{C+E} - \frac{\tilde{r}(t) \cdot r^* - F \cdot G + E \cdot \tilde{I}(t) - F \cdot \tilde{M}(t)}{E} + \frac{C \cdot \tilde{I}(t)}{C+E} \\ \tilde{I}(t) \end{bmatrix}$$

Donde agregamos el subíndice 't' en las variables, para identificar que se refieren al valor que adopta en el tiempo  $\ln\left(\frac{x(t)}{x^*}\right)$ . Ahora, agrupando y simplificando términos este resultado puede reducirse considerando que:

$$\begin{aligned} \frac{EI}{C+E} - \frac{EI}{E} + \frac{CI}{C+E} &= \frac{EEI - (C+E)EI + CIE}{E(C+E)} = \\ &= \frac{EEI - CEI - EEI + CIE}{E(C+E)} = 0 \end{aligned}$$

Con lo que la solución particular vendrá dada por:

$$\begin{bmatrix} \ln[q(t)] \\ \ln[K(t)] \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \frac{-r^* \cdot \tilde{r}(t) + F \cdot G + F \cdot \tilde{M}(t)}{E} \\ \tilde{I}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.44})$$

Por lo que el resultado general de la suma de las soluciones de la homogénea y la particular será:

$$\begin{bmatrix} \ln[q(t)] \\ \ln[K(t)] \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{Et} + A_2 \begin{bmatrix} \frac{E}{E+C} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-Ct} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{I}(t) - \begin{bmatrix} \frac{r^*}{E} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{r}(t) + \begin{bmatrix} \frac{F}{E} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{M}(t) + \begin{bmatrix} \frac{F}{E} \\ 0 \end{bmatrix} G \quad (\text{B.45})$$

# C

## Anexo C: Cuadros y Figuras Econométricas

Los datos de FRED (Federal Reserve Economic Data, Data Updated: 2018-08-23) fueron tomados de <https://fred.stlouisfed.org>, Economic Research Division, Federal Reserve Bank of St. Louis. Los datos correspondientes a PWR provienen de Feenstra, Robert C., Robert Inkllar and Marcel P. Timmer (2015), “The Next Generation of the Penn World Table” *American Economic Review*, 105(10), 3150-3182, available for download at [www.ggdcc.net/pwt](http://www.ggdcc.net/pwt)

Cuadro C.1: Descripción de las Series de Tiempo de Estados Unidos

Descripción	EvIEWS	Unidad de Medida	Frecuencia	Fuente
Tasa Prime	RD	por ciento	anualizada	FRED
1ª Diferencia RD	$\Delta(\text{RD})$	unidades	anualizada	propia s/FRED
Tasa de Descuento	R	por ciento	anualizada	FRED
Índice Líder Compuesto	ILI	1980 =100	trimestral	FRED
Relación Crédito a PIB	CREPIB	porcentaje	trimestral	FRED
“q” de Tobin	Q	unidades	anualizada	V.Furstenberg1977
Logaritmo de ‘q’	LQ	unidades	anual	s/V.Furstenberg1977
“q1” 1950-2010	Q1	unidades	anualizada	Mihaljevic2010
Logaritmo de ‘q1’	LQ1	unidades	anual	s/Mihaljevic2010
Relación (I/K)	IK	unidades	anual	FRED
Relación $(I/K)^2$	IK2	unidades	anual	propio s/FRED
Logaritmo de (I/K)	LIK	unidades	anual	propio s/FRED
Logaritmo de $(I/K)^2$	LIK2	unidades	anual	propio s/FRED
GDP Mundial	GDP	dólares	anual	PWT
Mercado Meta (GDP USA)	MM	dólares	anual	FRED
Logaritmo de MM	LMM	unidades	anual	propio s/FRED
Ficticia 1958	DU58	0 ó 1	anual	Propio
Ficticia 1975	DU75	0 ó 1	anual	Propio
Ficticia 1994	DU94	0 ó 1	anual	Propio

FRED: Federal Reserve Economic Data

PWT: Penn World Table (Feenstra et al., 2015)

Fecha	Inversión/ Capital	(Inversión/ Capital) <sup>2</sup>	GDP_USA	Consumo	Tasa_Prime	Impo	Expo	Credito/PIB	Composit Lider Indicator	Tasa Descuento	q de Von Furstenberg	q de Mihaljevic
t	ik	ik2	mm	co	rp	im	ex	crepib	ili	r	q	q1
1950	0,039070797	0,001526527	2,289546	1,446357	2,069166667	0,077696	0,062718	0	0	0	0	0,35
1951	0,037706189	0,001421757	2,473758	1,469022	2,555	0,080749	0,076855	0	0	0	0	0,38
1952	0,033238094	0,001104771	2,574898	1,515387	3	0,087856	0,07353	55,125	0	1,75	0,603	0,36
1953	0,033650833	0,001132379	2,695614	1,587241	3,169166667	0,096114	0,068603	57,175	0	1,99	0,565	0,34
1954	0,031087704	0,000966445	2,680023	1,620408	3,0525	0,091375	0,071925	60,425	0	1,5975	0,692	0,46
1955	0,03669735	0,001346696	2,871198	1,739955	3,156666667	0,102385	0,079605	63,85	101,9865	1,886666667	0,779	0,55
1956	0,035158915	0,001236149	2,932388	1,790802	3,77	0,110696	0,092747	66,575	100,6008	2,7675	0,746	0,55
1957	0,032618863	0,00106399	2,994132	1,835197	4,201666667	0,115345	0,100833	68,525	97,08684	3,115	0,666	0,47
1958	0,029322286	0,000859796	2,971951	1,851098	3,833333333	0,120824	0,087201	71,45	101,9203	2,156666667	0,777	0,62
1959	0,033677499	0,001134174	3,178182	1,956716	4,4775	0,133539	0,09617	73,375	100,9515	3,358333333	0,85	0,68
1960	0,03264637	0,001065785	3,259971	2,010405	4,820833333	0,135308	0,112866	75,775	98,92774	3,5275	0,824	0,68
1961	0,031731185	0,001006868	3,343546	2,051639	4,5	0,134401	0,113473	79,2	101,2479	3	0,946	0,8
1962	0,034218633	0,001170915	3,548409	2,153078	4,5	0,149653	0,119201	80,225	98,77612	3	0,861	0,75
1963	0,035155369	0,0012359	3,702944	2,241926	4,5	0,153688	0,127689	83,1	100,194	3,228333333	1	0,8
1964	0,036383307	0,001323745	3,91628	2,375349	4,5	0,161854	0,142757	85,15	101,0745	3,551666667	1,064	0,9
1965	0,039618415	0,001569619	4,17075	2,528033	4,535	0,179081	0,146755	86,925	101,6316	4,035	1,14	0,97
1966	0,041237345	0,001700519	4,445853	2,669261	5,625	0,205694	0,156909	86,825	98,97234	4,5	0,879	0,8
1967	0,038197681	0,001459063	4,567781	2,749058	5,633333333	0,220681	0,160486	87,7	100,7509	4,19	0,941	0,96
1968	0,03886992	0,001510871	4,792315	2,907469	6,3125	0,253568	0,173169	88,55	101,3189	5,1625	1,022	1,05
1969	0,039486842	0,001559211	4,942067	3,015908	7,951666667	0,268016	0,181615	88,875	98,92404	5,870833333	0,625	0,82
1970	0,035921568	0,001290359	4,951262	3,086876	7,91	0,279449	0,200967	89,95	98,78008	5,9475	0,72	0,75
1971	0,03839275	0,001474003	5,114325	3,204761	5,723333333	0,294364	0,20445	91,375	101,1529	4,879166667	0,747	0,8
1972	0,041221124	0,001699181	5,383282	3,401046	5,248333333	0,327489	0,220386	93,075	103,4211	4,5	0,869	0,9
1973	0,044013367	0,001937176	5,687207	3,569358	8,021666667	0,342686	0,26186	95	100,6873	6,443333333	0,766	0,61
1974	0,039824117	0,00158596	5,656465	3,539458	10,798333333	0,334923	0,282659	96,825	95,70247	7,825833333	0,558	0,29
1975	0,032609676	0,001063215	5,644843	3,619713	7,8625	0,297699	0,280849	95,625	100,0061	6,249166667	0,606	0,49
1976	0,037803966	0,00142914	5,948995	3,821455	6,84	0,355909	0,293112	93,625	101,2126	5,4975	0,69	0,53
1977	0,041844598	0,00175097	6,224086	3,982966	6,824166667	0,394817	0,300157	95,475	0	5,464166667	0	0,43
1978	0,045008313	0,002025748	6,568608	4,157278	9,056666667	0,429036	0,33184	97,55	0	7,455	0	0,4
1979	0,044894927	0,002015554	6,77658	4,256096	12,665833333	0,43617	0,364701	98,875	0	10,283333333	0	0,41
1980	0,039212774	0,001537642	6,759181	4,242809	15,265833333	0,407138	0,40397	100,3	0	11,77	0	0,46
1981	0,041508072	0,00172292	6,93071	4,301639	18,87	0,417771	0,408893	99,35	0	13,416666667	0	0,38
1982	0,036539547	0,001263059	6,805758	4,364607	14,860833333	0,412453	0,377585	100,625	0	10,028333333	0	0,41
1983	0,037959008	0,001440886	7,117729	4,611691	10,794166667	0,464501	0,367801	102,25	0	8,5	0	0,45
1984	0,046831677	0,002193206	7,632812	4,854301	12,0425	0,577575	0,397787	104,45	0	8,7975	0	0,4
1985	0,045276919	0,002049999	7,951074	5,105633	9,933333333	0,615057	0,411116	109,65	0	7,6925	0	0,49
1986	0,04392574	0,001924711	8,226392	5,3164	8,3325	0,667517	0,442617	115,6	0	6,325833333	0	0,54
1987	0,043831043	0,00192116	8,51099	5,496928	8,203333333	0,707186	0,490989	120,4	0	5,6625	0	0,53
1988	0,043629977	0,001903575	8,866498	5,726528	9,315	0,734965	0,57059	122,475	0	6,1975	0	0,55
1989	0,044111865	0,001945857	9,192134	5,893491	10,873333333	0,767331	0,636646	123,175	0	6,924166667	0	0,64
1990	0,041872316	0,001753291	9,365494	6,01219	10,009166667	0,794779	0,69281	123,575	0	6,9825	0	0,63
1991	0,038316134	0,001468126	9,355355	6,023043	8,463333333	0,79359	0,738634	122,225	0	5,4475	0	0,84
1992	0,040243966	0,001619577	9,684892	6,244696	6,251666667	0,849219	0,789802	118,875	0	3,251666667	0	0,96
1993	0,042491721	0,001805546	9,951502	6,462244	6	0,922648	0,815671	116,925	0	3	0	1,03
1994	0,046388049	0,002149996	10,352432	6,712617	7,138333333	1,032705	0,887743	117,45	0	3,595833333	0	0,96
1995	0,046849332	0,00217616	10,630321	6,910673	8,829166667	1,11533	0,978995	118,85	0	5,208333333	0	1,14
1996	0,048326002	0,002433055	11,03135	7,15047	8,270833333	1,212325	1,059034	120,475	0	5,02	0	1,28
1997	0,053327906	0,002843866	11,521938	7,419722	8,441666667	1,375593	1,185164	121	0	5	0	1,45
1998	0,056514731	0,003193915	12,036283	7,81379	8,354166667	1,536383	1,212847	124,6	0	4,915833333	0	1,61
1999	0,059228687	0,003508037	12,610491	8,22537	7,994166667	1,709971	1,273264	128,925	0	4,618333333	0	1,88
2000	0,061049848	0,003727084	13,130987	8,643352	9,233333333	1,930302	1,379508	132,925	0	5,7325	0	1,4
2001	0,055886089	0,003123255	13,262079	8,861067	6,921666667	1,876199	1,299714	136	0	3,41	0	1,18
2002	0,053969864	0,002912746	13,493064	9,088689	4,675	1,944431	1,277139	140,375	0	1,173333333	0	0,82
2003	0,054802545	0,003003319	13,879129	9,377496	4,1225	2,040052	1,305013	144,8	0	2,104166667	0	1,07
2004	0,058166316	0,00338332	14,406382	9,729331	4,341666667	2,272594	1,431185	147,575	0	2,395833333	0	1,07
2005	0,060201852	0,003624263	14,912509	10,075884	6,186666667	2,420963	1,533198	151,775	0	4,25	0	0,91
2006	0,060264837	0,003631851	15,338257	10,384547	7,9575	2,581491	1,676442	157,85	0	6,020833333	0	0,91
2007	0,057299133	0,003283191	15,626029	10,615344	8,05	2,645971	1,822323	164,85	0	5,791666667	0	0,89
2008	0,051547532	0,002657148	15,604687	10,592837	5,0875	2,587052	1,925433	168,575	0	2,166666667	0	0,55
2009	0,040251683	0,001620198	15,208834	10,45997	3,25	2,248575	1,763763	167,075	0	0,5	0	0,92
2010	0,045486612	0,002069032	15,598753	10,64298	3,25	2,543762	1,977853	160,85	0	0,729166667	0	0,9
2011	0,047933738	0,002297643	15,840664	10,843831	3,25	2,687119	2,119049	153,875	0	0,75	0	0
2012	0,052476431	0,002753776	16,197007	11,006814	3,25	2,759851	2,19128	150,025	0	0,75	0	0
2013	0,055328138	0,003061203	16,495369	11,16686	3,25	2,802446	2,269621	149	0	0,75	0	0
2014	0,057658817	0,003324539	16,899831	11,494331	3,25	2,944745	2,367016	148,575	0	0,75	0	0

Figura C.1: Base de Datos Utilizada

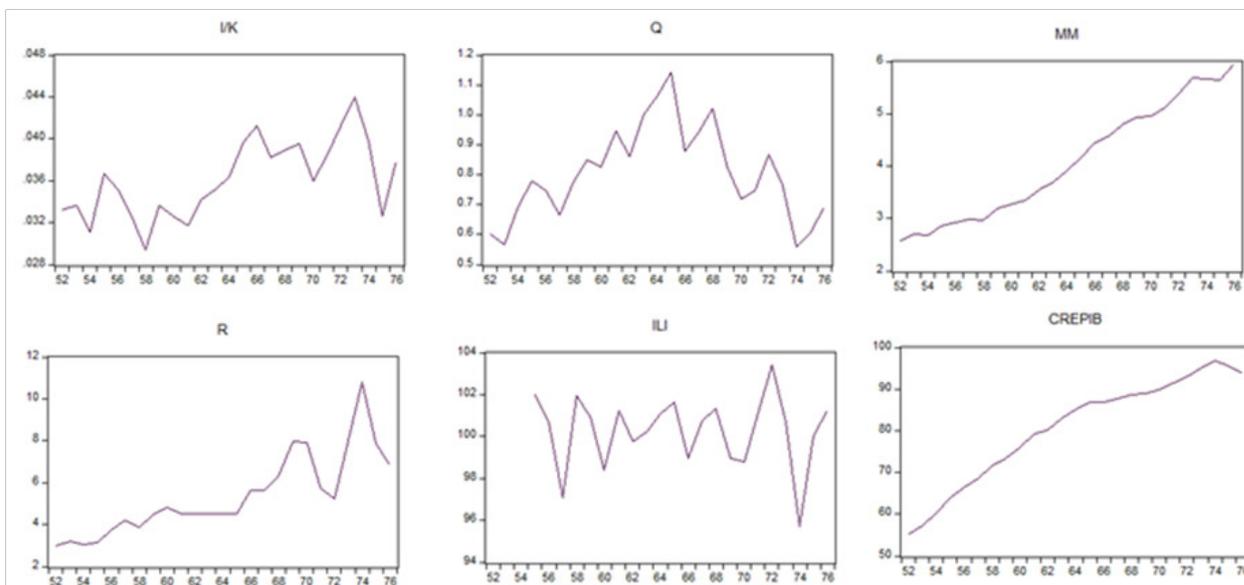


Figura C.2: Comportamiento Histórico de las Variables

	IK	Q	MM	CREPIB	RD	ILI
IK	1.000000	0.126398	0.652320	0.606719	0.572237	0.053943
Q	0.126398	1.000000	-0.268509	-0.057644	-0.390930	0.483704
MM	0.652320	-0.268509	1.000000	0.947881	0.905318	-0.063459
CREPIB	0.606719	-0.057644	0.947881	1.000000	0.866170	-0.074063
RD	0.572237	-0.390930	0.905318	0.866170	1.000000	-0.402918
ILI	0.053943	0.483704	-0.063459	-0.074063	-0.402918	1.000000

Figura C.3: Matriz de Correlaciones

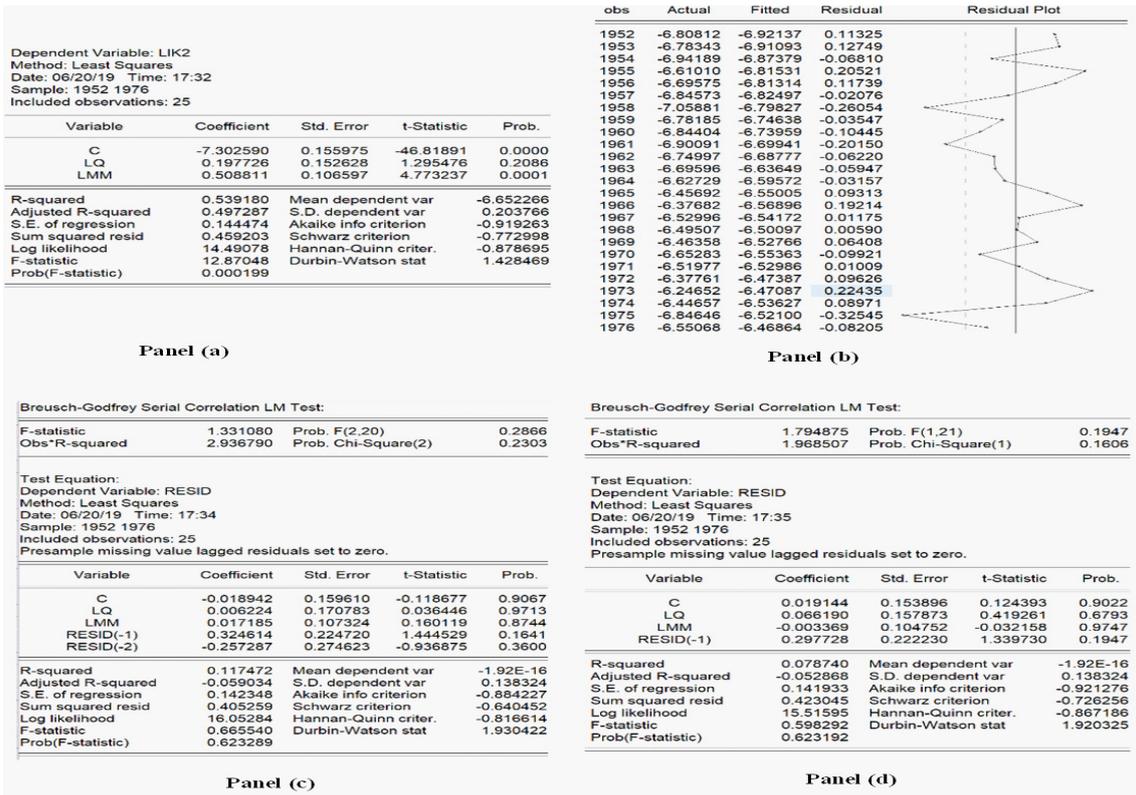


Figura C.4: Regresión Inicial

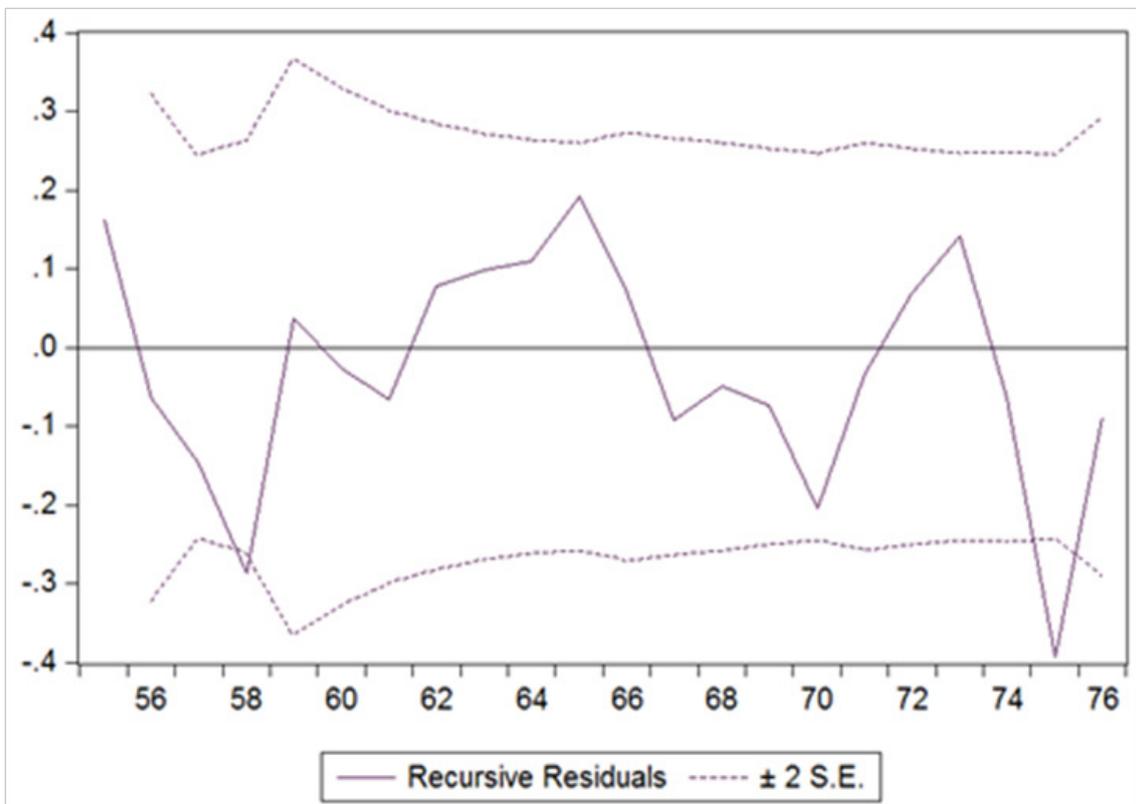


Figura C.5: Estimación Recursiva de los Residuos del Modelo

Cuadro C.2: Estimaciones Previas Realizadas con el Modelo 1952-1976

Dependiente(*) →	L.IK2	L.IK2	L.IK2	IK2	L.IK2	IK2	L.IK2	L.IK2	L.IK2	IK2
↓ Explicativas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C			-7.303	0.0003	-6.835	0.007			-7.650	-0.0002
Q				0.0004		0.002				0.0006
MM				0.0002		0.007				0.0003
LOG(Q)		0.418	0.197		0.615		0.987		0.355	
LOG(MM)		1.063	0.509				2.712	2.898	0.986	
R		-0.083								
RD	0.017				0.137		-0.015	-0.130		
ILI	-0.078	-0.076				$-5.2e^{-05}$	-0.059	-0.034		
CREPIB	0.015					$-5.0e^{-05}$	-0.051			
LQ*DU58	0.792							0.548		
LMM*DU75	-0.010									
DU58					-0.280				-0.322	-0.0004
DU75					-0.122			-0.318	-0.304	-0.0005
$R^2$	0.1684	0.4252	0.5392	0.5482	0.6554	0.6737	0.6907	0.7211	0.8169	0.8238
$\bar{R}^2$	0.03	.3929	0.4973	0.5071	0.5865	0.5969	0.6179	0.6340	0.7803	0.7886
SE of Regr	0.205	0.492	0.1445	0.0002	0.3434	$4.9e^{-07}$	0.2648	0.239	0.1825	$3.1e^{-07}$
D-W	1.28	1.096	1.4285	1.3668	1.6087	1.113	0.982	1.662	2.055	2.095

(\*): Agregamos un punto en 'L.IK2' para distinguirlo mejor de 'IK2'.

# I. Estimación 1952-76 - Página 90

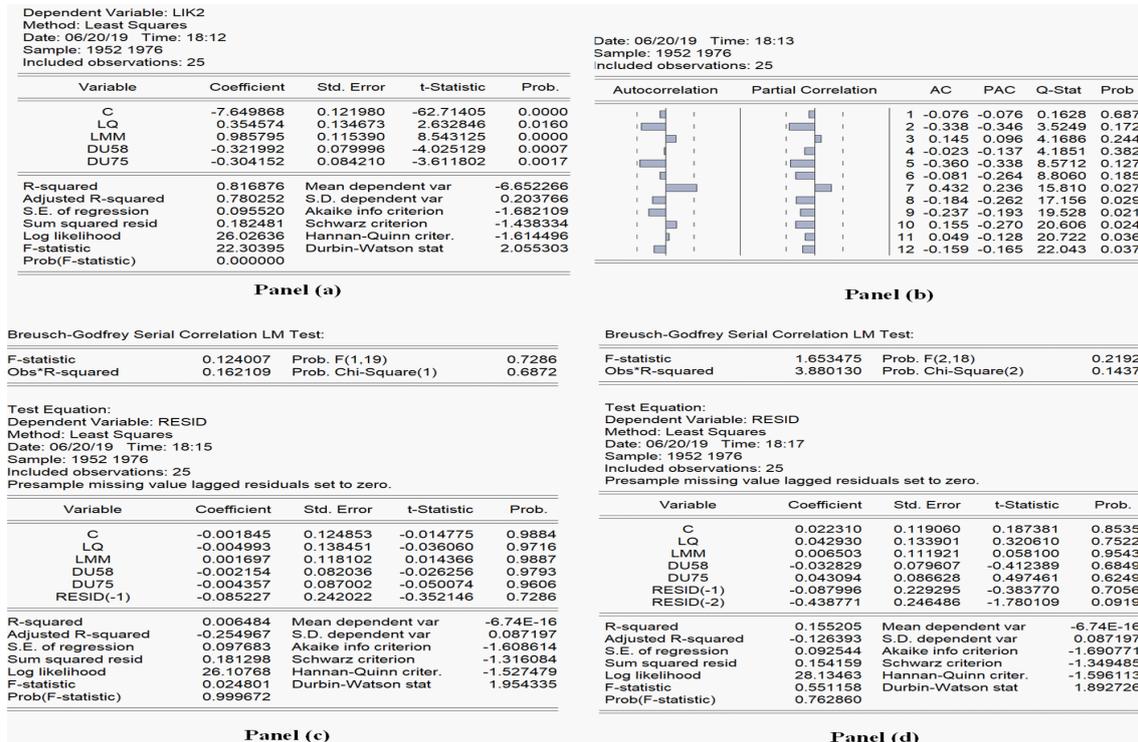


Figura C.6: Estimación del Modelo Incluyendo Variables Binarias

- El ajuste de la regresión es muy bueno, ya que registra un  $\bar{R}^2 = 78\%$  y la significatividad conjunta medida por la distribución 'F' es muy alta, con un p-value prácticamente nulo.
- Los signos de la 'q' de Tobin y del Mercado Meta son los esperados (positivos y significativos)
- Todos los parámetros resultan significativos individualmente, al 98% de probabilidad.
- El estadístico de Durbin-Watson de 2,06 cae dentro de la zona de no aceptación de presencia de autocorrelación, ya que para  $k=4$  y  $N=25$ , los valores de tabla son  $d_L = 1,038$  y  $d_U = 1,767$ , cayendo entonces en la zona de No Autocorrelación.

Vemos en el Panel (b) de la Figura C.6 las funciones de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial del modelo, que nos muestran que no existe correlación entre los residuos de la regresión. No obstante ello, y para cerciorarnos, agregamos en los Paneles (c) y (d) la prueba de máxima verosimilitud de Breusch-Godfrey, con uno y con dos rezagos. Los dos casos nos muestran la ausencia de autocorrelación de los residuos, toda vez que los p-value (Tanto de 'F' como de ' $\chi^2$ '), son superiores al 5%.

Dependent Variable: LIK2  
Method: Least Squares  
Date: 08/28/18 Time: 19:11  
Sample: 1952 1976  
Included observations: 25

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-7.683582	0.217438	-35.33688	0.0000
LQ	0.336049	0.169148	1.986719	0.0616
LMM	1.027653	0.250543	4.101712	0.0006
RD	-0.007593	0.040064	-0.189517	0.8517
DU58	-0.318011	0.084645	-3.757000	0.0013
DU75	-0.311445	0.094507	-3.295478	0.0038

R-squared	0.817222	Mean dependent var	-6.652266
Adjusted R-squared	0.769122	S.D. dependent var	0.203766
S.E. of regression	0.097909	Akaike info criterion	-1.603998
Sum squared resid	0.182137	Schwarz criterion	-1.311467
Log likelihood	26.04997	Hannan-Quinn criter.	-1.522862
F-statistic	16.99023	Durbin-Watson stat	2.059893
Prob(F-statistic)	0.000002		

Figura C.7: Estimación del Modelo Incluyendo la Tasa Prime

## A. Cointegración - Página 91

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-3.543330	0.0155
Test critical values:		
1% level	-3.737853	
5% level	-2.991878	
10% level	-2.635542	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.017209
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.015847

Phillips-Perron Test Equation  
Dependent Variable: D(RESIDUOS)  
Method: Least Squares  
Date: 08/28/18 Time: 18:33  
Sample (adjusted): 1953 1976  
Included observations: 24 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RESIDUOS(-1)	-0.730572	0.203757	-3.585511	0.0016
C	-0.005640	0.027977	-0.201589	0.8421

R-squared	0.368830	Mean dependent var	-0.008137
Adjusted R-squared	0.340140	S.D. dependent var	0.168674
S.E. of regression	0.137016	Akaike info criterion	-1.057776
Sum squared resid	0.413017	Schwarz criterion	-0.959605
Log likelihood	14.69331	Hannan-Quinn criter.	-1.031731
F-statistic	12.85589	Durbin-Watson stat	1.929338
Prob(F-statistic)	0.001648		

Panel (a)  
Test de Phillips-Perron

Null Hypothesis: RESIDUOS has a unit root  
Exogenous: Constant  
Bandwidth: 2 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

Null Hypothesis: RESIDUOS has a unit root  
Exogenous: Constant  
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=5)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.585511	0.0141
Test critical values:		
1% level	-3.737853	
5% level	-2.991878	
10% level	-2.635542	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
Dependent Variable: D(RESIDUOS)  
Method: Least Squares  
Date: 08/28/18 Time: 18:33  
Sample (adjusted): 1953 1976  
Included observations: 24 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RESIDUOS(-1)	-0.730572	0.203757	-3.585511	0.0016
C	-0.005640	0.027977	-0.201589	0.8421

R-squared	0.368830	Mean dependent var	-0.008137
Adjusted R-squared	0.340140	S.D. dependent var	0.168674
S.E. of regression	0.137016	Akaike info criterion	-1.057776
Sum squared resid	0.413017	Schwarz criterion	-0.959605
Log likelihood	14.69331	Hannan-Quinn criter.	-1.031731
F-statistic	12.85589	Durbin-Watson stat	1.929338
Prob(F-statistic)	0.001648		

Panel (b)  
Test de Dickey-Fuller Aumentado

Figura C.8: Pruebas de Estacionariedad de los Residuos

en la Figura C.9 los Paneles de la derecha corresponden a cada serie ‘en niveles’, mientras que en los de la izquierda están ‘en diferencias’. De esta manera, en el Panel (a) podemos aceptar que la primera diferencia del logaritmo de (I/K) es estacionaria, dado que los p-values son inferiores al 5%. El Panel (b), mientras tanto, acepta la presencia de raíz unitaria y por lo tanto se rechaza la estacionariedad de (I/K) en niveles. Concluimos que ‘LIK2’ es integrada de orden uno, o sea, I(1)

Lo mismo podemos decir acerca de los resultados de los Paneles (c) y (d) correspondientes a la ‘q’ de Tobin (en niveles a la derecha y en diferencias a la izquierda), y

Null Hypothesis: D(IK) has a unit root Exogenous: Constant Bandwidth: 8 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-5.794731	0.0001
Test critical values:		
1% level	-3.724070	
5% level	-2.986225	
10% level	-2.632604	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		
Residual variance (no correction)		1.02E-05
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		4.54E-06

**Panel (a): D(IK)**

Null Hypothesis: IK has a unit root Exogenous: Constant Bandwidth: 1 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-2.427597	0.1447
Test critical values:		
1% level	-3.724070	
5% level	-2.986225	
10% level	-2.632604	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		
Residual variance (no correction)		8.37E-06
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		8.62E-06

**Panel (b): IK**

Null Hypothesis: D(Q) has a unit root Exogenous: Constant Bandwidth: 13 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-5.138926	0.0004
Test critical values:		
1% level	-3.752945	
5% level	-2.998064	
10% level	-2.638752	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		
Residual variance (no correction)		0.013223
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		0.009677

**Panel (c): D(Q)**

Null Hypothesis: Q has a unit root Exogenous: Constant Bandwidth: 4 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-2.039728	0.2691
Test critical values:		
1% level	-3.737853	
5% level	-2.991878	
10% level	-2.635542	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		
Residual variance (no correction)		0.010778
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		0.010225

**Panel (d): Q**

Null Hypothesis: D(MM) has a unit root Exogenous: Constant Bandwidth: 3 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-4.329511	0.0024
Test critical values:		
1% level	-3.724070	
5% level	-2.986225	
10% level	-2.632604	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		
Residual variance (no correction)		0.010675
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		0.009102

**Panel (e): D(MM)**

Null Hypothesis: MM has a unit root Exogenous: Constant Bandwidth: 5 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	1.183869	0.9971
Test critical values:		
1% level	-3.724070	
5% level	-2.986225	
10% level	-2.632604	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		
Residual variance (no correction)		0.010238
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		0.008142

**Panel (f): MM**

Figura C.9: Pruebas de Raíz Unitaria de las Series

los Paneles (e) y (f) correspondientes al Mercado Meta.

## B. Prueba de Johansen - Página 93

### Número de Rezagos

Puede apreciarse que los criterios utilizados por EViews han sido: el de Máxima Verosimilitud Modificado (LR), el de Predicción Final de Error (FPE), el de Akaike (AIC), el de Schwarz (SC) y el de Hannan-Quinn (HQ). Todos ellos nos indican que el mejor ajuste se produce con dos rezagos en la estimación, por lo que realizaremos la prueba de Johansen con dos lags.

### Resultados del Test

Debemos notar que las variables endógenas son “LIK, LQ y LMM”, y las exógenas son “DU58 y DU75”. De acuerdo a lo definido en el paso anterior, se aplicaron dos rezagos (indicados como: “lags interval 1 to 2”), .

**VAR Lag Order Selection Criteria**  
 Endogenous variables: LIK2 LQ LMM  
 Exogenous variables: C DU58 DU75  
 Date: 08/28/18 Time: 12:06  
 Sample: 1952 1976  
 Included observations: 23

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	45.07686	NA	8.75e-06	-3.137118	-2.692794	-3.025372
1	128.5940	123.4601	1.39e-08	-9.616867	-8.728220	-9.393375
2	142.7318	17.21125*	9.76e-09*	-10.06363*	-8.730662*	-9.728395*

\* indicates lag order selected by the criterion  
 LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)  
 FPE: Final prediction error  
 AIC: Akaike information criterion  
 SC: Schwarz information criterion  
 HQ: Hannan-Quinn information criterion

Figura C.10: Criterios para la Selección del Número de Rezagos

En las prueba de Rango de Cointegración medido por la traza de la matriz en la parte superior del Panel (a) de la Figura C.11, detecta como máximo dos ecuaciones cointegradas en el modelo con un 99,5 % de significatividad. En las prueba del máximo valor propio de la matriz de cointegración, en la parte inferior del Panel (a) de la Figura C.11, también detecta a lo sumo dos vectores de cointegración, con una significatividad del 98 %. Concluimos entonces que seguramente hay un vector de cointegración y, probablemente, otro más adicional.

Date: 08/24/18 Time: 18:27				
Sample (adjusted): 1955 1976				
Included observations: 22 after adjustments				
Trend assumption: Linear deterministic trend (restricted)				
Series: LIK LQ LMM				
Exogenous series: DU58 DU75				
Warning: Critical values assume no exogenous series				
Lags interval (in first differences): 1 to 2				
Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)				
Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.787691	67.34736	42.91525	0.0000
At most 1**	0.531936	33.25365	25.97211	0.0050
At most 2	0.400723	11.26467	12.51798	0.0802
Trace test indicates 2 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level				
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level				
**Mackinnon-Haug-Michelis (1999) P-values				
Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)				
Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.787691	34.09370	25.82321	0.0032
At most 1**	0.531936	21.98898	19.38704	0.0205
At most 2	0.400723	11.26467	12.51798	0.0802
Max-eigenvalue test indicates 2 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level				
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level				
**Mackinnon-Haug-Michelis (1999) P-values				

Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by b*'S11*b')				
LIK	LQ	LMM	@TREND(51)	
-34.54072	-7.68437	31.79546	-0.595132	
38.06229	15.62873	-69.95630	2.475676	
23.86965	-4.563498	21.24517	-1.126194	

Unrestricted Adjustment Coefficients (alpha)				
D(LIK)	0.023354	0.011745	-0.024030	
D(LQ)	-0.031312	-0.052966	-0.050880	
D(LMM)	0.000647	0.004340	-0.007968	

1 Cointegrating Equation(s)		Log likelihood		149.4158
Normalized cointegrating coefficients (standard error in parentheses)				
LIK	LQ	LMM	@TREND(51)	
1.000000	0.222486	-0.92032	0.017230	
	(0.07811)	(0.36885)	(0.01545)	
Adjustment coefficients (standard error in parentheses)				
D(LIK)	-0.006665	(0.42378)		
D(LQ)	1.081537	(1.13680)		
D(LMM)	-0.029249	(0.13688)		

2 Cointegrating Equation(s)		Log likelihood		160.4102
Normalized cointegrating coefficients (standard error in parentheses)				
LIK	LQ	LMM	@TREND(51)	
1.000000	0.000000	0.165113	-0.030348	
		(0.98529)	(0.04127)	
0.000000	1.000000	-4.878251	0.254297	
		(3.24556)	(0.13581)	
Adjustment coefficients (standard error in parentheses)				
D(LIK)	-0.359812	0.004092		
	(0.60605)	(0.20530)		
D(LQ)	-1.315093	-0.743451		
	(1.41023)	(0.47784)		
D(LMM)	0.135960	0.061329		
	(0.19324)	(0.06548)		

Figura C.11: Test de Cointegración de Johansen

En la zona inferior del Panel (b), a la derecha de la Figura C.11, podemos ver las dos ecuaciones de cointegración de largo plazo (con los signos invertidos), en los bloques “1 Cointegrating Ecuacion(s)” y “2 Cointegrating Ecuacion(s)”. Dado que a continuación estimaremos el Modelo de Corrección de Errores, dejamos los comentarios sobre este punto para la conclusión final.

## C. Modelo de Corrección de Errores

En el Panel (a) tenemos la Ecuación Cointegrada de Largo Plazo en la parte superior (junto con los desvíos estándar y los valores de ‘t’), y los principales indicadores de la estimación en la parte inferior.

En el Panel (b) a la derecha de la Figura C.12, vemos el Modelo de Corrección

Vector Error Correction Estimates			
Date: 08/28/18 Time: 12:08			
Sample (adjusted): 1955 1976			
Included observations: 22 after adjustments			
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]			
Cointegrating Eq.		CointEq1	
LIK2(-1)		1.000000	
LQ(-1)		0.415861	
		(0.19794)	
		[ 2.10092]	
LMM(-1)		-1.114181	
		(0.07298)	
		[-15.2672]	
C		8.272296	
R-squared	0.794023	0.356740	0.673409
Adj. R-squared	0.639540	-0.125705	0.428465
Sum sq. resids	0.150780	0.275401	0.004105
S.E. equation	0.112094	0.151493	0.018494
F-statistic	5.139870	0.739442	2.749239
Log likelihood	23.59612	16.96961	63.23707
Akaike AIC	-1.236011	-0.633601	-4.839734
Schwarz SC	-0.740082	-0.137672	-4.343805
Mean dependent	0.017782	-0.000132	0.036245
S.D. dependent	0.186703	0.142784	0.024464
Determinant resid covariance (dof adj.)		6.39E-09	
Determinant resid covariance		1.04E-09	
Log likelihood		133.9143	
Akaike information criterion		-9.174027	
Schwarz criterion		-7.537464	

Error Correction:	D(LIK2)	D(LQ)	D(LMM)
CointEq1	-0.693396 (0.32794) [-2.11443]	0.524417 (0.44320) [ 1.18325]	-0.022142 (0.05411) [-0.40923]
D(LIK2(-1))	-0.298139 (0.39641) [-0.75210]	-0.217068 (0.53574) [-0.40517]	0.014646 (0.06540) [ 0.22393]
D(LIK2(-2))	-0.411734 (0.46028) [-0.89453]	0.482250 (0.62206) [ 0.77524]	-0.035511 (0.07594) [-0.46761]
D(LQ(-1))	0.981641 (0.21510) [ 4.56360]	-0.239170 (0.29071) [-0.82272]	0.140055 (0.03549) [ 3.94632]
D(LQ(-2))	0.038493 (0.33543) [ 0.11476]	-0.559257 (0.45333) [-1.23365]	-0.036936 (0.05534) [-0.66739]
D(LMM(-1))	2.673863 (2.77439) [ 0.96377]	-1.833869 (3.74954) [-0.48909]	0.096275 (0.45775) [ 0.21032]
D(LMM(-2))	3.069315 (3.33882) [ 0.91928]	-5.557486 (4.51237) [-1.23161]	0.484614 (0.55088) [ 0.87971]
C	-0.046771 (0.11734) [-0.39860]	0.159350 (0.15858) [ 1.00486]	-0.014042 (0.01936) [-0.72531]
DU58	-0.121811 (0.12068) [-1.00938]	0.099799 (0.16310) [ 0.61190]	0.002270 (0.01991) [ 0.11401]
DU75	-0.296477 (0.13971) [-2.12214]	0.054844 (0.18881) [ 0.29047]	-0.003056 (0.02305) [-0.13258]

Figura C.12: Modelo de Corrección de Errores

de Errores. La velocidad de ajuste del modelo puede verse en el primer término denominado ‘CointEq1’ y equivale a ‘-0,69’.

Para extraer conclusiones adicionales podemos analizar la significatividad y los signos de las demás variables involucradas en este Modelo y verificar el comportamiento estadístico. Para ello reagrupamos la información de la Figura C.12 de manera tal que resulte más simple para la lectura, tarea que se muestra en la Figura C.13.

## Prueba de Causalidad de Granger

Dado que la prueba debe ser realizada con variables estacionarias, hemos aplicado la primera diferencias a nuestras variables que, como ya habíamos verificado, son estacionarias en diferencias. Los resultados pueden verse en la Figura C.14, y muestran que existe causalidad en el sentido de Granger entre las variables, con distintos grados de significatividad.

Vemos que la significatividad con la que se identifica la causalidad que producen la tasa de interés y la ‘q’ de Tobin son muy altas (99 % o más), mientras que la influencia del Mercado Meta es algo menos significativa. No obstante, debemos rescatar que sí se puede aceptar la presencia de causalidad del Mercado Meta a la relación de inversión a capital, con una significatividad del 88 %.

## Verificaciones Estadísticas

Podemos ver en el Panel (a) de la Figura C.15 las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, que nos muestran la ausencia de correlación de los residuos,

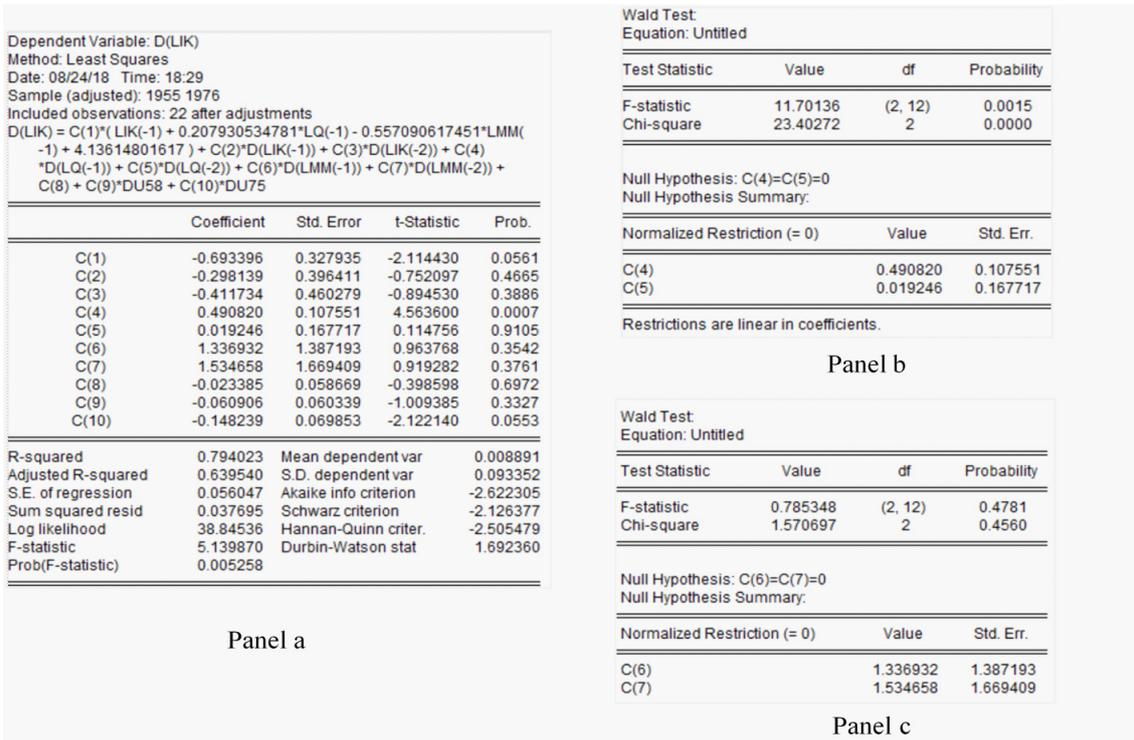


Figura C.13: Significatividad de las variables del Modelo de Corrección de Errores

Pairwise Granger Causality Tests			
Date: 08/31/18 Time: 19:42			
Sample: 1952 1976			
Lags: 2			
Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
D(Q) does not Granger Cause D(IK)	22	8.73552	0.0025
D(IK) does not Granger Cause D(Q)		0.32722	0.7254
D(MM) does not Granger Cause D(IK)	24	2.35584	0.1219
D(IK) does not Granger Cause D(MM)		1.60129	0.2277
D(RD) does not Granger Cause D(IK)	22	18.5302	5.E-05
D(IK) does not Granger Cause D(RD)		1.40282	0.2730
D(MM) does not Granger Cause D(Q)	22	1.98453	0.1680
D(Q) does not Granger Cause D(MM)		9.74873	0.0015
D(RD) does not Granger Cause D(Q)	22	2.75693	0.0918
D(Q) does not Granger Cause D(RD)		0.81955	0.4573
D(RD) does not Granger Cause D(MM)	22	19.8909	4.E-05
D(MM) does not Granger Cause D(RD)		3.50864	0.0530

Figura C.14: Causalidad en el Sentido de Granger

lo cual se confirma en la parte inferior del Panel (b), donde la prueba de Breusch-Godfrey, que utiliza dos rezagos (la misma cantidad que aplicamos en los las prueba y estimaciones), nos confirma con valores superiores al 5% tanto con distribución ‘F’ como con  $\chi^2$ , que se rechaza la hipótesis de autocorrelación en los residuos.

También podemos ver en el Panel (b), ahora en la parte superior, los resultados de la prueba de Breusch-Pagan-Godfrey que nos permite rechazar la hipótesis de heteroscedasticidad en la estimación.

El Panel (c), mientras tanto, nos muestra los valores reales (‘Actual’) y estimados (‘Fited’) de  $(I/K)^2$ , junto con los residuos y el gráfico de la evolución de los mismos año por año, con una línea punteada sobre los dos desvíos estándar. Vemos seis observaciones que exceden los dos desvíos, fuera de lo cual el comportamiento de los

mismos aparece normal.

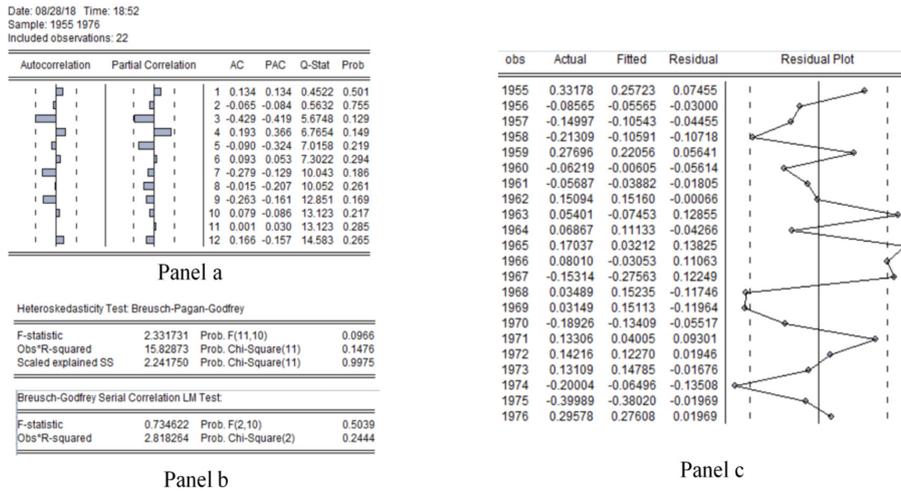


Figura C.15: Verificaciones del Modelo de Corrección de Errores

## D. Cambio de Parámetros

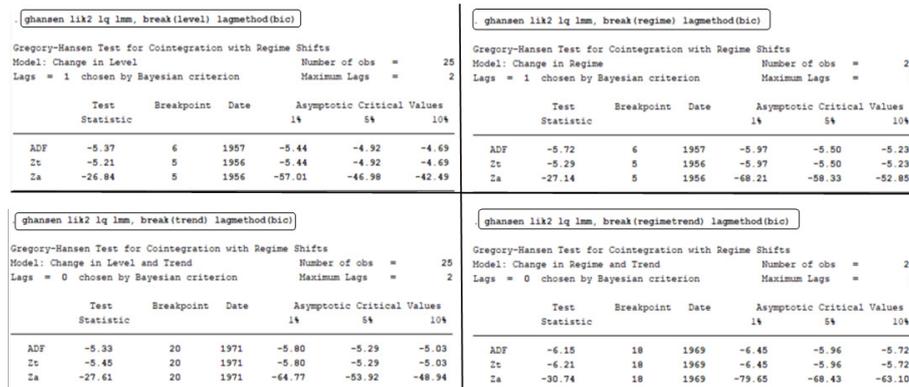


Figura C.16: Test de Gregory y Hansen: Cointegración con Cambio Estructural

## E. Estimación sin el Mercado Meta

Vemos en el Panel (a) de la Figura C.19 que la estimación es buena, ya que tiene un  $R^2$  del 58,6 %, los parámetros son significativos individualmente, salvo la variable binaria DU75, mientras que el coeficiente de Durbin-Watson de 1,61 despeja la posibilidad de autocorrelación en los residuos, ya que para  $k=4$  y  $N=25$ , los valores

```
. ardl lik2 lq lmm z z1q zlmm, lags(1 1 1 0 0 0) ec
```

ARDL(1,1,1,0,0,0) regression

Sample: 1953 - 1976      Number of obs = 24  
R-squared = 0.9018  
Adj R-squared = 0.8494  
Log likelihood = 35.193007      Root MSE = 0.0706

	D.lik2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
ADJ	lik2						
	L1.	-.4196944	.1557527	-2.69	0.017	-.7516735	-.0877154
LR	lq	1.748718	1.374484	1.27	0.223	-1.180927	4.678362
	lmm	-3.222232	5.852632	-0.55	0.590	-15.69682	9.252357
	z	-4.777808	6.378374	-0.75	0.465	-18.37299	8.817375
	z1q	-1.761059	1.550658	-1.14	0.274	-5.066208	1.544091
	zlmm	3.83165	5.834267	0.66	0.521	-8.603796	16.2671
SR	lq						
	D1.	-.1542264	.1682427	-0.92	0.374	-.5128271	.2043743
	lmm						
	D1.	5.581916	1.161831	4.80	0.000	3.105533	8.058299
	_cons	-1.338378	2.828603	-0.47	0.643	-7.367402	4.690646

Figura C.17: Cointegración con Cambio Estructural: Relación de Largo Plazo

```
. ardl lik2 lq lmm du58 dulq dulmm, lags(1 1 1 0 0 0) ec
```

ARDL(1,1,1,0,0,0) regression

Sample: 1953 - 1976      Number of obs = 24  
R-squared = 0.9166  
Adj R-squared = 0.8721  
Log likelihood = 37.152389      Root MSE = 0.0651

	D.lik2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
ADJ	lik2						
	L1.	-.5632835	.1812611	-3.11	0.007	-.9496324	-.1769346
LR	lq	1.332586	.6499381	2.05	0.058	-.0527247	2.717896
	lmm	-1.899644	1.5523	-1.22	0.240	-5.208293	1.409005
	du58	-3.380073	1.780578	-1.90	0.077	-7.175285	.4151386
	dulq	-1.108627	.7543689	-1.47	0.162	-2.716527	.499272
	dulmm	2.618664	1.540561	1.70	0.110	-.664965	5.902292
SR	lq						
	D1.	-.2508134	.1685307	-1.49	0.157	-.610028	.1084013
	lmm						
	D1.	4.833825	1.085206	4.45	0.000	2.520763	7.146888
	_cons	-2.56327	1.487541	-1.72	0.105	-5.733888	.6073474

Figura C.18: Cointegración con Cambio Estructural: Variable Binaria en 1958 = dulmm

de tabla son  $d_L = 1,038$  y  $d_U = 1,767$ , cayendo entonces en la zona de duda, pero muy cerca del límite de No Autocorrelación. (la prueba de Breusch-Godfrey con uno y dos rezagos confirma este comentario). Tenemos entonces un buen resultado, aunque no resulta tan bueno como cuando usamos el Mercado Meta en lugar de la tasa de interés, pero muy aceptable por cierto.

Continuando con los resultados del modelo con 'RD' en lugar de 'LMM', vemos la prueba de Johansen sobre cointegración de las variables en los Paneles (c) y (d) de la Figura C.19, y comenzamos a detectar problemas. Como puede verse, utilizamos dos rezagos en la prueba, de acuerdo a lo que indicaron los diferentes criterios de selección que se muestran en el Panel (b). De esta manera, vemos que mientras la

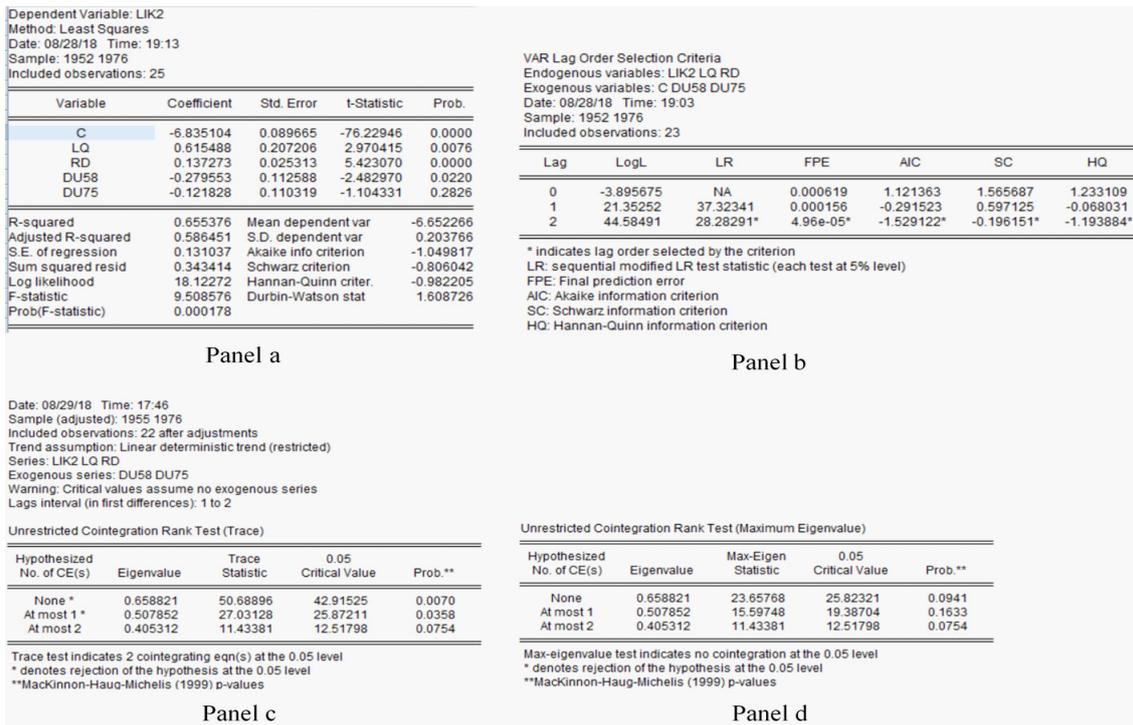


Figura C.19: Estimación de Cointegración sin el Mercado Meta

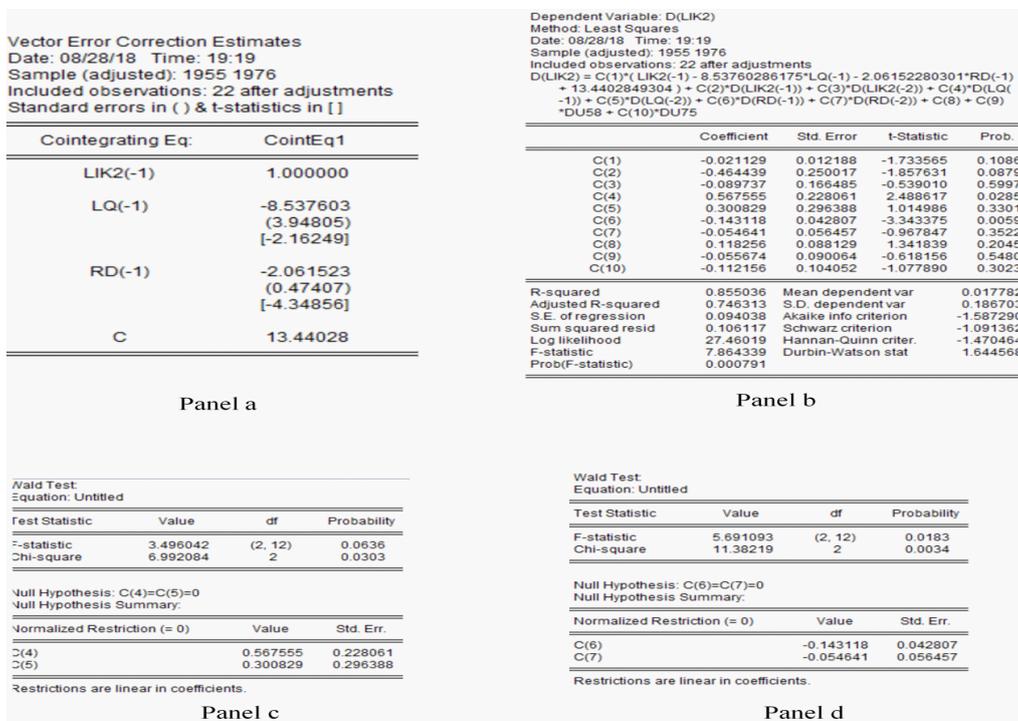


Figura C.20: Significatividad del Modelo de Corrección de Errores sin 'LMM'

prueba del rango de cointegración basado en la traza de la matriz nos dice en el Panel (c) que existen dos ecuaciones cointegradas, el que utiliza el criterio de los mayores valores propios indica en el Panel (d) que no hay ninguna ecuación cointegrada .

No obstante ello, realizamos la estimación de largo plazo del Modelo de Corrección de Errores, la cual puede verse en el Panel (a) de la Figura C.20. Para completar este ejercicio, incluimos en el Panel (b) de la Figura C.20 el resultado de la estimación del ECM, en el que puede verse que si bien el parámetro de la velocidad de ajuste  $C(1)$  es negativo, resulta no significativo, por lo que no se verifica causalidad el sentido de Granger en el largo plazo, al contrario de lo que ocurría al incluir el Mercado Meta.

El Panel (c) de la Figura, a su vez, nos da resultados contrapuestos para la significatividad conjunta de la ‘q’ de Tobin rezagada, rechazando la causalidad de corto plazo bajo la distribución ‘F’, pero aceptándola bajo la  $\chi^2$  al 95 % de significatividad. En el caso de la tasa de interés, por el contrario, bajo ambas distribuciones se acepta la causalidad en el sentido de Granger en el corto plazo.

Como hemos notado al analizar la causalidad en sentido de Granger de las variables, se detecta causalidad de ‘q’ hacia ‘I/K’, lo cual no puede verificarse con esta especificación del modelo con RD y sin LMM, ni en el corto ni en el largo plazo. Este es un motivo adicional para preferir utilizar el Mercado Meta en la estimación, en lugar de la tasa de interés prime.

## F. Verificaciones Estadísticas

Vamos a analizar los resultados de la estimación que nos da la Figura C.6 en la página 188, donde vemos que la estimación no tiene autocorrelación, lo que se verifica a través de:

1. Test de Durbin-Watson: el valor de 2,06 que arroja EViews está muy cercano a 2. Si buscamos los valores tabulados para el estadístico de D-W, con  $k=4$  variables y  $N=25$  observaciones, obtenemos  $d_L = 1,038$  y  $d_U = 1,767$ ; por lo que el valor encontrado cae en la zona de ausencia de autocorrelación.
2. El correlograma residual con 11 retardos que se muestra en el Panel (b) de la Figura C.6, exhibe que ninguno de los coeficientes de correlación parcial excede las líneas punteadas, por lo que confirmamos el diagnóstico del D-W.
3. Los contrastes de máxima verosimilitud de Breusch-Godfrey en los Paneles (c) y (d) de la Figura C.6 utilizando tanto uno como dos rezagos en los residuos, rechazan la hipótesis nula de autocorrelación tanto por la prueba de “F” como por la “Chi-cuadrado” (vemos que ambos tienen p-valores que superan ampliamente el 5 %).

Otra cuestión complementaria a la significatividad de nuestra estimación, viene dada por el gráfico de la dispersión de los residuos con respecto a ‘LQ’ y ‘LMM’, ubicado en el Panel (a) de la Figura C.21. Podemos ver que el comportamiento de los mismos es bastante aleatorio, a partir de la nube de puntos que se ve en cada caso, a la vez que la

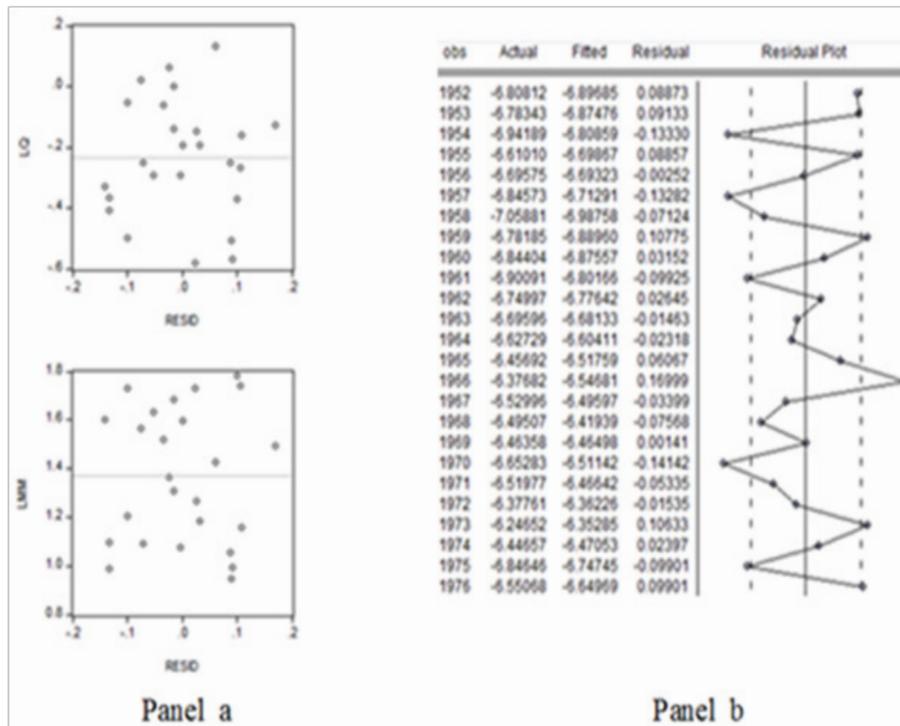


Figura C.21: Residuos de la Regresión

línea de tendencia resulta claramente horizontal. El Panel (b) de la Figura, mientras tanto, nos muestra los valores reales ('Actual') y estimados ('Fited') de  $(I/K)^2$ , junto con los residuos y el gráfico de su evolución año por año, con una línea punteada sobre los dos desvíos estándar. Como podemos ver, hay cuatro observaciones en las que los residuos superan los dos desvíos (lo que equivale a un 16%). Recordemos que en la estimación sin variables ficticias eran seis excesos (24%, ver Figura C.4).

La segunda cuestión que debemos verificar está relacionada con la relevancia del Mercado Meta en la estimación. A pesar de que hemos verificado que en todas las regresiones el "p-value" de la variable era relevante, y que ahora mismo en la Figura C.6 tiene un valor nulo (0,0000), vamos a realizar la prueba de Wald de significatividad individual del parámetro, cuyo resultado puede verse en la Figura C.22.

Vemos en el Panel (a) de la Figura que los "p-value" nulos son por supuesto inferiores al 5% para las tres distribuciones de los diferentes estadísticos ('t', 'F' y ' $\chi^2$ '), lo que nos permite aceptar con holgura que la variable es relevante.

La siguiente pregunta que debemos responder, ya que sabemos que el Mercado Meta es una variable relevante para nuestro modelo, es que no resulte una variable redundante. No será nuestro caso, pero siempre es útil verificarlo ya que a pesar de que el parámetro es significativo, podría darse que la variable sea redundante.

Para verificarlo calculamos el porcentaje de Máxima Verosimilitud, cuyo resultado vemos en el Panel (b) de la Figura C.22. Los tres estadísticos son nulos como podemos ver, y nos permiten rechazar la hipótesis nula de que MM es redundante.

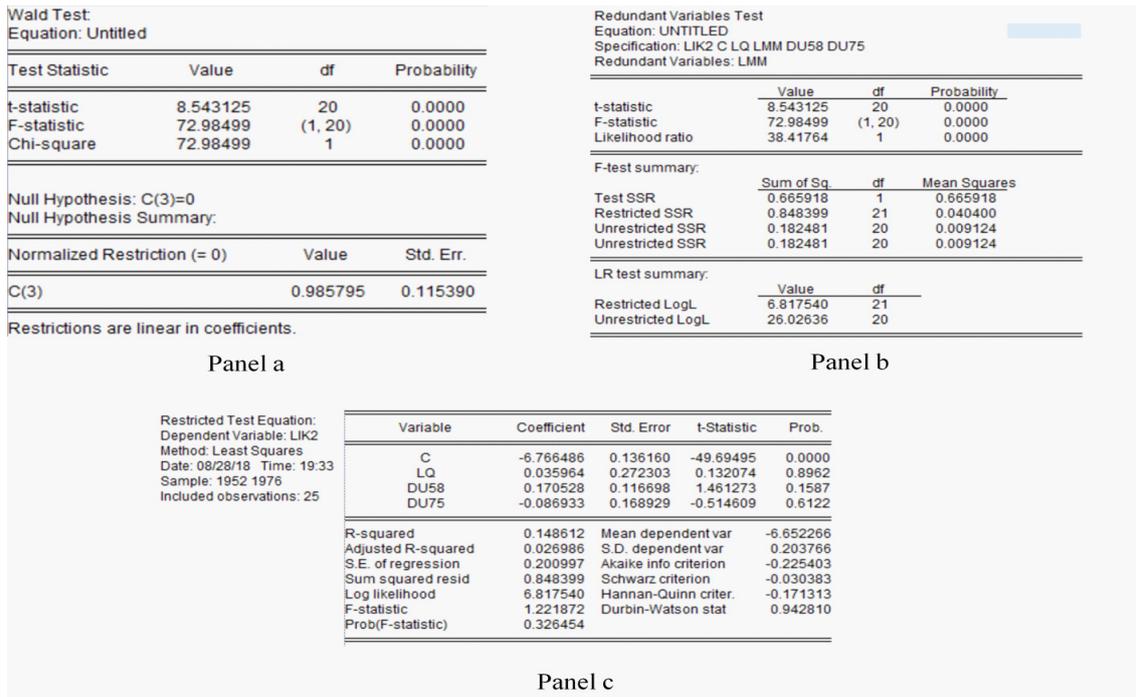


Figura C.22: Relevancia del Mercado Meta

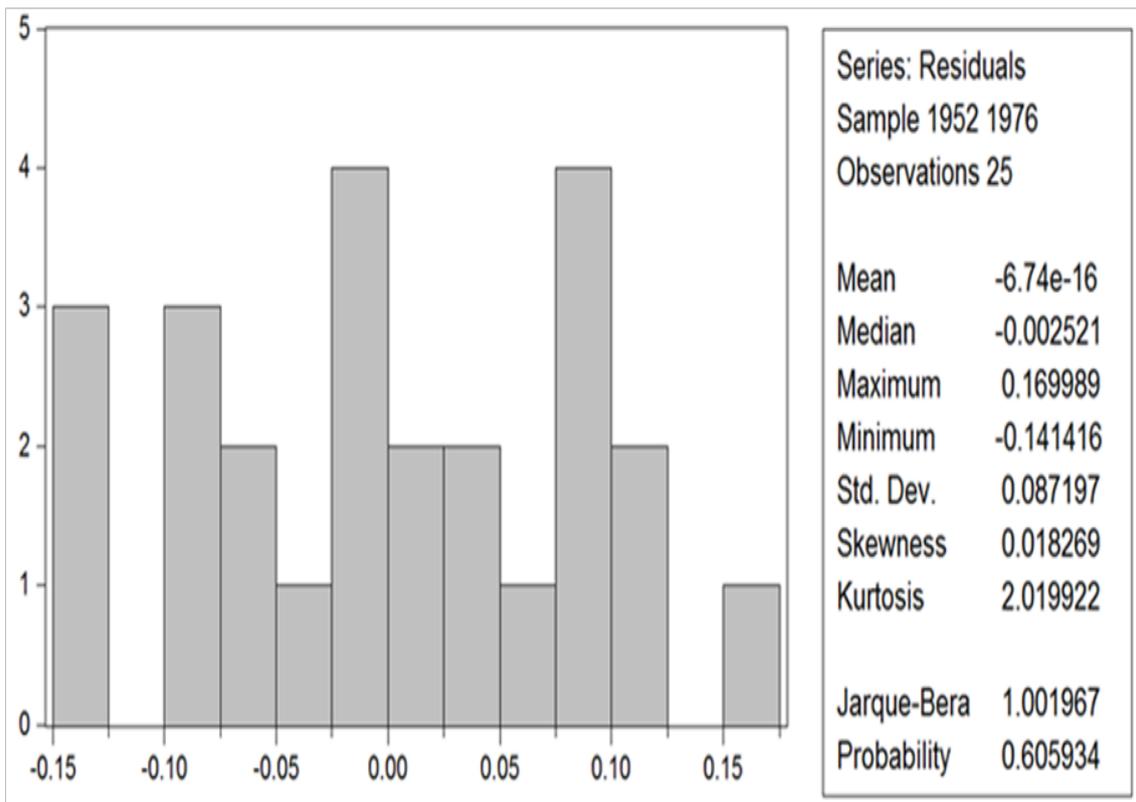


Figura C.23: Normalidad de los Residuos de la Regresión

Adicionalmente, podemos ver en el Panel (c) de la Figura C.22 que la estimación de la ecuación sin el Mercado Meta muestra un  $\bar{R}^2$  muy inferior al original (2,7%), a la vez que el coeficiente de Durbin-Watson disminuye y cae en la zona de aceptación

de autocorrelación. También se cumple la regla práctica de (Granger and Newbold, 1974) para la correlación Espúrea, que indica que seguramente existe cuando el  $R^2$  es inferior al coeficiente estimado de D-W, como sucede en ausencia del Mercado Meta.

Concluimos entonces que el Mercado Meta es una variable relevante en la estimación de la relación de inversión a capital, lo cual coincide con nuestras comprobaciones teóricas del Capítulo anterior y nuestras presunciones del inicio de esta Tesis. Además, como dijimos, su ausencia en la estimación lleva muchas veces a tener autocorrelación en los residuos de la regresión.

También hemos incorporado en la Figura C.23, el Estadístico de Jarque-Bera, cuya probabilidad bastante mayor al 5% nos indica que los residuos tienen una distribución normal, algo que también puede asumirse a través de la representación gráfica que nos muestra EViews. Asimismo vemos en la Figura C.23 que el valor medio es prácticamente nulo, mientras que la asimetría se acerca bastante al valor cero (0,018), mientras que la curtosis se aproxima a dos (2,02), valores estos representativos de una distribución normal estandarizada.

A partir de estas verificaciones, y como los residuos tienen distribución normal, concluimos adicionalmente que la inferencia estadística que realicemos con el modelo será válida.

A continuación, y aunque la heteroscedasticidad no es tan frecuente en series de tiempo, podría estar presente en nuestra estimación. Vamos a aplicar primero la prueba de Breusch-Pagan-Godfrey que se construye expresando la varianza como  $\sigma_i^2 = h(a \cdot Z'_i)$ , donde 'h' es una función del vector 'Z' compuesto por las variables que producen la heteroscedasticidad. Si el valor de 'a' fuera igual a cero, la varianza sería constante.

Para realizar la prueba, se hace una estimación de máxima verosimilitud de la varianza del error y se determina el valor del estadístico  $Q = \frac{VE}{2}$ , donde VE = varianza explicada por la estimación máximo verosímil. El estadístico 'Q' se distribuye según una  $\chi^2$  con k grados de libertad<sup>1</sup>, bajo la hipótesis nula que "a=0", o sea que hay homocedasticidad. El resultado podemos verlo en el Panel (a) de la Figura C.24, donde los tres estadísticos presentados superan el 5% y por lo tanto aceptan la hipótesis de homocedasticidad.

También incluimos la prueba de White, que consiste en realizar una regresión de los cuadrados de los residuos obtenidos en la estimación de Mínimos Cuadrados Ordinarios, sobre todas las variables independientes del modelo, sus cuadrados y sus productos cruzados de dos en dos. Si mediante un las prueba 'F' se acepta la nulidad conjunta de todos los parámetros del modelo (sin la constante), se acepta también la homocedasticidad de la estimación. El resultado podemos verlo en el Panel (b) de la Figura C.24, donde volvemos a rechazar la hipótesis de heteroscedasticidad.

También hemos verificado la ausencia de heteroscedasticidad condicional mediante la verificación en el correlograma de los residuos al cuadrado que se muestra en el Panel (b) de la Figura C.25, donde vemos que ninguno de los rezagos es significativo, y por

---

<sup>1</sup>/ Donde k = número de variables

Heteroskedasticity Test: Breusch-Pagan-Godfrey					Heteroskedasticity Test: White				
F-statistic	0.371303	Prob. F(4,20)	0.8263		F-statistic	0.330330	Prob. F(10,14)	0.9579	
Obs*R-squared	1.728179	Prob. Chi-Square(4)	0.7856		Obs*R-squared	4.772639	Prob. Chi-Square(10)	0.9058	
Scaled explained SS	0.564034	Prob. Chi-Square(4)	0.9670		Scaled explained SS	1.557670	Prob. Chi-Square(10)	0.9987	
Test Equation: Dependent Variable: RESID^2 Method: Least Squares Date: 08/28/18 Time: 19:36 Sample: 1952 1976 Included observations: 25					Test Equation: Dependent Variable: RESID^2 Method: Least Squares Date: 08/28/18 Time: 19:36 Sample: 1952 1976 Included observations: 25 Collinear test regressors dropped from specification				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.007484	0.010154	0.736999	0.4697	C	-0.069447	0.154970	-0.448130	0.6609
LQ	-0.005156	0.011211	-0.459941	0.6505	LQ	-0.036792	0.106283	-0.346168	0.7344
LMM	0.000362	0.009606	0.037670	0.9703	LQ^2	-0.083939	0.079354	-1.057772	0.3081
DU58	-0.002710	0.006659	-0.406986	0.6883	LQ*LMM	-0.043007	0.132487	-0.324616	0.7503
DU75	0.002145	0.007010	0.305970	0.7628	LQ*DU58	0.055025	0.109561	0.502233	0.6233
R-squared	0.069127	Mean dependent var	0.007299		LQ*DU75	-0.002956	0.100736	-0.029347	0.9770
Adjusted R-squared	-0.117047	S.D. dependent var	0.007524		LMM	0.130921	0.228145	0.573849	0.5752
S.E. of regression	0.007952	Akaike info criterion	-6.654002		LMM^2	-0.068839	0.093875	-0.733310	0.4755
Sum squared resid	0.001265	Schwarz criterion	-6.410227		LMM*DU58	0.058221	0.111371	0.522770	0.6093
Log likelihood	88.17502	Hannan-Quinn criter.	-6.586389		LMM*DU75	0.002091	0.026267	0.079603	0.9377
F-statistic	0.371303	Durbin-Watson stat	2.664495		DU58	-0.054092	0.128047	-0.422435	0.6791
Prob(F-statistic)	0.826260				R-squared	0.190906	Mean dependent var	0.007299	
					Adjusted R-squared	-0.387019	S.D. dependent var	0.007524	
					S.E. of regression	0.008861	Akaike info criterion	-6.314209	
					Sum squared resid	0.001099	Schwarz criterion	-5.777903	
					Log likelihood	89.92761	Hannan-Quinn criter.	-6.165461	
					F-statistic	0.330330	Durbin-Watson stat	2.549703	
					Prob(F-statistic)	0.957907			

Panel a

Panel b

Figura C.24: Pruebas de Homoscedasticidad

lo tanto en ningún período la función de autocorrelación excede los límites punteados de la Figura. También incluimos en el Panel (a), el contraste del multiplicador de Lagrange con dos retardos que nos muestra ‘p-values’ superiores al 5% que nos permiten rechazar la hipótesis de heteroscedasticidad condicional.

Pasamos entonces a la verificación de ausencia de colinealidad entre las variables explicativas, analizando en primer término la matriz de correlaciones entre las variables. Como podemos ver en el Panel (b) de la Figura C.26, sólo se aprecia correlación importante, aunque no preocupante, entre el logaritmo del Mercado Meta (LMM), con la relación de inversión a capital (LIK), las cuales sabemos que están cointegradas.

Para despejar toda duda, también calculamos los “Factores de Inflación de la Varianza” (VIF), que se realizan a partir del  $R^2$  obtenido en una regresión de cada variable explicativa contra el resto de las mismas. Si el valor del VIF es superior a 10, se presume que hay colinealidad entre las variables explicativas. El cálculo del valor del VIF viene dado por:

$$VIF_Q = \frac{1}{R_Q^2}$$

donde  $R_Q^2$  proviene de la regresión de  $\ln(Q) = \Upsilon_0 + \Upsilon_1 \ln(MM) + \Upsilon_2 DU58 + \Upsilon_3 DU75$ . El resultado obtenido puede verse en el Panel (a) de la Figura C.26, y nos muestra que como los VIF centrados (en la última columna) son todos menores a diez, podemos rechazar la hipótesis de colinealidad perfecta de las variables.

Pasamos a ver ahora la correcta especificación del modelo mediante la prueba de

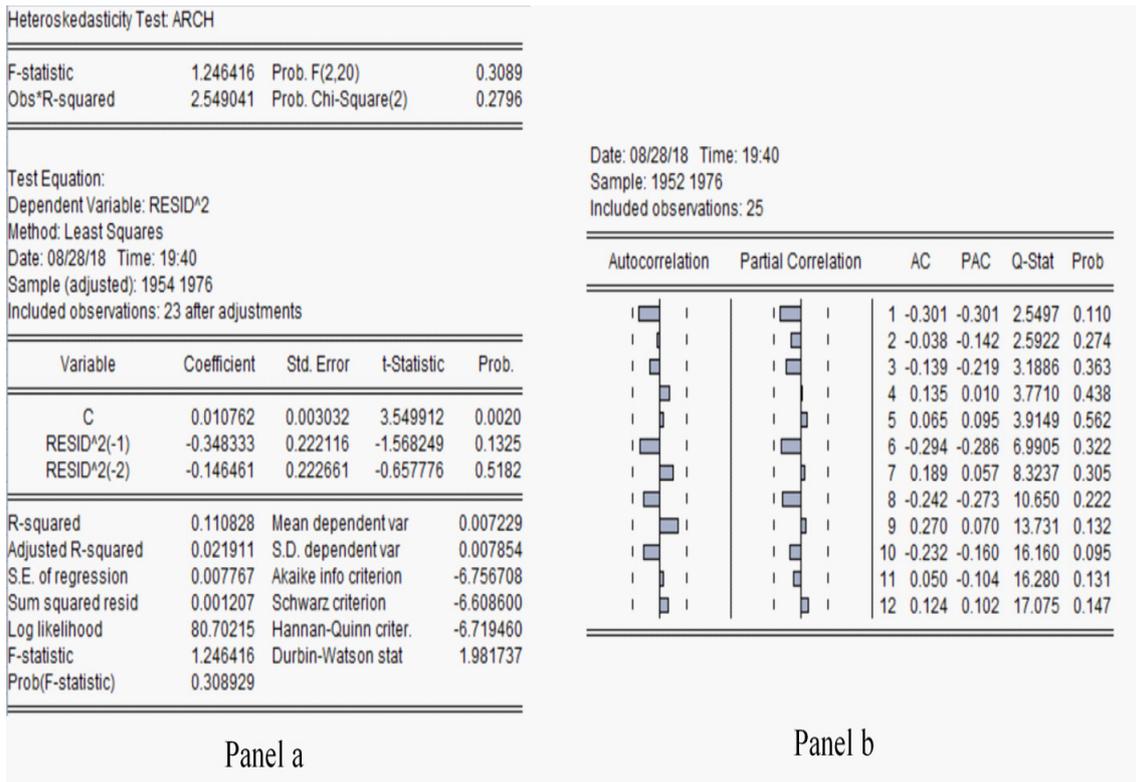


Figura C.25: Pruebas de Heteroscedasticidad Condicional

Ramsey, llamado generalmente “RESET Test”.

Esta prueba se construye comparando la regresión original, con otra similar pero incluyendo la variable dependiente estimada elevada a una o más potencias. En general es suficiente con elevarla al cuadrado, que es lo que hemos hecho en la Figura C.27. Como podemos ver en el Panel (a) de esa Figura, los ‘p-values’ son muy superiores al 5% y nos permiten aceptar la hipótesis de correcta especificación del modelo.

## II. Variaciones al Modelo

### A. Modelo en Niveles

Vemos en el Panel (a) de la Figura C.28 que la estimación es muy buena, e incluso el  $\bar{R}^2$  del 79,2% supera al obtenido en la estimación en logaritmos. Los criterios de Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn indican un mejor ajuste de este Modelo, como puede verificarse viendo el Cuadro 3.4, y el D-W está muy próximo a dos<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>/ Dado que la estimación no cuenta con ordenada al origen, el estadístico de Durbin-Watson no es aplicable. De todas maneras, la prueba de Breusch-Pagan confirma la ausencia de autocorrelación de los residuos.

Variance Inflation Factors			
Date: 08/28/18 Time: 19:43			
Sample: 1952 1976			
Included observations: 25			
Variable	Coefficient Variance	Uncentered VIF	Centered VIF
C	0.014879	40.76908	NA
LQ	0.018137	4.523042	1.794835
LMM	0.013315	71.09420	2.701365
DU58	0.006399	13.32594	3.198226
DU75	0.007091	1.554444	1.430089

**Panel a**

	LIK	LQ	LMM	RD
LIK	1.000000	0.248881	0.709948	0.638082
LQ	0.248881	1.000000	0.087482	-0.087069
LMM	0.709948	0.087482	1.000000	0.926492
RD	0.638082	-0.087069	0.926492	1.000000

**Panel b**

Figura C.26: Ausencia de Colinealidad

## B. Modelo sin la ‘q’ de Tobin

Como podemos apreciar en el Panel (a) de la Figura C.29, el ajuste del modelo resulta muy bueno, toda vez que el  $\bar{R}^2$  alcanza al 71,8%. Los criterios de Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn nos muestran que el Modelo en logaritmos completo (incluyendo ‘lq’), tiene un mejor ajuste, lo que indica un motivo por el cual fue elegido nuestro Modelo.

El Panel (c) de la Figura nos muestra la ausencia de autocorrelación en este modelo, que también es homocedástico y resulta bien especificado de acuerdo al RESET las prueba<sup>3</sup>. A partir de ello, en el Panel (b) verificamos la cantidad de rezagos necesarios para aplicar la prueba de cointegración de Johansen, que se muestra en el Panel (d) y nos dice que hay al menos una ecuación cointegrada, tanto por la traza como por el máximo valor propio.

A partir de este resultado, estimamos la ecuación cointegrada utilizando el Modelo de Corrección de Errores que mostramos en la Figura C.30. Vemos en el Panel (a) la ecuación de cointegración (a largo plazo), y en el Panel (b) el ECM propiamente dicho.

<sup>3</sup>/ No mostramos estos resultados explícitamente por una cuestión de espacio

Ramsey RESET Test				Unrestricted Test Equation:				
Equation: UNTITLED				Dependent Variable: LIK2				
Specification: LIK2 C LQ LMM DU58 DU75				Method: Least Squares				
Omitted Variables: Squares of fitted values				Date: 08/28/18 Time: 19:45				
				Sample: 1952 1976				
				Included observations: 25				
	Value	df	Probability	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
t-statistic	0.458303	19	0.6519	C	-28.07073	44.55769	-0.629986	0.5362
F-statistic	0.210042	(1, 19)	0.6519	LQ	2.058791	3.721072	0.553279	0.5865
Likelihood ratio	0.274855	1	0.6001	LMM	5.650023	10.17784	0.555130	0.5853
F-test summary:				DU58	-1.859314	3.355367	-0.554131	0.5860
	Sum of Sq.	df	Mean Squares	DU75	-1.722480	3.095929	-0.556369	0.5845
Test SSR	0.001995	1	0.001995	FITTED^2	0.354878	0.774330	0.458303	0.6519
Restricted SSR	0.182481	20	0.009124	R-squared				
Unrestricted SSR	0.180486	19	0.009499	0.818879				
Unrestricted SSR	0.180486	19	0.009499	Adjusted R-squared				
LR test summary:				0.771215				
	Value	df		S.E. of regression				
Restricted LogL	26.02636	20		0.097464				
Unrestricted LogL	26.16379	19		Sum squared resid				
				0.180486				
				Log likelihood				
				26.16379				
				F-statistic				
				17.18040				
				Prob(F-statistic)				
				0.000002				

Panel a

Panel b

Figura C.27: Test de Especificación del Modelo

Notamos en primer lugar que el parámetro ‘C(1)’ es negativo y significativo al 99,9 %, lo cual resulta una significación mucho mayor a la que mostraba el Modelo completo en C.6. Sin embargo, el valor inferior a ‘-1’ nos está indicando un error de especificación en este modelo, ya que al tratarse de la velocidad de ajuste del corto al largo plazo, no puede superar el 100 % ya que ajustaría en el período más que la cantidad necesaria, lo cual no es muy plausible.

Unamos ahora lo que habíamos visto en la Figura C.20 (página 196), con la estimación del modelo con la tasa de interés prime en lugar del Mercado Meta. Allí tampoco existía cointegración, toda vez que la significatividad del parámetro ‘C(1)’ era inferior al 90 %. Ambos elementos nos estarían indicando que la correcta especificación del modelo requiere la inclusión tanto del Mercado Meta como de la ‘q’ de Tobin para que exista cointegración.

### III. Caso USA 1950-2010

Como se ve en el Panel (a) de la Figura C.31, tenemos tres criterios que indican tres rezagos, Schwartz que indica uno solo, y Hannan-Quinn que pide dos. Elegimos tres rezagos debido a que es la recomendación del criterio de Akaike, apoyado por LR y FPE.

El las prueba de Johansen sobre cointegración se muestra en el Panel (b) de la Figura C.31. Podemos ver que utilizando el estadístico basado en la traza de la matriz de

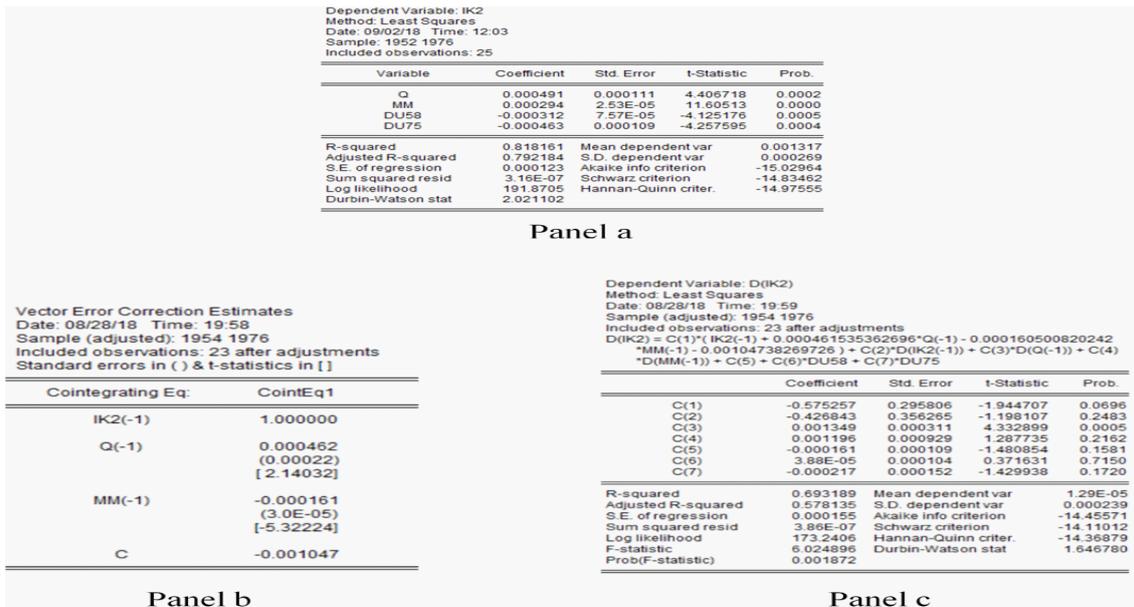


Figura C.28: Estimación del Modelo en Niveles

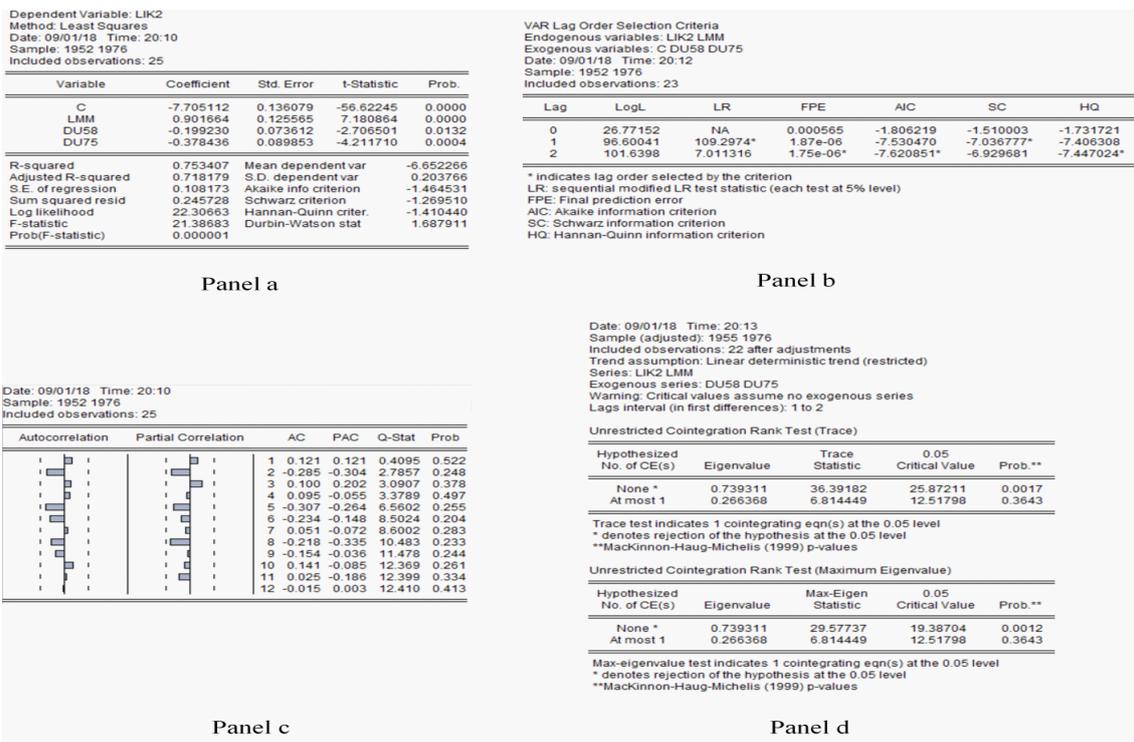


Figura C.29: Estimación del Modelo sin la 'q' de Tobin

cointegración se detecta un vector cointegrado, al igual que al aplicar el criterio del máximo valor propio.

Para cerrar, calculamos la prueba de Wald sobre significatividad de los parámetros, a fin de verificar la causalidad en el sentido de Granger de corto plazo. Como vemos en el Panel (a) de la Figura C.33 se acepta la hipótesis de causalidad en el sentido de Granger de la 'q' de Tobin hacia la relación de inversión a capital. El Panel (b),

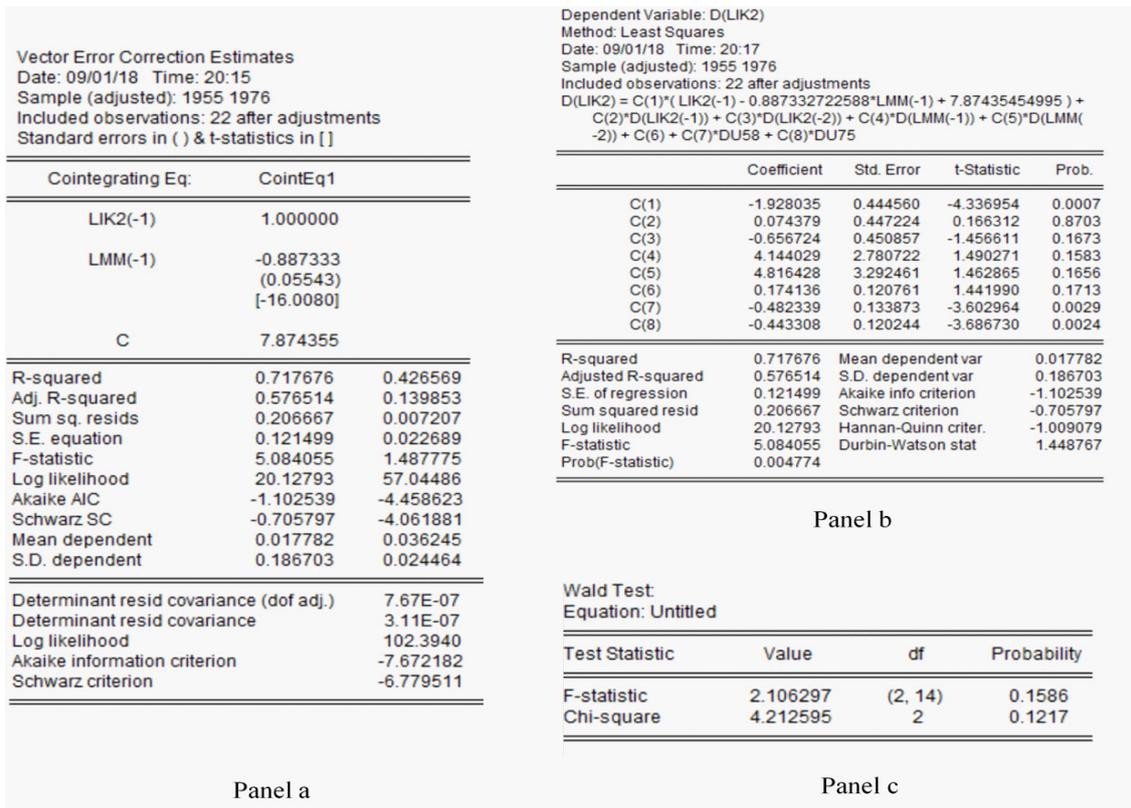


Figura C.30: Modelo de Corrección de Errores (sin la 'q' de Tobin)

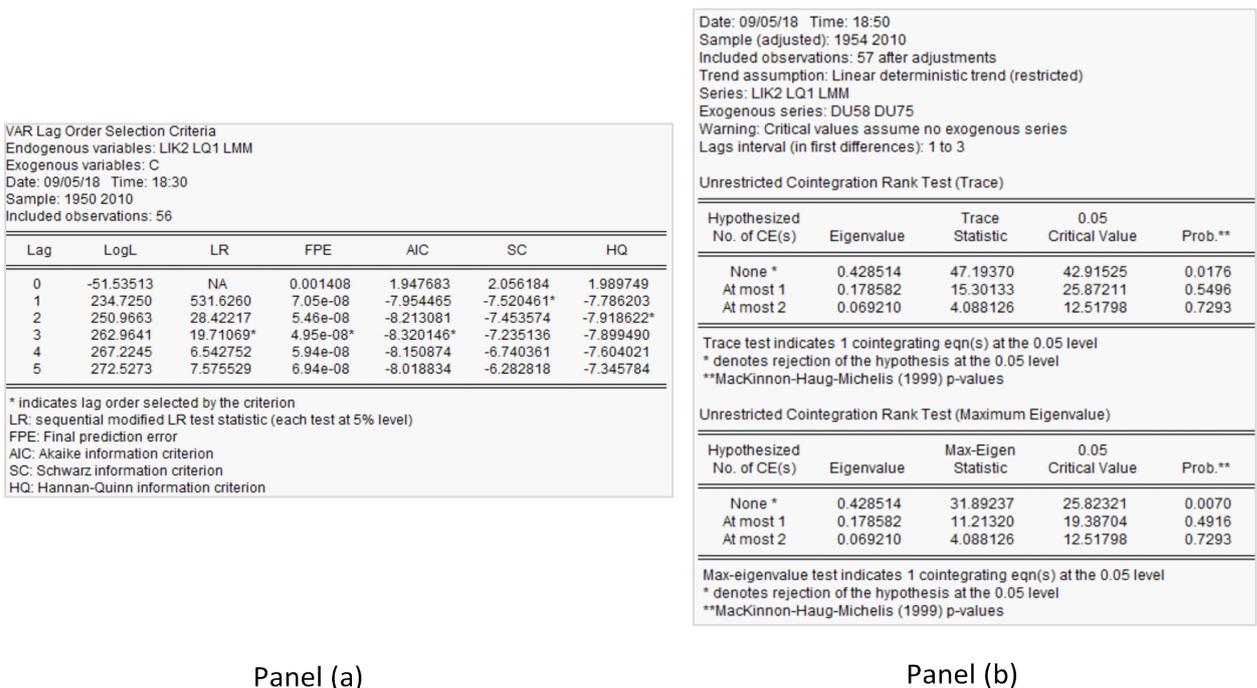


Figura C.31: Criterios de Selección y Test de Rango de Johansen para 1950-2010

Date: 09/05/18 Time: 18:35  
Sample (adjusted): 1954 2010  
Included observations: 57 after adjustments  
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

Cointegrating Eq:	CointEq1
LIK2(-1)	1.000000
LQ1(-1)	-0.262404 (0.08206) [-3.19761]
LMM(-1)	-0.426810 (0.11379) [-3.75077]
C	7.062027

R-squared	0.630644
Adj. R-squared	0.529910
Sum sq. resids	0.656762
S.E. equation	0.122174
F-statistic	6.260510
Log likelihood	46.32983
Akaike AIC	-1.169468
Schwarz SC	-0.703509
Mean dependent	0.010575
S.D. dependent	0.178192

Determinant resid covariance (dof adj.)	3.06E-08
Determinant resid covariance	1.41E-08
Log likelihood	272.6082
Akaike information criterion	-8.091515
Schwarz criterion	-6.586109

Panel (a)

Dependent Variable: D(LIK2)  
Method: Least Squares  
Date: 09/05/18 Time: 18:36  
Sample (adjusted): 1954 2010  
Included observations: 57 after adjustments  
D(LIK2) = C(1)\*( LIK2(-1) - 0.262403841909\*LQ1(-1) - 0.426810086232 \*LMM(-1) + 7.06202746409 ) + C(2)\*D(LIK2(-1)) + C(3)\*D(LIK2(-2)) + C(4)\*D(LIK2(-3)) + C(5)\*D(LQ1(-1)) + C(6)\*D(LQ1(-2)) + C(7)\*D(LQ1(-3)) + C(8)\*D(LMM(-1)) + C(9)\*D(LMM(-2)) + C(10)\*D(LMM(-3)) + C(11) + C(12)\*DU58 + C(13)\*DU75

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-0.400724	0.190481	-2.103748	0.0412
C(2)	0.729199	0.321773	2.266189	0.0284
C(3)	0.233118	0.277208	0.840949	0.4049
C(4)	-0.139147	0.205885	-0.675849	0.5027
C(5)	0.404388	0.126311	3.201523	0.0025
C(6)	-0.179287	0.126793	-1.414015	0.1644
C(7)	-0.127555	0.131270	-0.971700	0.3365
C(8)	-2.913987	2.290888	-1.271990	0.2101
C(9)	-0.500728	2.023754	-0.247425	0.8057
C(10)	1.366989	1.853417	0.737551	0.4647
C(11)	0.053012	0.105814	0.500992	0.6189
C(12)	-0.036416	0.081983	-0.444189	0.6591
C(13)	0.020654	0.055063	0.375096	0.7094

R-squared	0.630644	Mean dependent var	0.010575
Adjusted R-squared	0.529910	S.D. dependent var	0.178192
S.E. of regression	0.122174	Akaike info criterion	-1.169468
Sum squared resid	0.656762	Schwarz criterion	-0.703509
Log likelihood	46.32983	Hannan-Quinn criter.	-0.988380
F-statistic	6.260510	Durbin-Watson stat	1.999852
Prob(F-statistic)	0.000003		

Panel (b)

Figura C.32: Estimación del Modelo Cointegrado para 1950-2010

Wald Test:  
Equation: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	7.989748	(3, 44)	0.0002
Chi-square	23.96924	3	0.0000

Null Hypothesis: C(5)=C(6)=C(7)=0  
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
C(5)	0.404388	0.126311
C(6)	-0.179287	0.126793
C(7)	-0.127555	0.131270

Restrictions are linear in coefficients.

Panel (a)

Wald Test:  
Equation: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	0.623620	(3, 44)	0.6035
Chi-square	1.870861	3	0.5996

Null Hypothesis: C(8)=C(9)=C(10)=0  
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
C(8)	-2.913987	2.290888
C(9)	-0.500728	2.023754
C(10)	1.366989	1.853417

Restrictions are linear in coefficients.

Panel (b)

Figura C.33: Test de Wald para 1950-2010

```
. ardl lik2 lq lmm du94 dulq1 dulmm, lags(1 1 0 0 0) ec
```

ARDL(1,1,1,0,0,0) regression

Sample: 1951 - 2014      Number of obs = 64  
R-squared = 0.8573  
Adj R-squared = 0.8365  
Log likelihood = 83.928396      Root MSE = 0.0703

	D.lik2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
ADJ	lik2						
	L1.	-.3632496	.0518966	-7.00	0.000	-.4672527	-.2592465
LR	lq	-.3943006	.2372414	-1.66	0.102	-.8697429	.0811418
	lmm	.7068674	.1019956	6.93	0.000	.5024637	.9112712
	du94	-.7895079	.9030359	-0.87	0.386	-2.599232	1.020217
	dulq1	.2321203	.1982466	1.17	0.247	-.1651748	.6294154
	dulmm	.3763519	.345672	1.09	0.281	-.3163903	1.069094
SR	lq						
	D1.	.1631948	.0892402	1.83	0.073	-.0156466	.3420362
	lmm						
	D1.	6.44073	.4787628	13.45	0.000	5.481268	7.400192
	_cons	-3.027324	.3671342	-8.25	0.000	-3.763078	-2.291571

Panel (a)

```
. ardl lik2 lq lmm, lags(1 1 1) ec
```

ARDL(1,1,1) regression

Sample: 1951 - 2014      Number of obs = 64  
R-squared = 0.8417  
Adj R-squared = 0.8281  
Log likelihood = 80.615235      Root MSE = 0.0721

	D.lik2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
ADJ	lik2						
	L1.	-.3121247	.0484723	-6.44	0.000	-.4091526	-.2150968
LR	lq	-.6124819	.2804576	-2.18	0.033	-1.173879	-.051085
	lmm	.9257859	.0938093	9.87	0.000	.7380062	1.113566
SR	lq						
	D1.	.2015544	.0900901	2.24	0.029	.0212195	.3818894
	lmm						
	D1.	6.687214	.4659546	14.35	0.000	5.754505	7.619924
	_cons	-2.753993	.3571265	-7.71	0.000	-3.468859	-2.039127

Panel (b)

Figura C.34: Modelos Largo Plazo con y sin ‘dummies’: 1950-2010

mientras tanto, indica que no se verifica causalidad en el sentido de Granger del Mercado Meta hacia (I/K).

Vemos en el Panel (a) de la izquierda, que contiene la estimación con las variables binarias, que han mejorado los resultados con respecto a la estimación anterior (de sólo 25 observaciones), y ahora el ‘p-value’ de significatividad conjunta se redujo todavía más, hasta anularse (lo cual es muy bueno). Por otro lado, ahora resulta significativo el parámetro del Mercado Meta y el de la ‘q’ de Tobin lo es al 90 % de significatividad. Recordemos que en la estimación para 1952-1976 resultaron no significativos, con ‘p-values’ superiores a 22 % para ‘q’ y 59 % para ‘LMM’.

También podemos ver que las tres variables binarias son no significativas, ya que tienen ‘p-values’ muy superiores al 5 % (39 % du94, 25 % dulq y 29 % dulmm), lo que nos indica que no serían necesarias para la estimación.

Veamos qué sucede cuando no consideramos las variables binarias, en el Panel (b) de la Figura C.34. El ‘p-value’ de ADJ se mantiene en un valor nulo, mientras que mejora sustancialmente la significatividad del parámetro de la ‘q’ de Tobin y el Mercado Meta sigue siendo muy significativo.

En principio, este resultado de falta de significación de las variables ficticias y mejora de la significatividad de las variables explicativas al quitar las dummies, unido a la detección de cointegración tanto con la prueba de (Johansen, 1988) como con el de (Gregory and Hansen, 1996a), nos estaría indicando que puede ser posible tener una buena estimación del Modelo sin incluir variables ficticias. Esto es lo que haremos en la siguiente Sección.

## A. ECM para USA 1950-2010

Cuadro C.3: Estimaciones Previas Realizadas con el Modelo 1950-2010

Dependiente(*) →	IK2	IK2	IK2	L.IK2	L.IK2
↓ Explicativas	1	2	3	4	5
C	0.0008	0.0007	0.0009	-7.424	-7.483
Q1	0.0005	0.0005	0.0007		
MM	0.0002	0.0003	0.0003		
LOG(Q)					0.0819
LOG(MM)				0.892	1.148
R			$6.4e^{-05}$		
RD	0.000	$5.5e^{-05}$			
$\Delta$ (RD)				0.046	0.0448
CREPIB	-0.000	$1.2e^{-05}$	$-1.5e^{-05}$	-0.0056	-0.007
LQ1*DU75				0.166	
DU58		$-9.9e^{-05}$			-0.177
DU75		-0.0004			-0.217
$R^2$	0.80	0.81	0.82	0.84	0.86
$\bar{R}^2$	0.79	0.81	0.81	0.83	0.84
SE of Regr	$7e^{-06}$	0.0003	$6e^{-06}$	1.379	0.151
D-W	0.67	0.71	0.73	0.74	0.70

(\*): Aplicamos un punto en 'L.IK2' para distinguirlo mejor de 'IK2'.

	LIK2	LQ	LMM	CREPIB	RP
LIK2	1.000000	0.536780	0.846538	0.721556	0.236218
LQ	0.536780	1.000000	0.534158	0.425832	0.238034
LMM	0.846538	0.534158	1.000000	0.941164	0.349819
CREPIB	0.721556	0.425832	0.941164	1.000000	0.273241
RP	0.236218	0.238034	0.349819	0.273241	1.000000

Figura C.35: Matriz de Correlaciones 1950-2010

	Valor Tabulado		Valor Tabulado	
	Todas I(0)		Todas I(1)	
	No hay cointegración	Zona de Duda	Zona de Duda	Hay cointegración
	F = 2,86		F = 4,01	
LIK2				13,62
CREPIB				11,65
$\Delta(RD)$				4,51
LMM				8,65
LQ1		3,09		
	t = 2,86		t = 3,99	
LIK2				7,08
CREPIB				6,68
$\Delta(RD)$				4,36
LMM	2,15			
LQ1	0,92			

Figura C.36: Esquema del Bound Test - 1950/2010

## B. Bound Test de Pesaran y Smith

Los resultados de la estimación pueden verse en la Figura C.37, que muestra en la parte superior las estimaciones de corto y largo plazo.

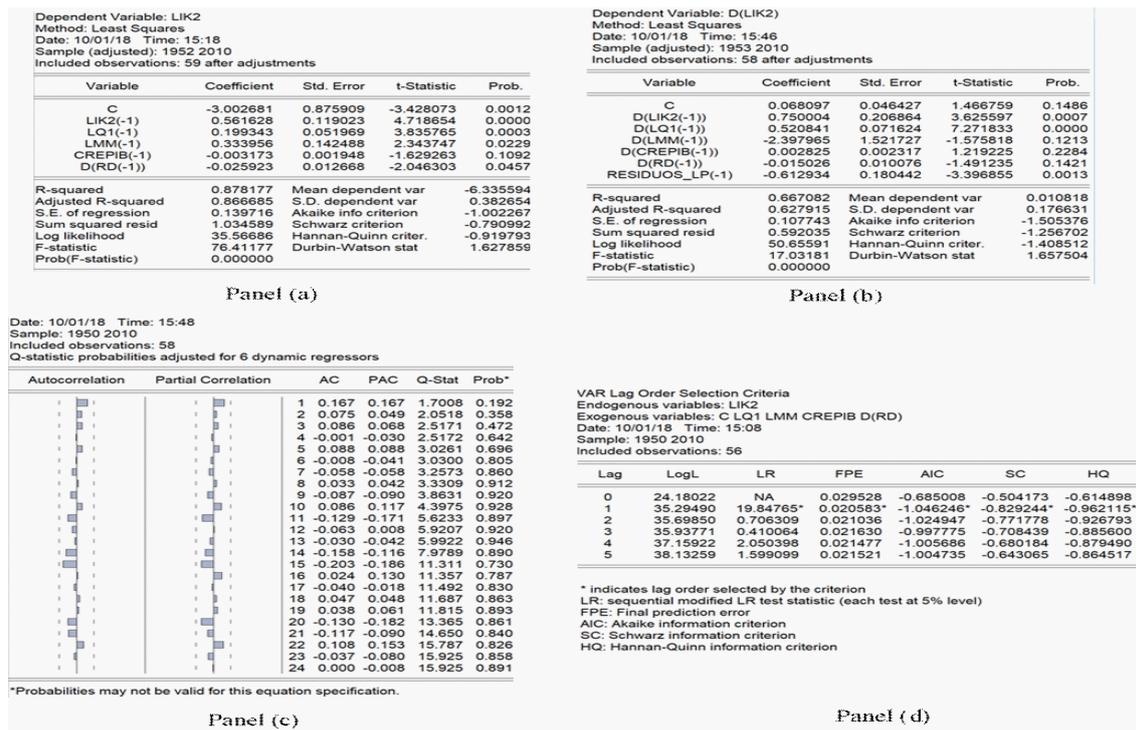


Figura C.37: Estimación del Modelo para 1950-2010

En el Panel (a) de la Figura C.37 vemos la estimación de largo plazo, que muestra que todas las variables son significativas, salvo la relación de crédito a GDP (CREPIB) que lo es al 90%. Esto puede deberse a la superposición que tiene con el Mercado Meta, que se verifica con un coeficiente de correlación del 94% que ya habíamos comentado (ver la Figura C.35 en la página 209). Sin embargo, al quitarlo de la estimación se produce una desmejora de la misma, que puede verse en la reducción de los criterios de selección de Schwartz y de Akaike al comparar los Paneles (a) de

las Figuras C.37 y C.38. Pero el mayor efecto negativo de la ausencia de la relación de crédito a GDP en la estimación, se produce al generarse una leve autocorrelación, detectada por ejemplo mediante la prueba de Breusch-Godfrey que puede verse en el Panel (b) de la Figura C.38. Por ello, y al tratarse de una variable importante para el Modelo, decidimos mantenerla en la estimación.

Dependent Variable: LIK2  
Method: Least Squares  
Date: 10/02/18 Time: 09:19  
Sample (adjusted): 1952 2010  
Included observations: 59 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.569793	0.847329	-3.032815	0.0037
LIK2(-1)	0.623395	0.114539	5.442635	0.0000
LQ1(-1)	0.185899	0.052090	3.568780	0.0008
LMM(-1)	0.135286	0.074836	1.807778	0.0762
D(RD(-1))	-0.027223	0.012835	-2.120960	0.0385

R-squared	0.872076	Mean dependent var	-6.335594
Adjusted R-squared	0.862600	S.D. dependent var	0.382654
S.E. of regression	0.141840	Akaike info criterion	-0.987294
Sum squared resid	1.086406	Schwarz criterion	-0.811231
Log likelihood	34.12517	Hannan-Quinn criter.	-0.918566
F-statistic	92.03136	Durbin-Watson stat	1.565472
Prob(F-statistic)	0.000000		

**Panel (a)**

---

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	6.228708	Prob. F(1,53)	0.0157
Obs*R-squared	6.204657	Prob. Chi-Square(1)	0.0127

**Panel (b)**

Figura C.38: Estimación del Modelo 1950-2010 sin la variable ‘CREPIB’

## C. Verificaciones Estadísticas

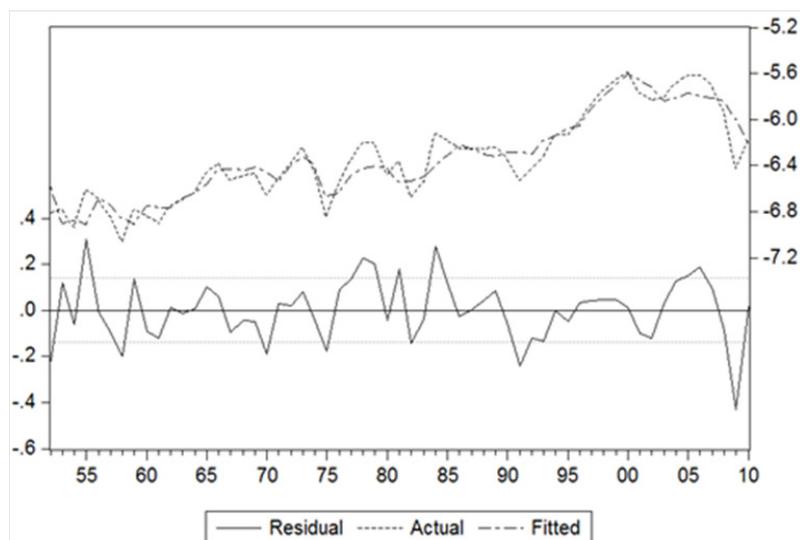


Figura C.39: Estimación ARDL para 1950-2010

Verificamos la ausencia de heteroscedasticidad, aplicando la prueba de Harvey (ver el Panel (b) de la Figura C.40), y la colinealidad mediante los factores de inflación

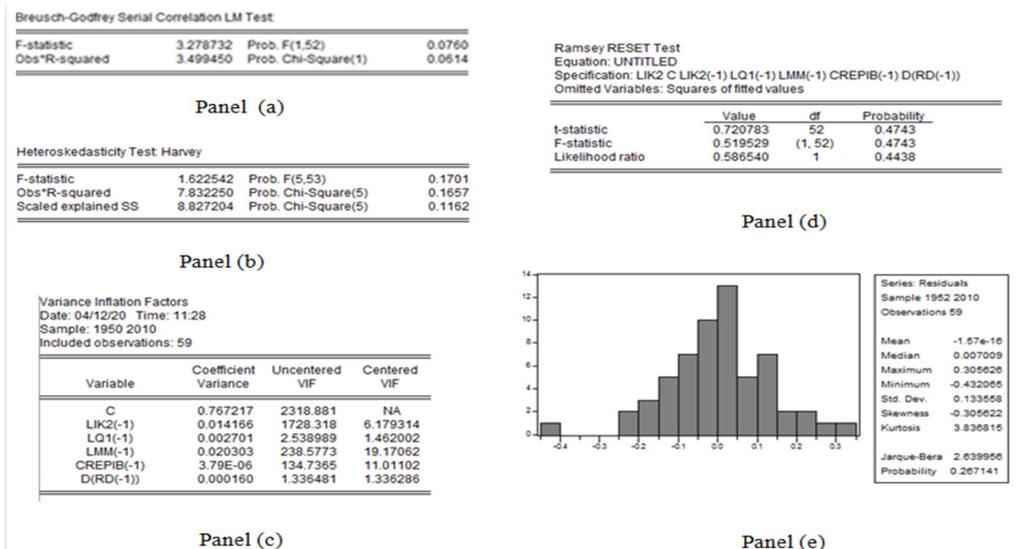


Figura C.40: Autocorrelación, Heteroscedasticidad, Colinealidad, Especificación y Normalidad de los Residuos del Modelo en 1950-2010

de la varianza, que detectan nuevamente la vinculación entre ‘LMM’ y ‘CREPIB’ con valores superiores a 10 (ver el Panel (c) de la Figura C.40, columna ‘Centered VIF’).

Para finalizar el análisis del comportamiento de la regresión, realizamos la prueba de Jarque-Bera sobre normalidad de los residuos, que al arrojar un ‘p-value’ superior al 5% (26,7% en realidad), acepta la hipótesis de normalidad. Por otra parte, y como también puede verse en el Panel (e) de la Figura C.40, el valor medio de los residuos prácticamente igual a cero ( $2,59 e^{-17}$ ), una asimetría muy cercana a cero (-0,31) y una curtosis algo elevada (3,84), nos definen un acercamiento muy grande a una distribución normal, con concentración en el valor medio, como se aprecia en la citada Figura

Vemos también en el Panel (d) de la Figura C.40, que el modelo se encuentra bien especificado, toda vez que el RESET las prueba de Ramsey nos muestra ‘p-values’ muy superiores al 5%.

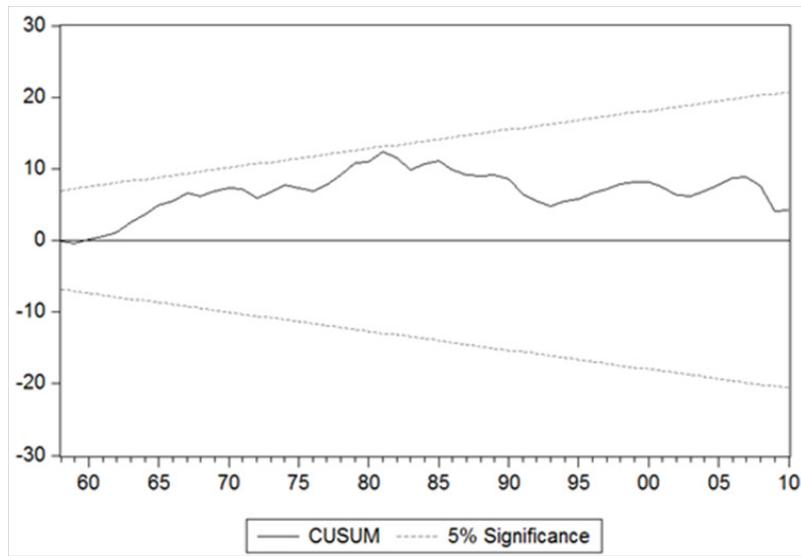


Figura C.41: Estabilidad CUSUM: 1950-2010

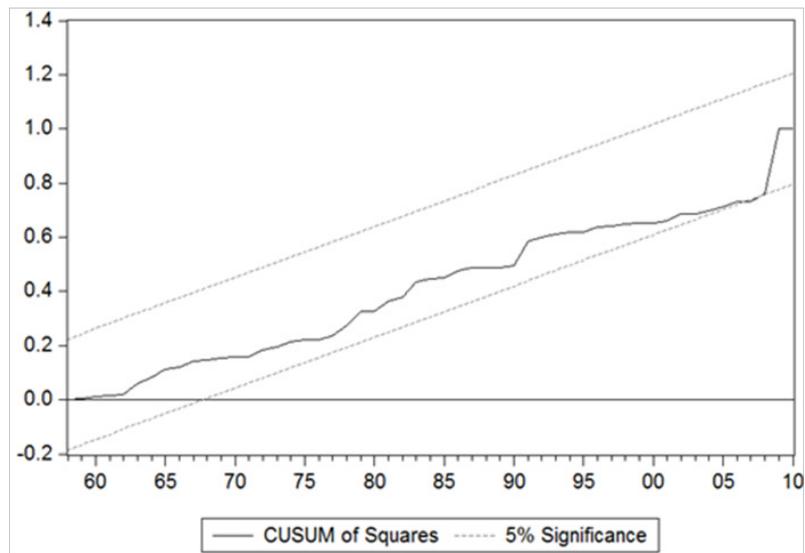


Figura C.42: Estabilidad CUSUMQ: 1950-2010

Cuadro C.4: Verificación de Causalidad y Exogeneidad Débil Mediante el Modelo de Corrección de Errores

Variable	$\Delta(LIK2)$		$\Delta(LQ1)$		$\Delta(LMM)$		$\Delta(CREPIB)$		$\Delta(\Delta RD)$	
	Coefficiente	P-Value	Coefficiente	P-Value	Coefficiente	P-Value	Coefficiente	P-Value	Coefficiente	P-Value
$\hat{u}_{t-1}$	-0.3207	0.0225	-0.2626	0.2874	-0.0200	0.3319	11.0445	0.0000	-0.6317	0.7715
$\Delta LIK2_{t-1}$	0.4764	0.0378	0.1303	0.7463	0.0537	0.1112	8.9490	0.0030	-1.4456	0.6841
$\Delta LQ1_{t-1}$	0.4975	0.0000	-0.2689	0.0924	0.0571	0.0000	2.5814	0.0297	3.5183	0.0128
$\Delta LMM_{t-1}$	-2.1328	0.2334	-1.7356	0.5820	-0.0560	0.8314	-50.5315	0.0315	31.3654	0.2598
$\Delta CREPIB_{t-1}$	0.0039	0.0715	-0.0002	0.9680	0.0008	0.0514	0.0474	0.1806	-0.0062	0.8822
$\Delta(\Delta RD_{t-1})$	-0.0039	0.6997	-0.0179	0.3214	-0.0013	0.3772	-0.1487	0.2670	-0.1436	0.3579
C	0.0547	0.3217	0.0738	0.4482	0.0300	0.0003	3.2029	0.0000	-1.0281	0.2313
$\hat{u}_{t-1} < 0$	SI		SI		SI		NO		SI	
Significativo	SI		NO		NO		SI		NO	
Causalidad LP	SI		NO		NO		NO		NO	
Exog.Débil	NO		SI		SI		SI		SI	
Signif. LQ1	SI		NO		SI		SI		SI	
Signif. LMM	NO		NO		NO		SI		NO	

# Bibliografía

- Abel, A. B. (2014). The analytics of investment,  $q$ , and cash flow. *National Bureau of Economic Research*.
- Abel, A. B. and Blanchard, O. J. (1983). An intertemporal model of saving and investment. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 675–692.
- Abel, A. B. and Eberly, J. C. (2002). Investment and  $q$  with fixed costs: An empirical analysis. *Unpublished paper. Kellogg School of Management and the Wharton School of the University of Pennsylvania*.
- Abramovitz, M. and David, P. A. (1973). Reinterpreting economic growth: parables and realities. *The American Economic Review*, 63(2):428–439.
- Acemoglu, D. and Linn, J. (2003). Market size in innovation: theory and evidence from the pharmaceutical industry. Technical report, Massachusetts Institute of Technology Department of Economics Working Paper Series.
- Ali, M. and Lima (2016). Analyzing tobin's  $q$  ratio of banking industry of bangladesh: A comprehensive guideline for investors.
- Anderson, J. E. (2011). The gravity model. *Annu. Rev. Econ.*, 3(1):133–160.
- Asplund, M. and Nocke, V. (2006). Firm turnover in imperfectly competitive markets. *The Review of Economic Studies*, 73(2):295–327.
- Aw, B. Y., Chung, S., and Roberts, M. J. (2000). Productivity and turnover in the export market: micro-level evidence from the republic of korea and taiwan (china). *The World Bank Economic Review*, 14(1):65–90.
- Balassa, B. (1978). Exports and economic growth: further evidence. *Journal of development Economics*, 5(2):181–189.
- Banerjee, Anindya; Lumsdaine, R. and Stock, J. H. (1990). Recursive and sequential test of the unit root and trend break hypotheses: Theory and international evidence. *NBER Working Paper No. 3510*.
- Bernard, A. B. and Jensen, J. B. (2004). Why some firms export. *Review of Economics and Statistics*, 86(2):561–569.
- Bilgili, F. (1998). Stationarity and cointegration test : Comparison of engle-granger and johansen methodologies. *Munich Personal RePEc Archive*.

- Blanchard, O. (1981a). What is left of the multiplier accelerator. *The American Economic Review*, Volume 71, Number 2, de la pagina: 150 a la 154., Volume 71:150 a la 154.
- Blanchard, O. J. (1981b). Output, the stock market, and interest rates. *American Economic Review*, 71(1):132–143.
- Blanchard, O. J. and Fischer, S. (1989). *Lectures on macroeconomics*. MIT press.
- Blundell, R., Bond, S., Devereux, M., and Schiantarelli, F. (1992). Investment and tobin's q: Evidence from company panel data. *Journal of Econometrics*, 51(1-2):233–257.
- Boldrin, M., Christiano, L. J., and Fisher, J. D. (2001). Habit persistence, asset returns and the business cycle. *American Economic Review*, 91(1):149–166.
- Bolton, P., Chen, H., and Wang, N. (2011). A unified theory of tobin's q, corporate investment, financing, and risk management. *The journal of Finance*, 66(5):1545–1578.
- Bond, Elston, M. and Mulkay. Financial factors and investment in belgium, france, germany and theuk: a comparison using company panel data.
- Bond, S. and Cummins, J. (2001). Noisy share prices and the q model of investment.
- Bond, S. and Van Reenen, J. Microeconomic models of investment and employment.
- Borensztein, E., De Gregorio, J., and Lee, J.-W. (1998). How does foreign direct investment affect economic growth? *Journal of international Economics*, 45(1):115–135.
- Bravo Benítez, E. (2009). El papel de la inversión en el crecimiento y desarrollo: el caso de la economía mexicana 1970-2004. *XVII Jornadas ASEPUMA-V Encuentro Internacional*.
- Brown, R.; Durbin, J. and Evans, J. (1975). Techniques for testing the constancy of regression relationships over time. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*.
- Burnside, C., Eichenbaum, M., and Fisher, J. D. (2004). Fiscal shocks and their consequences. *Journal of Economic theory*, 115(1):89–117.
- Caballero, R. J. (1999). Aggregate investment. *Handbook of macroeconomics*, 1:813–862.
- Caballero, R. J. and Engel, E. M. (1991). Dynamic (s, s) economies. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Campbell, J. R. and Hopenhayn, H. A. (2005). Market size matters. *The Journal of Industrial Economics*, 53(1):1–25.
- Campos, J.; Ericsson, N. and Hendry, D. (1993). Cointegration test in the presence of structural break. *Board of Governors of the Federal Reserve System*, N(440).

- Carkovic, M. V. and Levine, R. (2002). Does foreign direct investment accelerate economic growth? *University of Minnesota*.
- Cerdá, E. (2001). Optimización dinámica. *Nueva Jersey: Prentice Hall*.
- Chan-Lee, J. H. (1986). Pure profit rates and tobin's q in nine oecd countries. *OECD Working Papers*.
- Chiang, A. (1984). *Metodos Fundamentales de Economia Matematica*. Edit.McGraw-Hill, 3ra. Edicion.
- Christiano, L. J., Eichenbaum, M., and Evans, C. L. (2005). Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy. *Journal of political Economy*, 113(1):1–45.
- Chung, K. H. and Pruitt, S. W. (1994). A simple approximation of tobin's q. *Financial management*, pages 70–74.
- Clark, J. M. (1917). Business acceleration and the law of demand: A technical factor in economic cycles. *Journal of Political Economy*, 25(3):217–235.
- Clark, P. K. (1979). Investment in the 1970s: Theory, performance, and prediction. *Brookings Papers on Economic Activity*, 1979(1):73–124.
- Contreras Herrada, T., Mendieta Munoz, I., and Huerta Quintana, R. (2012). Equilibrio parcial y general: dos problemas inquietantes. *Ensayos de Economía N.º 48*.
- Cooper, R. W. and Ejarque, J. (2001). *Exhuming Q: Market power versus capital market imperfections*. National Bureau of Economic Research.
- Crozet, M. et al. (2000). Do migrants believe in market potential? *Cahier de la MSE-Série Blanche*, 30.
- Cummins, J. G., Hassett, K., and Oliner, S. (1999). Investment behavior, observable expectations, and internal funds. *Finance and Economics Discussion Series*.
- Cummins, J. G., Hassett, K. A., Hubbard, R. G., Hall, R. E., and Caballero, R. J. (1994). A reconsideration of investment behavior using tax reforms as natural experiments. *Brookings papers on economic activity*, 1994(2):1–74.
- Davidson, R., MacKinnon, J. G., et al. (2004). *Econometric theory and methods*, volume 5. Oxford University Press New York.
- Davis, D. R. and Weinstein, D. E. (2003). Market access, economic geography and comparative advantage: an empirical test. *Journal of International Economics*, 59(1):1–23.
- De Cordoba, G. F. and Kehoe, T. J. (2000). Capital flows and real exchange rate fluctuations following spain's entry into the european community. *Journal of International Economics*, 51(1):49–78.
- De la Fuente, A. (2000). *Mathematical methods and models for economists*. Cambridge University Press.

- Dejong, D. (2007). *Structural Macroeconometrics*. Princeton University Princeton university press.
- DeMarzo, P. M., Fishman, M. J., He, Z., and Wang, N. (2012). Dynamic agency and the q theory of investment. *The Journal of Finance*, 67(6):2295–2340.
- Devereux, M. and Schiantarelli, F. financial factors and cash flow: Evidence from uk panel data.
- Dixit, A. and Stiglitz, J. E. (1975). Monopolistic competition and optimum product diversity. *University of Warwick, Economic Research Paper no. 64*.
- Dixit, A. K. (1990). *Optimization in economic theory*. Oxford University Press on Demand.
- Dixit, A. K. and Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton university press.
- Dixit, A. K. and Stiglitz, J. E. (1977). Monopolistic competition and optimum product diversity. *The American Economic Review*, 67(3):297–308.
- Edge, R. M. (2007). Time-to-build, time-to-plan, habit-persistence, and the liquidity effect. *Journal of Monetary Economics*, 54(6):1644–1669.
- Eisner, R. (1988). Extended accounts for national income and product. *Journal of Economic Literature*.
- Enders, W. (2008). *Applied econometric time series*. John Wiley & Sons.
- Engle, R; Hendry, D. and Richard, J.-F. (1983). Exogeneity. *Econometrica*,, 51(2):277–304.
- Engle, R. and Granger, C. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*,, 55(2):251–276.
- Erickson, T. and Whited, T. M. (2000). Measurement error and the relationship between investment and q. *Journal of political economy*, 108(5):1027–1057.
- Ericsson, N. and MacKinnon, J. G. (1999). distribution of error correction test for cointegration. *International Finance Discussion Papers*.
- EViews (2009). *EViews 7 User's Guide I and II*. Quantitative Micro Software.
- Fazzari, S., Hubbard, R. G., and Petersen, B. C. (1987). Financing constraints and corporate investment.
- Fazzari, S. M., Hubbard, R. G., and Petersen, B. C. (2000). Investment-cash flow sensitivities are useful: A comment on kaplan and zingales. *The Quarterly Journal of Economics*, 115(2):695–705.
- Feenstra, R. C., Inklaar, R., and Timmer, M. P. (2015). The next generation of the penn world table. *American Economic Review*, 105(10):3150–82.
- Fujita, M., Krugman, P. R., and Venables, A. J. (1999). *The spatial economy: cities, regions and international trade*, volume 213. Wiley Online Library.

- Gollier, C. and Zeckhauser, R. (2005). Aggregation of heterogeneous time preferences. *Journal of political Economy*, 113(4):878–896.
- Gorman, W. M. (1953). Community preference fields. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, pages 63–80.
- Granger, C. and Newbold, P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2:111–120.
- Granger, C. W. (1988). Some recent development in a concept of causality. *Journal of econometrics*, 39(1-2):199–211.
- Greene, W. H. (2000). *Econometric analysis (International edition)*. Pearson US Imports & PHIPES.
- Gregory, A. and Hansen, B. (1996a). Residual-based test for cointegration in models with regime shifts. *Journal of Econometrics*.
- Gregory, A. and Hansen, B. (1996b). Test for cointegration in models with regime and trend shifts. *Oxford Bulletin for Economics and Statistics*.
- Groth, C. (2015). Lecture notes in macroeconomics.
- Guisan, M. (2002). Causalidad y cointegración en los modelos econométricos. *Universidad de Santiago de Compostela - Working Papers*.
- Gujarati, D. y Porter, D. (2010). *Econometria, Quinta Edición*. McGraw-Hill/Interamericana Editores.
- Gutierrez Rueda, J y Vasquez, E. (2008). Un análisis de cointegración para el riesgo de crédito. *Reporte de Estabilidad Financiera-Colombia*.
- Harhoff, D., Van Reenen, J., Bond, S., et al. (1997). Investment, r&d and financial constraints in Britain and Germany.
- Harris, C. D. (1954). The market as a factor in the localization of industry in the United States. *Annals of the Association of American Geographers*, 44(4):315–348.
- Hayashi, F. (1982). Tobin's marginal q and average q: A neoclassical interpretation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 213–224.
- Hayashi, F. (2000). *Econometrics. Princeton*. Princeton University Press.
- Head, K. and Mayer, T. (2004). Market potential and the location of Japanese investment in the European Union. *Review of Economics and Statistics*, 86(4):959–972.
- Heijdra, B. J. (2009). *Foundations of Modern Macroeconomics-Second Edition*. Oxford University Press.
- Hirsch, B. T. and Seaks, T. G. (1993). Functional form in regression models of Tobin's q. *The Review of Economics and Statistics*, pages 381–385.
- Hoshi, T. and Kashyap, A. K. (1990). Evidence on q and investment for Japanese firms. *Journal of the Japanese and International Economies*, 4(4):371–400.

- Hubbard, R. G. (1997). Capital-market imperfections and investment. Technical report, National Bureau of economic research.
- Hubbard, R. G. E. Asymmetric information, corporate finance, and investment.
- Intriligator, M. D. (1973). *Optimizacion matematica y teoria economica*. Editorial Prentice/Hall Internacional.
- Jaumotte, M. F. (2004). *Foreign direct investment and regional trade agreements: The market size effect revisited*. Number 4 in 206. International Monetary Fund.
- Jermann, U. J. (1998). Asset pricing in production economies. *Journal of Monetary Economics*, 41(2):257–275.
- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12:231–254.
- Johansen, S. and Juselius, K. (1990). Maximun likelihood estimation and inference on cointegration whit applications to the demand for money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 52(2), 52(2).
- Jorgenson, D. (1967). The theory of investment behavior. In *Determinants of investment behavior*, pages 129–175. NBER.
- Jorgenson, D. W. (1963). Capital theory and investment behavior. *The American Economic Review*, 53(2):247–259.
- Jorgenson, D. W. (1971). Econometric studies of investment behavior: a survey. *Journal of Economic Literature*, 9(4):1111–1147.
- Jorgenson, D. W., Hunter, J., and Nadiri, M. I. (1970). A comparison of alternative econometric models of quarterly investment behavior. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 187–212.
- June-Dong, K. and Sang-In, H. (2000). The role of foreign direct investment in korea’s economic development. productivity effects and implications for the currency crisis. *The Role of Foreign Direct Investment in East Asian Economic Development*.
- Kang, J. S. (2014). Balance sheet repair and corporate investment in japan. *IMF Working Paper*, 14(141).
- Kaplan, S. and Zingales, L. (1997). Do investment-cash flow sensitivities provide useful measures of financing constraints? *Quarterly Journal of Economics*.
- Kaplan, S. N. and Zingales, L. (2000). Investment-cash flow sensitivities are not valid measures of financing constraints. *The Quarterly Journal of Economics*, 115(2):707–712.
- Keynes, J. M. (1965). *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero*. Fondo de Cultura Economica.

- Kim, J. Y., Kwak, J., and Lee, K. (2015). Estimating tobin's q for listed firms in korea (1980-2005): Comparing alternative approaches and an experiment with investment functions. *Seoul Journal of Economics*.
- Koojaroenprasit, S. (2012). The impact of foreign direct investment on economic growth: A case study of south korea. *International Journal of Business and Social Science*, 3(21).
- Kotler, P. (1996). *Dirección de mercadotecnia. Análisis, planeación, implementación y control*. Naucalpan de Juárez. México: Pearson Educación.
- Krugman, P. (1992). A dynamic spatial model. *National Bureau of Economic Research Working Paper, No. 4219*.
- Kydland, F. E. and Prescott, E. C. (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1345–1370.
- Lee, J.-W. (1995). Capital goods imports and long-run growth. *Journal of development economics*, 48(1):91–110.
- Lindenberg, E. B. and Ross, S. A. (1981). Tobin's q ratio and industrial organization. *Journal of business*, pages 1–32.
- Lipschutz, S. (1971). Algebra lineal. schaum.
- Lucas, R. E. and Stokey, N. L. (1984). Optimal growth with many consumers. *Journal of Economic Theory*, 32(1):139–171.
- Lucas Jr, R. E. (1967). Adjustment costs and the theory of supply. *Journal of Political Economy*, 75(4, Part 1):321–334.
- Lucas Jr, R. E. and Prescott, E. C. (1971). Investment under uncertainty. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 659–681.
- MacKinnon, J. G. (2010). Critical values for cointegration tests. *Queen University, Department of Economics*.
- Maddala, G. and Kim, I.-M. (1998). *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*. Cambridge University Press.
- Mantel, R. R. (1999). Agregación de demandas de bienes perfectamente complementarios. *Economica*, 45.
- Marshall, A. (1920). *Principles of Economics*. Macmillan, New York.
- Martner, R y Titelman, D. (1993). Un analisis de cointegracion de las funciones de demanda de dinero: el caso de chile. *El Trimestre Economico*, 60(238-2):413–446.
- Mas-Colell, A.; Whinston, M. and Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.
- Mayer, T., Melitz, M. J., and Ottaviano, G. I. (2014). Market size, competition, and the product mix of exporters. *The American Economic Review*, 104(2):495–536.

- Mckinnon, R., Stiglitz, J. E., and Yusuf, S. (2001). Rethinking the east asian miracle. *World Bank and Oxford University Press*.
- Melitz, M. J. and Ottaviano, G. I. (2008). Market size, trade, and productivity. *The review of economic studies*, 75(1):295–316.
- Mihaljevic, J. (2010). Equities and tobin’s ‘q’. *The Manual of Ideas*.
- Mizon, G. E. et al. (1995). A simple message for autocorrelation correctors: Don’t. *Journal of Econometrics*, 69(3):267–288.
- Muellbauer, J. (1976). Community preferences and the representative consumer. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 979–999.
- Murphy, K. M., Shleifer, A., and Vishny, R. (1989). Income distribution, market size, and industrialization. *The Quarterly Journal of Economics*, 104(3):537–564.
- Nickell, S. J. and Nicolitsas, D. How does financial pressure affect firms?
- Obstfeld, M., Rogoff, K. S., et al. (1996). *Foundations of international macroeconomics*, volume 30. MIT press Cambridge, MA.
- Oh, C.-O. (2005). The contribution of tourism development to economic growth in the korean economy. *Tourism management*, 26(1):39–44.
- Perfect, S. B. and Wiles, K. W. (1994). Alternative constructions of tobin’s.
- Pesaran, Hashem; Shin, Y. and Smith, R. (2001). Bounds testing approaches to the analysis of level relationships. *Journal of applied econometrics*.
- Pontryagin, Boltyanskii, G. and Mishchenko (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. John Wiley and Sons, Inc.
- Powell, J. L., Stock, J. H., and Stoker, T. M. (1989). Semiparametric estimation of index coefficients. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1403–1430.
- Quintos, C. and Phillips, P. (1993). Parameter constancy in cointegrating regressions. *Empirical Economics*.
- Redding, S. and Venables, A. J. (2004). Economic geography and international inequality. *Journal of international Economics*, 62(1):53–82.
- Rostami, M. The effect of ownership structure on tobin’s q ratio.
- Rothschild, M. (1971). On the cost of adjustment. *The Quarterly Journal of Economics*, pages 605–622.
- Ruiz, C. P. (1995). *Cálculo vectorial*. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Sargent, T. J. (1989). Two models of measurements and the investment accelerator. *Journal of Political Economy*, 97(2):251–287.
- Schaller, H. (1990). A re-examination of the q theory of investment using us firm data. *Journal of applied econometrics*, 5(4):309–325.

- Schiantarelli, F. (1996). Financial constraints and investment: methodological issues and international evidence. *Oxford Review of Economic Policy*, 12(2):70–89.
- Schiantarelli, F. and Georgoutsos, D. (1990). Monopolistic competition and the q theory of investment. *European Economic Review*, 34(5):1061–1078.
- Seierstad, A. and Sydsaeter, K. (1986). *Optimal control theory with economic applications*. Elsevier North-Holland, Inc.
- Sethi, S. P. and Thompson, G. L. (2000). *What is optimal control theory?* Springer.
- Shapiro, M. D. (1986). The dynamic demand for capital and labor. *The Quarterly Journal of Economics*, 101(3):513–542.
- Startz, R. (2015). *Eviews illustrated for version 9*. Irvine, CA: Quantitative Micro Software.
- Stockman, A. C. and Tesar, L. L. (1990). Tastes and technology in a two-country model of the business cycle: Explaining international comovements. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Summers, L. H. (1981). Taxation and corporate investment: A q-theory approach. *Brookings Papers on Economic Activity*.
- Tobin, J. (1969). A general equilibrium approach to monetary theory. *Journal of money, credit and banking*, 1(1):15–29.
- Tyler, W. G. (1981). Growth and export expansion in developing countries: Some empirical evidence. *Journal of development Economics*, 9(1):121–130.
- Varian, H. (1992). *Análisis Microeconómico - 3ra. Edición*. Antoni Bosch Editor.
- Varian, H. R. (1980). *Analisis Microeconomico*.
- Von Furstenberg, G. M., Lovell, M. C., and Tobin, J. (1977). Corporate investment: Does market valuation matter in the aggregate? *Brookings Papers on Economic Activity*, 1977(2):347–408.
- Weston, J. F., Chung, K. S., and Hoag, S. (1990). *Mergers, restructuring, and corporate control*. Prentice Hall.
- Westphal, L. E. (1978). The republic of korea's experience with export-led industrial development. *World Development*, 6(3):347–382.
- Woodford, M. (2013). Macroeconomic analysis without the rational expectations hypothesis. *Annu. Rev. Econ.*, 5(1):303–346.
- Wooldridge, J. M. (2010). *Econometric analysis of cross section and panel data*. MIT press.
- Yoshikawa, H. (1980). On the "q" theory of investment. *The American Economic Review*, 70(4):739–743.
- Zhang, K. H. (2001). How does foreign direct investment affect economic growth in china? *Economics of Transition*, 9(3):679–693.

Zill, D. and Cullen, M. (2009). Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera (6a edicion). *Mexico, International Thompson Editores SA.*